ZEITSCHRIFT

FÜR

MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH

O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896),
B. WITZSCHEL (1856–1859), M. CANTOR (1859–1896), E. KAHL (1860–1892).

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DR. R. MEHMKE UND DR. M. CANTOR.

43. BAND.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN UND 7 LITHOGRAPHIERTEN TAFELN.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1898.

77193

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

Über Rollkurven und Rollflächen.

Von

Dr. M. Disteli

in Winterthur.

Hierzu Tafel I Fig. 1—4.

Die in der Kinematik als Rollflächen bekannten krummen Flächen bilden die Grundkörper der sogenannten unrunden Räder,* die dazu dienen, eine gleichförmige Rotationsbewegung der einen Welle in eine ungleichförmige der anderen Welle umzusetzen. Sie sind im allgemeinen Cylinder-, Kegel- oder windschiefe Regelflächen, je nachdem die Axen der Wellen zu einander parallel sind, oder sich im Endlichen schneiden, oder sich kreuzen. Die Übertragung der Bewegung der einen Welle auf die andere geschieht dann in der Weise, dass die beiden Rollflächen R_1 und R_2 sich um ihre Axen o_1 und o_2 drehen und gleichzeitig aufeinander rollen, wobei jedoch im Falle der gekreuzten Axen zu der rollenden noch eine gleitende Bewegung beider Flächen aneinander hinzutreten wird, welcher Bewegungsvorgang als Schroten** der Flächen bezeichnet worden ist. Diese gleitende Bewegung kann dadurch beseitigt werden, dass man eine oder beide Flächen zugleich eine Translationsbewegung längs der Axen ausführen lässt; in diesem Falle gehen dann die eine oder beide Flächen in allgemeine Schraubenregelflächen über, wobei die Punkte kürzester Distanz der Erzeugenden von der Axe Schraubenlinien von veränderlichem Radius und veränderlicher Steigung beschreiben und der Richtungskegel kein Umdrehungskegel mehr ist. Zwei solchermaßen gestaltete Flächen sind dann wieder befähigt, ohne Gleiten zu rollen.

Die Aufgabe, durch gleichförmige Rotationsbewegung einer Welle eine ungleichförmige an einer zweiten Welle hervorzubringen, wird durch die Aufsuchung der entsprechenden Rollflächen kinematisch vollständig gelöst. Zur Übertragung einer bestimmten mechanischen

* Vergl. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, 1. Bd. 2. Lief. Leipzig 1886. S. 370 flg. und die dort angegebenen Litteraturnachweise.

** Vergl. Reuleaux, Theoretische Kinematik, S. 83 flg.

Arbeit der einen Welle auf die andere sind dagegen beide Grundkörper mit Zähnen zu versehen, die so zu formen sind, dass beim Gleiten entsprechender Zahnflanken aufeinander die Bewegung kontinuierlich und möglichst genau so vor sich geht, als ob eben die Flächen R_1 und R_2 der Grundkörper aufeinander rollen würden.

Die drei Arten von Flächen sollen im Folgenden nach dem nämlichen einheitlichen Gesichtspunkt behandelt werden; immerhin mit besonderem Nachdruck darauf, durch die Untersuchung gleichzeitig auch zur graphischen Darstellung der in Rede stehenden Gebilde zu gelangen.

Teil I.

A. Parallele Axen.

1.

Im Falle paralleler Axen o_1 und o_2 sind R_1 und R_2 Cylinderflächen und ihre Untersuchung beschränkt sich auf diejenige ihrer Normalschnitte. Diese Spurkurven, welche die Teilkreise der runden Räder vertreten, führen den Namen Rollkurven und sollen an Stelle der Cylinder in der Folge durch die Bezeichnung R_1 und R_2 gekennzeichnet werden.

Sollen zwei solche Rollkurven sich in ihrer gemeinschaftlichen Ebene um feste Punkte O_1 und O_2 drehen und gleichzeitig aufeinander rollen, so muss nach einem Euler'schen Theorem die Berührung derselben stets auf der Centralen $O_1 O_2$ stattfinden. Ist P der zwischen O_1 und O_2 liegende momentane Berührungspunkt beider Kurven, so wählen wir $O_1 P$ als positive Richtung einer Polaraxe x_1, ebenso $O_2 P$ als positive Richtung einer Polaraxe x_2; dann können auf o_1 und o_2 stets zwei positive Axenrichtungen z_1 und z_2 so fixiert werden, dass von ihnen aus gesehen beide Scheiben sich gleichzeitig bei Berührung von aussen in positivem Sinne drehen. Bezeichnet jetzt $2a$ die Distanz der Wellenwinkel O_1 und O_2, r_1 und φ_1 ebenso r_2 und φ_2 die Polarkoordinaten entsprechender Punkte P_1 und P_2, d. h. solcher Punkte beider Kurven, die einmal gleichzeitig durch die Centrale gehen, ϑ_1 und ϑ_2 die in positivem Sinn gemessenen Winkel der Radienvektoren gegen ihre Tangenten, so wird bei gleichzeitiger Rotation beider Kurven der Berührungspunkt P die Centrale $O_1 O_2$ durchlaufen und zwar eine Strecke derselben, die ganz innerhalb oder ganz ausserhalb, oder zum Teil innerhalb und zum Teil ausserhalb der begrenzten Strecke $O_1 O_2$ liegt, je nachdem die Berührung beider Scheiben stets von aussen, stets von innen, oder abwechselnd von aussen und innen erfolgt.

Bezeichnet man ferner zwei um O_1 und O_2 beschriebene Kreise, die sich auf der Centrale berühren, als ein Elementenpaar, so be-

stehen zwischen den Polarkoordinaten zweier entsprechender Punkte jedes Paares die Gleichungen:

1) $$r_1 + r_2 = 2a,$$

2) $$r_1 d\varphi_1 - r_2 d\varphi_2 = 0.$$

Die Elemente jedes Paares bilden ein Paar von Rollkurven für konstantes Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 beider Kurven; denkt man sich jetzt die Ebene derselben doppelt und über einander gelegt, so gelangt man zu den allgemeinsten Paaren von Rollkurven nach folgendem Satz:

Durchläuft ein Punkt P die Centrale $O_1 O_2$ nach einem willkürlichen Gesetze, während die mit O_1 und O_2 fest verbundenen Ebenen sich um O_1 und O_2 gegenseitig so drehen, als ob die momentan durch P gehenden Kreise des Paares aufeinander rollen würden, so beschreibt P in beiden Ebenen zwei entsprechende Rollkurven R_1 und R_2.

Seien w_{1n} und w_{1r}, ebenso w_{2n} und w_{2r} die normal zur Centrale wirkenden resp. in diese fallenden Komponenten der Geschwindigkeiten w_1 und w_2, mit denen bei gleichzeitiger Drehung beide Kurven R_1 und R_2 durch den Punkt P laufen, so ist:

$$w_{1n} = r_1 \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad w_{2n} = r_2 \frac{d\varphi_2}{dt},$$

$$w_{1r} = \frac{dr_1}{dt}, \qquad w_{2r} = \frac{dr_2}{dt},$$

also nach den Gleichungen 1) und 2):

$$w_{1n} - w_{2n} = 0,$$

$$w_{1r} + w_{2r} = 0,$$

somit

$$\frac{w_{1n}}{w_{1r}} + \frac{w_{2n}}{w_{2r}} = \operatorname{tg} \vartheta_1 + \operatorname{tg} \vartheta_2 = 0,$$

d. h.:

3) $$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \pi.$$

Ferner folgt:

$$w_{1n}^2 + w_{1r}^2 = w_{2n}^2 + w_{2r}^2,$$

d. h.:

4) $$ds_1 = ds_2.$$

Nach 3) berühren sich also R_1 und R_2 in P, nach 4) rollen sie bei der Drehung um O_1 und O_2 aufeinander, folglich genügen die Bedingungsgleichungen 1) und 2), um zwei Kurven als zusammengehörige Rollkurven zu charakterisieren.

Um nun von der angegebenen mechanischen Erzeugungsweise zu einer konstruktiven zu gelangen, denken wir uns zwei Rollkurven mit Berührung von aussen in richtiger Lage. In diesen Kurven entspricht dann der Folge von Radien $a_1, b_1, c_1 \ldots$ der ersten in ganz bestimmter Weise die Folge von Radien $a_2, b_2, c_2 \ldots$ der zweiten; denkt man sich nun die Kurven weg und bringt das zweite Radiensystem derart an

den Punkt O_1, dass die positiven Axen x_2, y_2, z_2 mit den positiven Axen x_1, y_1, z_1 zusammenfallen, so haben wir am Punkte O_1 zwei vereinigte Büschel von gleichem oder entgegengesetztem Drehungssinn, je nachdem Berührung von aussen oder innen vorausgesetzt wird. Um die gegenseitige Abhängigkeit entsprechender Strahlen zu veranschaulichen, bringe man beide Büschel mit einem beliebigen um O_1 beschriebenen Kreise D zum Schnitt, so erhält man auf diesem zwei Punktreihen $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $A_2 B_2 C_2 \ldots$ Verbindet man jetzt entsprechende Punkte durch geradlinige Sehnen, so umhüllt die Gesamtheit derselben eine bestimmte Kurve F und umgekehrt vermittelt jede Kurve F die geometrische Abhängigkeit zweier Strahlsysteme am Punkte O_1.

Bezeichnet aber $A_1' A_2'$ die zu $A_1 A_2$ unendlich benachbarte Sehne, welche ihr also in ihrem Berührungspunkt mit der Enveloppe F begegnet und sind φ_1 und φ_2 die Polarwinkel der Radien $O_1 A_1$ und $O_1 A_2$ gegen eine beliebige Polaraxe x, so besteht beim Kreis bekanntlich die Proportion:

$$\frac{A_1 F}{A_2 F} = \frac{A_1 A_1'}{A_2 A_2'} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}.$$

Teilt man daher die Radien $O_1 A_1$ und $O_1 A_2$ je durch einen Punkt P_1 und P_2 im umgekehrten Verhältnis der Tangentenabschnitte $A_1 F$ und $A_2 F$, indem man $P_1 F$ parallel $O_1 A_2$ und $P_2 F$ parallel $O_1 A_1$ zieht, so ist zunächst für die Radienvektoren r_1 und r_2 der Punkte P_1 und P_2 die Bedingung 2) erfüllt:

$$r_1 d\varphi_1 - r_2 d\varphi_2 = 0.$$

Da jetzt nach Gleichung 1):

$$r_1 + r_2 = 2a$$

sein soll, so hat man dem um O_1 beschriebenen Kreis D den Radius $2a$ zu erteilen. Man gelangt somit zu folgendem Ergebnis:

Ist F eine vollkommen willkürliche Kurve, die in der Ebene eines Kreises D liegt, so bringe man die Tangente irgend eines ihrer Punkte F in A_1 und A_2 mit D zum Schnitt und ziehe $P_1 F$ parallel zum Radius $O_1 A_2$, $P_2 F$ parallel zum Radius $O_1 A_1$. Durchläuft jetzt F die ganze Kurve F, so beschreiben die Punkte P_1 und P_2 entsprechende Rollkurven für O_1 als Drehpunkt und den Radius des Kreises D als Centraldistanz.

Den Kreis D bezeichnen wir fortan als Distanzkreis, die Kurve F als Teilungskurve der Rollkurven R.

2.

Zum Zwecke einer genaueren graphischen Darstellung der Kurven R_1 und R_2 soll jetzt die Konstruktion der Tangente und des Krümmungsradius in den Punkten P_1 und P_2 abgeleitet werden. Sind die Radiensysteme an den Punkt O gebracht, so bezeichne in Fig. 1 (Taf. I) u den Winkel der Normalen n der Teilungskurve gegen die Polaraxe, $2v$ den

Winkel, unter dem die Sehne A_2A_1 von O aus gesehen wird. Ferner seien $\omega_1, \varkappa_1; \omega_2, \varkappa_2; \omega_0, \varkappa_0$ Winkelgeschwindigkeiten und -Beschleunigungen der Radien OA_1, OA_2 und der Normalen n, so ist zunächst:

$$2u = \varphi_1 + \varphi_2, \quad 2v = \varphi_1 - \varphi_2;$$

also:

$$2\omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \quad 2\varkappa_0 = \varkappa_1 + \varkappa_2.$$

Ist nun A der Mittelpunkt der Tangente A_1A_2, so nehmen wir ihn zum Anfangspunkt eines Koordinatensystems, dessen positive Axe x' von A nach A_1, dessen positive Axe y' von A nach O gerichtet ist. Bezeichnen nun zur Abkürzung die absoluten Längen folgender fünf Strecken mit Buchstaben, nämlich:

$$A_1F = n, \quad A_2F = m, \quad A_2A_1 = 2s, \quad AF = e, \quad AO = f,$$

so erhält jede dieser Strecken durch ihre Bezeichnung zugleich bestimmtes Vorzeichen. Die Tangente A_1A_2 kann nun auf unendlich viele Arten längs der Kurve F bewegt werden, da aber die Bewegungsrichtung der Punkte P_1 und P_2 von dem Bewegungsgesetz der Tangente A_1A_2 durchaus unabhängig sein muss, so kann zur Fixierung bestimmter Verhältnisse die Annahme:

$$\omega_1 = \frac{n}{2a}, \quad \omega_2 = \frac{m}{2a};$$

also:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{m}, \quad \omega_0 = \frac{s}{2a} = \sin v$$

gemacht werden, nach welcher somit die Winkelgeschwindigkeit der Tangente A_1A_2 ihrer Länge proportional ist.

Auf dem Distanzkreis bewegen sich infolgedessen die Punkte A_1 und A_2 mit den Geschwindigkeiten:

$$W_1 = 2a\omega_1 = n, \quad W_2 = 2a\omega_2 = m.$$

Es sei ferner K der Krümmungsmittelpunkt der Teilungskurve für den Punkt F, Q_1 und Q_2 seien die Schnittpunkte der Normalen n mit OA_1 und OA_2, dann wird für eine unendlich kleine Drehung der Tangente A_1A_2 um den Punkt K in positivem Sinne die Strecke n wachsen, falls K auf der begrenzten Strecke FQ_1 liegt; dagegen die Strecke m wird wachsen, so lange K auf der unbegrenzten Strecke FQ_2 postiert wird. Wenn daher mit P_1 und P_2 die tangentialen Beschleunigungen der Punkte A_1 und A_2 bezeichnet werden, so ist:

$$P_1 = 2a\varkappa_1 = \frac{dFA_1}{du} \cdot \frac{du}{dt} = KQ_1 \sin v = KL_1,$$

$$P_2 = 2a\varkappa_2 = \frac{dA_2F}{du} \cdot \frac{du}{dt} = -KQ_2 \sin v = KL_2,$$

wenn L_1 und L_2 die Fusspunkte der Lote von K auf die Raiend OA_1 und OA_2 bedeuten.*

* Vergl. Mannheim: Géométrie Cinématique, S. 44 flg. Paris 1894.

Es ist daher

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\pi_1}{\pi_2} = -\frac{KQ_1}{KQ_2},$$

d. h. P_1 und P_2 haben gleiches und zwar positives Vorzeichen nur so lange K auf der begrenzten Strecke $Q_1 Q_2$ liegt.

Bewegt sich demnach die Tangente $A_1 A_2$ längs der Teilungskurve mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0, welche ihrer Länge proportional ist, so sind die tangentialen Geschwindigkeiten, mit denen ihre Endpunkte auf dem Distanzkreis gleiten, gleich den vom Berührungspunkt gebildeten Abschnitten der Tangente und ihre tangentialen Beschleunigungen der Grösse und dem Sinne nach gleich den Entfernungen des Krümmungsmittelpunktes der Teilungskurve von ihren Radien.

Bedeuten jetzt wieder w_{1n}, w_{1r} und w_{2n}, w_{2r} die normalen und radialen Komponenten der Geschwindigkeiten w_1 und w_2 der Punkte P_1 und P_2, so folgt aus der Gleichung:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{m}{n},$$

$$r_1 = 2a\,\frac{m}{m+n} = 2a\,\frac{\omega_2}{\omega_0},$$

$$r_2 = 2a\,\frac{n}{m+n} = 2a\,\frac{\omega_1}{\omega_0};$$

also:

$$w_{1n} = r_1\omega_1 = \frac{m \cdot n}{n+m} = \frac{W_1 \cdot W_2}{W_1 + W_2} = P_1 F_1;$$

und da

$$r_1\omega_1 - r_2\omega_2 = 0,$$

$$w_{1n} = w_{2n}.$$

Die doppelten normalen Geschwindigkeitskomponenten der Punkte P_1 und P_2 sind also gleich dem harmonischen Mittel aus den Geschwindigkeiten der Punkte A_1 und A_2 und gleich ihren parallel zur Tangente der Teilungskurve gemessenen doppelten Entfernungen vom Berührungsradius OF.

Aus den oben stehenden Werten von r_1 und r_2 ergeben sich nun auch die radialen Komponenten, nämlich:

$$w_{1r} = \frac{dr_1}{dt} = \frac{a}{2}\;\frac{\omega_1\pi_2 - \omega_2\pi_1}{\omega_0^{\,2}},$$

$$w_{2r} = \frac{dr_2}{dt} = \frac{a}{2}\;\frac{\omega_2\pi_1 - \omega_1\pi_2}{\omega_0^{\,2}};$$

d. h.:

$$w_{1r} + w_{2r} = 0.$$

Um diese Ausdrücke zu konstruieren, beachte man, dass

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{m}; \quad \frac{\pi_1}{\pi_2} = -\frac{KQ_1}{KQ_2}; \quad 2\omega_0 = \frac{n+m}{2a}$$

ist, so wird:

$$w_{1r} = -\frac{1}{2}\,\frac{mKQ_1 + nKQ_2}{n+m} = \frac{1}{2}\,GK = -w_{2r}.$$

Aus der Definitionsgleichung dieser Strecke GK geht aber hervor, dass in allen Fällen der Punkt G der vierte harmonische zum Punkte F in Bezug auf das Punktepaar $Q_1 Q_2$ ist und daher gefunden wird, indem man OG parallel zur Sehne $P_1 P_2$ zieht.

Fällt K mit G zusammen, so sind die radialen Geschwindigkeitskomponenten der Punkte P_1 und P_2 gleich Null, d.h. diese bewegen sich momentan auf Kreisen um den Punkt O. Es ist daher G derjenige Punkt der Ebene, um welchen die Sehne $A_1 A_2$ gedreht werden muss, wenn das Verhältnis ihrer Abschnitte d.h. auch das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 sich momentan nicht ändern soll. Mit der Bezeichnung Geschwindigkeitscentrum für den Punkt G ergiebt sich demnach für die Punkte P_1 und P_2:

Die doppelten radialen Geschwindigkeitskomponenten der Punkte P_1 und P_2 sind gleich der Entfernung des Geschwindigkeitscentrums G vom Krümmungsmittelpunkt der Teilungskurve.

Ist demnach die Teilungskurve F sowie ihre Evolute E gegeben, so können für jedes Punktepaar der Rollkurven die Tangenten durch Abstechen zweier Strecken angegeben werden. Es ist aber leicht einzusehen, dass diese Konstruktion, die zunächst kinematisch begründet ist, auch eine geometrische Bedeutung hat.

Es ist nämlich:

$$w_{1n} = \frac{n\cdot m}{n+m} = \frac{FQ_1\cdot FQ_2}{FQ_1 + FQ_2}\,\mathrm{tg}\,v = \frac{1}{2}\,FG\cdot \mathrm{tg}\,v,$$

$$w_{1r} = -\frac{1}{2}\,KG,$$

somit

$$\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta_1}{\mathrm{tg}\,v} = -\frac{FG}{KG}.$$

Fällt daher K mit F zusammen, so ist $\vartheta_1 = \pi - v$, d.h. wenn die Kurve F eine Spitze besitzt, so steht die Tangente der Rollkurve zur Rückkehrtangente normal. Fällt K mit G zusammen, so ist $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$, d.h. die Tangente steht zum Radius r_1 normal; fällt endlich K mit dem unendlich fernen Punkt U von n zusammen, so ist $\vartheta_1 = 0$, d.h. wenn die Teilungskurve eine Wendestelle besitzt, der ein unendlich grosser Krümmungsradius zukommt, so geht die Tangente der Rollkurve durch den Punkt O. Bezeichnet man daher die den Punkten G, U, F, K entsprechenden Tangenten von R_1 mit g, u, f, k, so sagt obige Gleichung nichts anderes aus als die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(gufk) = (GUFK).$$

Es ist also die Reihe der Krümmungsmittelpunkte K auf der Normalen n projektiv zum Büschel der Tangenten am Punkte P_1.

Die Konstruktion der Geschwindigkeit w_1 ist daher nichts anderes als die einfachste Konstruktion dieser Projektivität.

Soll endlich die Linie FP_1 gerade die Tangente der Kurve R_1 in P_1 sein, so bleibt bei einer unendlich kleinen Verschiebung des Punktes F der Inhalt des Parallelogrammes FP_1OP_2 ungeändert. Es ist dann $\vartheta_1 = \pi - 2v$, oder falls man

$$KG = FG - \varrho$$

setzt, wo ϱ den Krümmungsradius von F bedeutet:

$$\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2 v} = \frac{1}{1-\frac{\varrho}{FG}},$$

oder

$$\varrho = \frac{\frac{1}{2}FG}{\cos^2 v}.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die Teilungskurve im Punkte F von derjenigen Ellipse oskuliert wird, welche OF zum Durchmesser und P_1P_2 zu Brennpunkten hat.

Wird also ein Parallelogramm OP_1FP_2 derart um die feste Ecke O gedreht, dass Inhalt und Umfang $2a$ konstant bleiben, indessen die Ecken P_1 und P_2 Kurven von gleicher Bogenlänge beschreiben, so sind die Bahnen derselben Ort der Brennpunkte aller Ellipsen von der konstanten Hauptaxe $2a$, welche mit dem Parallelogramm konzentrisch bleiben und fortgesetzt die Bahn der Ecke F oskulieren.

Soll nun im weiteren in dem Punkte P_1 der Kurve R_1 der Krümmungsradius ϱ_1 konstruiert werden, so ist dazu die Kenntnis von vier aufeinanderfolgenden Tangenten der Kurve F, d. h. die Angabe des zweiten Krümmungsmittelpunktes K' erforderlich. Bezeichnet man dann die daraus entspringende Beschleunigung, mit welcher sich P_1 auf dem Radius OA_1 bewegt, durch p_{1r}, so ergiebt sich die Beschleunigung des Punktes P_1 nach dem Coriolis'schen Satze* wie folgt:

Bezeichnet p_{1k} die Beschleunigung des momentan mit P_1 zusammenfallenden Punktes der Geraden OA_1, so ist die Beschleunigung p_1, mit der sich der Punkt P_1 auf seiner Bahn R_1 bewegt, gleich der geometrischen Summe der Beschleunigungen p_{1k} und p_{1r}, vermehrt um die Zusatzbeschleunigung $p_{1z} = 2w_{1r}\omega_1$, die senkrecht zur Geraden OA_1 steht und mit der um einen rechten Winkel im Sinne von ω_1 gedrehten Geschwindigkeit w_{1r} gleich gerichtet ist.

Um zunächst die Beschleunigung p_{1r} zu finden, bezeichne man (Fig. 1 Taf. I) mit G' den Schnittpunkt der Normalen n'' der vom Punkte G

* Vergl. Burmester a. a. O. Bd. I Lief 3, S. 776.

beschriebenen Kurve G mit der Normalen n' der Evolute E im Punkte K. Um die Lage dieses Punktes G' zu bestimmen, beachte man, dass

$$KG' = \frac{dFG}{du}.$$

Es ist aber

$$FG = 2\frac{FQ_1 \cdot FQ_2}{FQ_1 + FQ_2} = \frac{2}{a} r_1 \cdot r_2 \cos v \cdot = \frac{f \cdot r_1 \cdot r_2}{a^2}.$$

Da aber A die Fusspunktskurve von F beschreibt, so ist:

$$\frac{df}{du} = -e;$$

$$\frac{1}{a}\,\frac{d(r_1 r_2)}{du} = \frac{r_2 - r_1}{\frac{A_1 A_2}{2}} \cdot GK$$

und daher

$$\frac{dFG}{du} = \frac{e}{f} GF + \frac{Q_1 Q_2}{\frac{A_1 A_2}{2}} GK.$$

Also

$$KG' = GG_0 + G_0' G'.$$

Die erste Strecke wird der Grösse und Richtung nach erhalten, indem man durch G die Parallele zu $A_1 A_2$ zieht und mit OF in G_0 zum Schnitt bringt. Die zweite Strecke hat das Vorzeichen von GK, sie ist mit GK proportional, d. h. die Gerade $G_0 G'$ hat eine von der Lage von K unabhängige Richtung, die sich leicht konstruieren lässt, indem man $AQ = Q_1 Q_2$ macht und aus G_0 auf $A_1 Q$ das Lot fällt.

Ist nun G' gefunden, so folgt aus der Gleichung

$$w_{1r} = \frac{1}{2} GK:$$

$$p_{1r} = \frac{1}{2} G' K' \sin v.$$

Fällt K' mit G' zusammen, so ist $p_{1r} = 0$, d. h. G' ist derjenige Punkt, um welchen die Normale n gedreht werden muss, falls die Geschwindigkeitskomponenten w_{1r} und w_{2r} sich momentan nicht ändern sollen. Man kann daher G' das Beschleunigungscentrum nennen.

Das Vorzeichen der Strecke KG' ergiebt sich jedesmal aus der Figur, nämlich als positiv oder negativ bezüglich n' je nachdem FG zunimmt oder abnimmt; ist sodann auf der Normalen n' der Evolute E der Krümmungsmittelpunkt K' gegeben und liegt er wie in Fig. 1 (Taf. I) mit K auf der entgegengesetzten Seite von G', so ist $G'K'$ eine positive Strecke, d. h. p_{1r} eine positive Beschleunigung; liegt K' mit K auf der gleichen Seite von G', so ist $G'K'$ eine negative Strecke, also p_{1r} eine negative Beschleunigung. Aus dem Vorstehenden ergiebt sich daher:

Die doppelten radialen Beschleunigungskomponenten der Punkte P_1 und P_2 sind gleich den Projektionen der Entfernung des Beschleunigungscentrums G' vom zweiten Krümmungsmittelpunkt K' auf die Radien OA_1 und OA_2.

Zur Bestimmung der Beschleunigung p_{1k} betrachten wir jetzt den momentan mit P_1 zusammenfallenden Punkt der Geraden OA_1, so bewegt sich dieser auf einem mit D konzentrischen Kreise K mit der tangentialen und radialen Beschleunigung:

$$P_1 K_{1n} = K L_1 \cdot \frac{r_1}{2a}, \quad P_1 K_{1r} = r_1 \omega_1^2,$$

welche sofort angegeben werden können. Ferner ergiebt sich als Zusatzbeschleunigung:

$$p_{1z} = 2 w_{1r} \cdot \omega_1 = 2 r_1 \omega_1^2 \cdot \frac{w_{1r}}{w_{1n}} = 2 P_1 K_{1r} \cdot \operatorname{tg} \vartheta_1 = 2 K_{1r} N_1.$$

Die Zusatzbeschleunigung p_{1z} ist also doppelt so gross und gleich gerichtet wie der zwischen r_1 und n_1 liegende Abschnitt der im Punkte K_{1r} auf r_1 errichteten Normalen.

Setzt man daher die beiden radialen und normalen Komponenten zusammen, so sind die Strecken $P_1 P_{1r}$ und $P_1 P_{1n}$ die Komponenten der gesuchten Beschleunigung:

$$p_1 = P_1 P.$$

Bedeutet endlich $p_{1\varrho} = P_1 P_{1\varrho}$ die in die Richtung von n_1 fallende Komponente von p_1, so ist $\varrho_1 = P_1 K_1 = \frac{w_1^2}{p_{1\varrho}}$ der gesuchte Krümmungsradius von R_1 im Punkte P_1. Da die Komponenten von p_1 sich nach Konstruktion linear aus der Strecke GK und $G'K'$ zusammensetzen, so ergiebt sich ohne weiteres, dass der Endpunkt der Beschleunigung, also P und der zweite Krümmungsmittelpunkt K' bei unveränderter Lage der Radien sowie der Punkte F und G zwei zu einander affine Punktebenen erfüllen, sodass der Satz von Coriolis nichts anderes ist als die einfachste geometrische Ausdrucksform für die Konstruktion entsprechender Punktepaare der beiden affinen Ebenen.

Durchläuft der Punkt K die ganze Normale n, so durchläuft der Punkt G' die Gerade $G_0 G'$; fällt daher K mit G zusammen, so deckt sich G' mit G_0 und es haben daher die Kurven G und E in G eine gemeinschaftliche Normale. Man schliesst daher:

Die Kurven E und G berühren sich überall da, wo sie sich schneiden und die gemeinschaftlichen Tangenten der Berührungsstellen treffen die Kurve F in denjenigen Punkten, denen die extremen Werte der Radien r_1 und r_2 entsprechen.

Bestimmten Lagen der Krümmungsmittelpunkte K und K' werden spezielle Werte des Krümmungsradius ϱ_1 entsprechen. Soll nämlich die Komponente $p_{1\varrho}$ den Wert Null erreichen, so kann man auf der Geraden n' einen bestimmten Punkt W angeben, in welchen K' verlegt werden muss, damit dieser Umstand eintritt. Die Gesamtheit dieser Punkte W erfüllt dann eine bestimmte Kurve W, welche der zweiten Evolute E' der Teilungskurve in einer bestimmten Anzahl von Punkten begegnen wird.

Die Schnittpunkte der Kurven E' und W führen somit zu denjenigen Punkten der Teilungskurve, denen ein Wendepunkt der Kurve R_1 entspricht.

Im allgemeinen wird der entsprechende Punkt P_2 der Kurve R_2 kein Wendepunkt sein, vielmehr entspringen die Wendepunkte dieser Kurve aus einer zweiten Kurve W, die in analoger Weise entsteht.

Der Krümmungsradius ϱ_1 nimmt dagegen den Wert Null an, sobald der Punkt K' ins Unendliche rückt, ohne dass gleichzeitig auch K sich im Unendlichen befindet. Man schliesst daraus:

Hat die Kurve F in F eine Spitze zweiter Art, oder einen Wendepunkt, der zugleich auch ein Wendepunkt ihrer Evolute E ist, so haben die Kurven R_1 und R_2 in P_1 und P_2 je eine Spitze erster Art.

Da ferner die beiden Beschleunigungen p_1 und p_2 unter sich ebenfalls in projektiver Abhängigkeit sind, so bestehen auch zwischen ihren Komponenten Beziehungen, die leicht aufzustellen sind.

Projiziert man nämlich den Linienzug $P_1 K_{1r} P_{1r} P P_1$ auf die Tangente und Normale von R_1, so folgt:

$$p_{1t} = \frac{w^2_{1n}}{r_1} \cos \vartheta_1 - (2\omega_1 w_{1r} + r_1 \pi_1) \sin \vartheta_1 + p_{1r} \cos \vartheta_1,$$

$$p_{1\varrho} = \frac{w^2_{1n}}{r_1} \sin \vartheta_1 + (2\omega_1 w_{1r} + r_1 \pi_1) \cos \vartheta_1 + p_{1r} \sin \vartheta_1,$$

und analog für p_{2t} und $p_{2\varrho}$. Da aber

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \pi; \quad p_{1r} + p_{2r} = 0, \quad r_1\omega_1 - r_2\omega_2 = 0;$$

also auch

$$r_1 \pi_1 - r_2 \pi_2 + \omega_1 w_{1r} - \omega_2 w_{2r} = 0,$$

so ergiebt sich ohne weiteres:

$$p_{1t} - p_{2t} = 0$$

und

$$p_{1\varrho} + p_{2\varrho} = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) w_1^2 \sin \vartheta_1,$$

d. h.

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \sin \vartheta_1.$$

Diese ebenfalls von Euler aufgestellte Gleichung gilt für Berührung der Kurven R_1 und R_2 von aussen, für Berührung von innen sind beide positiven Zeichen durch die negativen zu ersetzen.

Nach dem Vorigen lassen sich nun die Kurven R_1 und R_2 auch dann konstruieren, wenn für jedes korrespondierende Radienpaar die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte A_1 und A_2 bekannt sind. Bewegt sich beispielsweise A_1 auf dem Kreise D gleichförmig, indessen A_2 sich so bewegen soll, dass ein Punkt A_3, der mit A_2 durch eine starre Linie verbunden ist, sich im horizontalen Durchmesser von D nach vorgeschriebenem Gesetze bewegt, so ist zu jeder Lage von A_1 diejenige von A_2 bestimmt, ebenso die Geschwindigkeiten

und Beschleunigungen dieser Punkte. Die beiden Kurven R_1 und R_2, welche die verlangte Übertragung der Bewegung hervorbringen, können daher durch Punkte und Tangenten konstruiert werden.

3.

Um die Kurven R_1 und R_2 auch durch ihre Gleichungen in Polarkoordinaten darzustellen, was insbesondere im Falle einer transcendenten Kurve F von Vorteil sein kann, hat man nach dem Vorangegangenen neben der Gleichung:

1) $$r_1 + r_2 = 2a$$

noch eine endliche Gleichung zwischen den Winkeln φ_1 und φ_2:

2) $$\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = 0$$

als gegeben anzunehmen und mittelst der Bedingungsgleichung:

3) $$r_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} + r_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} = 0,$$

aus diesen drei Gleichungen entweder r_1 und φ_1 oder r_2 und φ_2 zu eliminieren. Setzt man nun

$$\varphi_1 = u + v, \quad \varphi_2 = u - v,$$

so geht die Gleichung 2) über in eine Gleichung:

$$F(u, v) = 0,$$

in welcher man jetzt u und v als Koordinaten der Teilungskurve F auffassen kann. Ist zunächst F durch eine Gleichung in den rechtwinkligen Linienkoordinaten u_1 und v_1 gegeben, so findet man ihre neue Gleichung in den Koordinaten u und v durch die Substitutionen:

$$u_1 = -\frac{1}{2a} \frac{\cos u}{\cos v}$$

und

$$v_1 = -\frac{1}{2a} \frac{\sin u}{\cos v}.$$

Ist dagegen F durch polare Linienkoordinaten r und u ausgedrückt, so genügt es

$$r = 2a \cos v$$

zu setzen, um die Gleichung in den Koordinaten u und v zu erhalten. So findet man z. B. aus der Gleichung des Punktes, der im Abstande $2b$ vom Anfangspunkt auf der Polaraxe x liegt:

$$2bu_1 + 1 = 0$$

$$a \cos v - b \cos u = 0$$

als Gleichung desselben in den Koordinaten u und v.

Wird jetzt um diesen Punkt ein Kreis vom Radius $2r_0$ beschrieben, so hat seine Gleichung in Linienkoordinaten die Form:

$$(2bu_1 + 1)^2 - 4r_0^2(u_1^2 + v_1^2) = 0.$$

Durch obige Substitutionen geht sie über in die Gleichung:

$$a \cos v - b \cos u \mp r_0 = 0,$$

je nachdem als Ausgangslage die eine oder andere derjenigen beiden Tangenten des Kreises gewählt wird, welche auf der Polaraxe normal stehen. Will man dagegen umgekehrt von den Koordinaten u und v zu rechtwinkligen Linienkoordinaten übergehen, so hat man:

$$\cos u = -\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}},$$

$$\cos v = +\frac{1}{2a\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}$$

zu substituieren.

Da nun im weiteren:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 1 + \frac{dv}{du},$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_0} = 1 - \frac{dv}{du},$$

so wird nun:

4) $$\begin{cases} r_1 = a\left(1 - \frac{dv}{du}\right), \\ \varphi_1 = u + v, \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} r_2 = a\left(1 + \frac{dv}{du}\right); \\ \varphi_2 = u - v. \end{cases}$$

Dazu

6) $$F(u, v) = 0.$$

Eliminiert man daher aus den Gleichungen 4) und 6) resp. 5) und 6) die Parameter u und v, so sind die Resultanten der Elimination allemal die Gleichungen zweier entsprechender Rollkurven.

Im allgemeinen wird man durch beide Eliminationen dieselbe Gleichung in Polarkoordinaten finden, d. h. R_1 und R_2 sind im allgemeinen Teile ein und derselben Kurve R. Ist F eine algebraische Kurve, so ist es auch die Kurve R, deren Ordnung sich leicht bestimmen lässt.

Sei ν die Ordnung und μ die Klasse von F, so existieren zunächst zwischen F und D 2ν gemeinschaftliche Schnittpunkte S, wobei jedesmal der eine der beiden Punkte P nach O, der andere nach S fällt, d. h.:

1. Der Punkt O ist im allgemeinen ein 2ν-facher Punkt von R.

Findet dagegen im Schnittpunkt S zugleich Berührung zwischen F und D statt, so sondert sich die Gerade OS zweimal aus. Es ergiebt sich daher:

2. Jede einfache Berührung zwischen F und D reduziert die Ordnung der Kurve R um zwei Einheiten.

Jeder Strahl durch O trifft ferner D in zwei Punkten, von welchen aus je μ Tangenten an F gelegt werden können. Es liegen also auf jedem Strahl durch O noch 2μ weitere Punkte der Kurve R, d. h.:

3. Die Ordnung der Kurve R ist $n = 2(\nu + \mu)$.

Fällt dagegen einer der Punkte S in einen der Kreispunkte J und J_1 im Unendlichen, so wird die Konstruktion des Punktes P auf OS unbestimmt, d. h.:

4. Jedesmal wenn die Kurve F durch die Kreispunkte geht, reduziert sich die Ordnung von R wieder um zwei Einheiten.

Die Kurven F und D haben ferner 2μ gemeinschaftliche Tangenten; berühren sich F und D selber nicht, so fallen die beiden Punkte P ins Unendliche. Daraus folgt:

5. Von O aus gehen im allgemeinen 2μ Asymptotenrichtungen der Kurve R nach den auf D liegenden Berührungspunkten der gemeinsamen Tangenten der Kurven F und D.

Ein unendlich ferner Punkt von R kann aber noch in anderer Weise entstehen. F selbst hat ν Asymptoten, welche D in ν Punktepaaren treffen, deren Radien der Kurve R auf der unendlich fernen Geraden begegnen. Wir schliessen daraus:

6. Die Geraden von O nach den Schnittpunkten des Distanzkreises mit den Asymptoten der Teilungskurve sind 2ν weitere Asymptotenrichtungen der Kurve R.

Damit sind die $2n$ unendlich fernen Punkte von R aufgezählt. Legt man nun insbesondere aus den Kreispunkten J und J_1 die Tangenten an die Kurve F, welche sich paarweise in den Brennpunkten derselben begegnen, so sind die Geraden OJ und OJ_1 die Asymptoten des Distanzkreises und es fallen daher die aus den vorigen Tangenten entspringenden Schnittpunkte dieser Strahlen mit R paarweise zusammen. OJ und OJ_1 sind daher μ-fache Tangenten von R, mit anderen Worten:

7. Der Punkt O ist im allgemeinen ein μ-facher Brennpunkt von R.

Die angegebenen Anzahlen können Modifikationen erleiden, falls die Kurve F zum Kreise D entweder im Endlichen oder in den Kreispunkten in besonderer Beziehung steht; es kann R auch eine zirkulare Kurve werden, falls F die unendlich ferne Gerade berührt.

Schliessen wir im Folgenden besondere Lagen zwischen F und D, sowie Wendepunkte der Teilungskurve, d. h. retrograde Bewegungen beider Rollkurven aus, so wird man sagen können:

Aus jeder ganz innerhalb des Kreises D liegenden, geschlossenen Kurve F entspringen zwei Kurven R_1 und R_2 für Berührung von aussen. Ist F nach aussen stetig konvex und besitzt F zudem eine durch O gehende Symmetrieaxe, so sind R_1 und R_2 geschlossene, zu

dieser Axe symmetrisch liegende Ovale. Da aber R_2 mit seiner Ebene umgewendet werden muss, so sind nach der Umwendung R_1 und R_2 kongruente Kurven.

Ist dagegen F nach aussen stetig konkav, so muss F eine bestimmte Anzahl von Rückkehrtangenten besitzen. Durchläuft nun die Tangente einmal die ganze Kurve F, so hat sie sich um eine gerade oder ungerade Anzahl von zwei rechten Winkeln gedreht, je nachdem die Anzahl der Rückkehrtangenten gerade oder ungerade ist. Im ersten Falle sind R_1 und R_2 zwei getrennte geschlossene Kurven, im zweiten Falle setzen sich R_1 und R_2 zu einer einzigen geschlossenen Kurve zusammen, und wenn die Tangente A_1A_2 die Kurve F zum zweiten Mal durchläuft, so beschreibt P_1 den Teil R_2 und P_2 den Teil R_1. Die Kurven R_1 und R_2 sind also in Deckung, d. h. nach der Umwendung von R_2 sind R_1 und R_2 symmetrisch gleich. Es ergiebt sich daher:

Jede ganz im Innern von D liegende nach aussen konvexe geschlossene Linie F mit orthogonaler Symmetrieaxe durch O führt auf zwei getrennte kongruente Rollkurven; jede nach aussen konkave Kurve F mit ungerader Anzahl von Spitzen ergiebt symmetrisch gleiche Rollkurven.

Liegt F ganz ausserhalb von D, so werden die Kurven R sich im allgemeinen ins Unendliche erstrecken, es sei denn, dass F und D keine gemeinschaftlichen reellen Tangenten haben. Dieser letztere Fall tritt ein, wenn F nach aussen stetig konkav ist und zwischen zwei aufeinander folgenden Spitzen den Kreis D berührt. Da in diesem Falle die Differenz der Radienvektoren r_1 und r_2 konstant ist, so rollen R_1 und R_2 bei Berührung von Innen.

In dem Falle, wo F teils innerhalb teils ausserhalb von D liegt, bilden R_1 und R_2 einen zusammenhängenden Linienzug, der befähigt ist mit sich selbst zu rollen, teils für innere teils äussere Berührung. Im allgemeinen werden die Kurven R keine vollständigen Umdrehungen ausführen, sondern einander nur innerhalb bestimmter Winkelräume treiben können, welche durch die nach den unendlich fernen Punkten laufenden Radien begrenzt sind, in welchen die Teile R_1 und R_2 zusammenhängen. Neben diesem reellen können noch imaginäre Bestandteile auftreten, herrührend von denjenigen Teilen von F, deren Tangenten D nicht erreichen, ja die ganze Kurve R kann imaginär werden, ohne dadurch in ihrer Existenz aufzuhören.

Es ist ferner evident, dass jedes Rollkurvenpaar aus unendlich vielen Teilungskurven F abgeleitet werden kann, die alle aus der ursprünglichen dadurch hervorgehen, dass das eine der beiden Radiensysteme um den Punkt O um einen beliebigen Winkel vor- oder rückwärts gedreht wird.

Teilt man ferner die vom Schnittpunkt A_0 der Polaraxe mit dem Kreise D gemessenen Bogen A_0A_1 und A_0A_2 jeder Tangente von F

stets im gleichen konstanten Verhältnis, so entsteht eine neue Enveloppe F′, deren Tangenten vom Berührungspunkt im gleichen Verhältnis geteilt werden, wie diejenigen der Kurve F. Die aus zwei entsprechenden Tangenten der Kurven F und F′ hervorgehenden Punktepaare $P_1 P_2$ und $P_1' P_2'$ haben daher gleiche Radienvektoren, aber verschiedene Polarwinkel, mit anderen Worten:

Ersetzt man in den Polargleichungen zweier Rollkurven die Polarwinkel φ_1 und φ_2 durch $n\varphi_1$ und $n\varphi_2$, so erhält man jedesmal eine Gruppe unendlich vieler neuer Rollkurvenpaare.

Will man nun auch die Abweichung ϑ_1 der Tangente gegen den Radiusvektor, sowie den Krümmungsradius ϱ_1 im Punkte P_1 der Kurve R_1 durch Rechnung finden, so beachte man, dass

$$w_{1n} = r_1 \omega_1 = a\left[1 - \left(\frac{dv}{du}\right)^2\right]\omega_0,$$

$$w_{1r} = -a\frac{d^2v}{du^2}\cdot\omega_0,$$

sodass, wenn die aufeinander folgenden Ableitungen von v nach u mit v', v'', v''' bezeichnet werden,

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{w_{1n}}{w_{1r}} = \frac{1-v'^2}{-v''} = -\operatorname{tg}\vartheta_2$$

erhalten wird.

Aus dieser Gleichung folgt jetzt:

$$\frac{d\vartheta_1}{du} = \frac{(1-v'^2)v''' + 2v'v''^2}{(1-v'^2)^2 + v''^2}$$

und somit für den Krümmungsradius ϱ_1:

$$\varrho_1 = \frac{\frac{ds}{du}}{\frac{d\varphi_1}{du} + \frac{d\vartheta_1}{du}} = \frac{\left(\frac{ds}{du}\right)^3}{N}$$

wobei

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = (1-v'^2)^2 + v''^2,$$

$$N = (1-v'^2)[(1-v'^2)(1+v') + v'''] + (1+3v')v''^2$$

zu setzen ist.

Ersetzt man in diesem Ausdruck für ϱ_1 den Winkel v durch $-v$, so geht φ_1 in φ_2, ϑ_1 in ϑ_2 und daher ϱ_1 in ϱ_2 über.

Schliesst also beispielsweise die Tangente der Kurve R_1 gegen die Tangente der Teilungskurve den konstanten Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ein, so ist:

$$\vartheta_1 = \pi - (v - \alpha), \quad \vartheta_2 = (v - \alpha);$$

also:

$$\varphi_1 + \vartheta_1 = \pi + (u + \alpha), \quad \varphi_2 + \vartheta_2 = u - \alpha;$$

d. h. es ist dann auch

$$\varrho_1 = \varrho_2.$$

Zur Bestimmung der Teilungskurve hat man die Gleichung:

$$\frac{v''}{v'^2-1} = -\operatorname{cotg}(v-\alpha),$$

woraus sich als Gleichung der Kurve F ergiebt:

$$\cos(u-u_0) = \frac{a}{c}\cos(v-\alpha).$$

Es wird sich zeigen, dass dies die Gleichung eines Kegelschnittes ist, der D doppelt berührt, indessen R_1 und R_2 kongruente Kegelschnitte sind, die O zum gemeinschaftlichen Brennpunkt haben.

Ein Wendepunkt der Kurve R_1 entsteht nun, wenn N verschwindet. Diese Gleichung

$$N = 0$$

stellt in den Koordinaten u und v eine neue Enveloppe N dar, welche die Kurve W zur zweiten Evolute besitzt. Den Schnittpunkten der Kurven E' und W korrespondieren dann die gemeinsamen Tangenten der Kurven F und N, welche somit zu den Wendepunkten der Kurve R_1 führen.

Verschwindet die Gleichung $N = 0$ identisch, so fällt die Kurve N mit der Kurve F zusammen und jeder Punkt von R_1 ist ein Wendepunkt, d. h. R_1 ist eine Gerade. In diesem Falle ist daher, falls die Polaraxe normal zur Geraden R_1 steht:

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{1-v'^2}{-v''} = \operatorname{cotg}(u+v),$$

also:

$$\frac{dv'}{v'-1} = \operatorname{tg}(u+v)\,d(u+v),$$

oder

7) $$1-v' = \frac{-k'}{\cos(u+v)}.$$

Bezeichnet also $2b$ den Abstand der Geraden R_1 von O, so ist

$$r_1 = a(1-v') = \frac{2b}{\cos\varphi_1}$$

die Gleichung von R_1, d. h. es ist

$$k' = -\frac{2b}{a}$$

zu setzen. Unter dieser Voraussetzung nimmt 7) die Form an:

$$b\cdot\frac{1+v'}{1-v'} = a\cos(u+v) - b,$$

welche Gleichung durch Integration die Gleichung der Teilungskurve F ergiebt, nämlich im Falle der äusseren Berührung:

$$\frac{e^{k(u-v)} + e^{-k(u-v)}}{2} = \frac{b\cos(u+v)-a}{b-a\cos(u+v)},$$

wo zur Abkürzung, da $b < a$,

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} = k$$

gesetzt wurde.

Setzt man in dieser Gleichung:

$$\cos(u+v) = \frac{2b}{r_1} = \frac{2b}{2a - r_2}$$

und $u - v = \varphi_2$, so erhält man die Gleichung der Rollkurve R_2:

$$r_2 = 2\frac{a^2 - b^2}{a + b\frac{e^{k\varphi_2} + e^{-k\varphi_2}}{2}}.$$

Diese Kurve, welche ganz im Endlichen liegt, besitzt in O einen doppelten Windungspunkt, sodass mit Annäherung der rotierenden Geraden R_1 an O_2 die Winkelgeschwindigkeit ω_2 unendlich gross wird. Rotiert umgekehrt R_2 mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_2 um O_2, so wird mit Annäherung der Geraden R_1 an die Axe $O_1 O_2$ die Winkelgeschwindigkeit ω_1 unendlich klein. Die Verzeichnung der Kurve geschieht am einfachsten mit Hilfe des Krümmungsradius, der sich nach der Proportion:

$$\frac{\varrho_2}{r_2} = \frac{r_1}{2a\sin\vartheta_1}$$

leicht konstruieren lässt. Wählt man nun als Kurve R_1 ein reguläres Fünfeck, welches dem Kreis vom Radius $2b$ umschrieben ist, so ist die Entfernung $O_1 O_2 = 2a$ derart zu bestimmen, dass auch R_2 eine aus fünf kongruenten Bogen bestehende Kurve ist. Der zu jedem der fünf Bogen gehörende halbe Centriwinkel hat daher den Wert $\frac{\pi}{5}$ und zur Bestimmung des Verhältnisses $\lambda = \frac{a}{b}$ dient daher die Gleichung:

$$\frac{e^{\sqrt{\lambda^2-1}\cdot\frac{\pi}{5}} + e^{-\sqrt{\lambda^2-1}\cdot\frac{\pi}{5}}}{2} - \frac{\cos\frac{\pi}{5} - \lambda}{1 - \lambda\cos\frac{\pi}{5}} = 0,$$

welche, nach bekannter Näherung aufgelöst, ergiebt, dass

$$2a = 2{,}15547\ldots 2b$$

gewählt werden muss.

Im Folgenden mögen noch einige spezielle Fälle betrachtet werden, wo die Teilungskurve F a priori durch eine Gleichung in den Koordinaten u und v gegeben ist.

Es sei:

a) $$F = v - nu = 0,$$

wo n eine beliebige Zahl bedeutet. In diesem Falle ist

$$r_1 = a(1-n), \quad r_2 = a(1+n);$$

d. h. die Kurven R_1 und R_2 sind Kreise, auf welchen sich die Punkte P_1 und P_2 mit der gleichen Geschwindigkeit

$$w_1 = w_{1n} = a(1 - n^2)$$

bewegen. Legt man nun durch die Punkte Q_1 und Q_2 den mit D konzentrischen Kreis Q, so ist sein Radius:

$$r = r_2 - r_1 = n \cdot 2a,$$

also konstant für jede Lage des Paares $Q_1 Q_2$. Dieser Kreis wird in Q_1 und Q_2 berührt von den Kreisen P_1 und P_2, welche P_1 resp. P_2 zum Mittelpunkt und r_2 resp. r_1 zum Radius haben. Beide Kreise schneiden sich im Punkte F, und da dieser Punkt sich auf den Kreisen P_1 und P_2 mit der gleichen Geschwindigkeit bewegt, mit welcher die Mittelpunkte P_1 und P_2 derselben auf den Kreisen R_1 und R_2 fortschreiten, so rollen die Kreise P_1 und P_2 gleichzeitig auf dem Kreise Q.

Es ergiebt sich somit bezüglich der Kurve F folgendes Resultat:*

Bewegen sich zwei Punkte A_1 und A_2 auf einem Kreise vom Radius $2a$ mit proportionalen Geschwindigkeiten

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1+n}{1-n},$$

so umhüllt die Sehne $A_1 A_2$ eine Epicykloide oder Hypocykloide, je nachdem n im Intervall (-1) bis $(+1)$ liegt oder nicht. Die nämliche Kurve wird auch beschrieben von einem Punkte F, der entweder einem Kreis P_1 vom Radius:

$$r_1 = a(1-n),$$

oder einem solchen P_2 vom Radius:

$$r_2 = a(1+n)$$

angehört, welcher für äussere resp. innere Berührung rollt auf einem festen Kreis Q vom Radius der Differenz:

$$r = r_2 - r_1 = 2a \cdot n.$$

Da im weiteren $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ konstant bleibt, so fällt K mit G zusammen, d. h.: G ist die Evolute E von F. Da aber der Punkt G die Strecke $Q_1 Q_2$ wieder im Verhältnis $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ teilt, während die Punkte Q_1 und Q_2 den festen Kreis Q durchlaufen, so ist auch G eine Cykloide, die gegen F um einen rechten Winkel im positiven Sinn gedreht und im Verhältnis $n:1$ verjüngt ist.

Da ferner K mit G zusammenfällt und überdies $w_{1r} = 0$ also auch $p_{1r} = 0$ ist, so liegt K' in G_0. Die Kurve G_0 ist daher die zweite Evolute E' von F, die somit mit der Originalkurve bezüglich des Punktes O ähnlich und ähnlich gelegen und im Verhältnis $n^2:1$ verjüngt ist.

Bewegen sich daher zwei Punkte A_1 und A_2 auf einem Kreise D vom Radius $2a$ mit proportionalen Geschwindigkeiten

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1+n}{1-n},$$

so wird der erste Krümmungsmittelpunkt von F vom Berührungspunkt und der zweite Krümmungsmittelpunkt vom

* Vergl. Burmester a. a. O. Bd. I, 1. Lief. S. 166 flg.

ersten durch die Radien der Punkte A_1 und A_2 harmonisch getrennt. Ist f der momentane Abstand der Tangente A_1A_2 von O, so sind

$$\varrho = f \cdot (1 - n^2) \quad \text{und} \quad \varrho' = f \cdot n(1 - n^2)$$

die Längen des ersten und zweiten Krümmungsradius.

b) Die Teilungskurve F werde gebildet von einem Strahlbüschel am Punkte F.

Da jetzt für alle Punkte P der Kurve R:

$$OP \pm PF = 2a$$

ist, so sind R_1 und R_2 zwei in Drehung befindliche Ellipsen oder Hyperbeln, je nachdem F innerhalb oder ausserhalb des Kreises D liegt. Die Sehnen P_1P_2 jedes Paares entsprechender Punkte P bilden das Durchmesserbüschel des Kegelschnittes; die Tangenten in zwei korrespondierenden Punkten P sind daher parallel, nämlich zur Tangente A_1A_2 normal. Denn da

$$FG = KG, \text{ so ist } \operatorname{tg} \vartheta_1 = -\operatorname{tg} v, \text{ also } \vartheta_1 = \pi - v.$$

Es ist daher

$$\vartheta_1 + \varphi_1 = \pi + u,$$

d. h. es ist du der Kontingenzwinkel der Kurve R und es ergiebt sich daher hier eine direkte Bestimmung des Krümmungsradius ϱ_1 ohne Kenntnis der Beschleunigung p_1, des Punktes P_1, nämlich:

$$\varrho_1 = \frac{w_1}{\sin v}.$$

Trägt man daher die Geschwindigkeit w_1 auf dem Brennstrahl P_1F von P_1 nach W_1 ab und zieht W_1K_1 normal zu P_1F_1, so trifft diese Normale die Ellipsennormale n_1 im Krümmungsmittelpunkt K_1.

Bezeichnet also n die Länge der Ellipsennormale, ε ihren Winkel gegen die Brennstrahlen P_1O und P_1F, so ist:

$$n = w_{1n} \quad \text{und} \quad \cos\varepsilon = \sin v,$$

Daher

$$n = w_1 \cdot \cos\varepsilon, \quad \text{also} \quad \varrho_1 = \frac{w_1}{\sin v} = \frac{n}{\cos^2\varepsilon}$$

der bekannte Ausdruck für den Krümmungsradius.

Verlegt man zur Ermittelung der Gleichung der Kurve R den Punkt F in den Abstand $2c$ auf die Polaraxe, so heisst in den Koordinaten u und v die Gleichung des Strahlbüschels F:

$$F = a\cos v - c\cos u = 0.$$

Somit ist

$$r_1 = a\left(1 - \frac{c\sin u}{a\sin v}\right),$$

$$r_2 = a\left(1 + \frac{c\sin u}{a\sin v}\right),$$

d. h.:

1) $$r_1 \cdot r_2 \cdot \sin^2 v = a^2\sin^2 v - c^2\sin^2 u.$$

Aus der Gleichung des Büschels folgt anderseits:

2) $$a^2 \sin^2 v - c^2 \sin^2 u = a^2 - c^2$$

und endlich ergiebt sich aus der Gleichung:

$$\varphi_1 = u + v,$$

3) $$a - c \cos \varphi_1 = r_2 \sin^2 v.$$

Multipliziert man daher die drei Gleichungen mit einander, so erhält man die Gleichung der beiden vereinigten Ellipsen R:

$$r_1 = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cos \varphi_1} = \frac{b^2}{a - c \cos \varphi_1},$$

wo a und b die Halbaxen, c die lineare Exzentrizität bedeutet.

Ist wie gewöhnlich die grosse Halbaxe a, sowie das Verhältnis der grössten zur kleinsten Winkelgeschwindigkeit gegeben und mit ω bezeichnet, so folgt aus der Gleichung:

$$\frac{a-c}{a+c} = \omega,$$

$$c = a \frac{1-\omega}{1+\omega}, \quad \text{also auch} \quad b = 2a \frac{\sqrt{\omega}}{1+\omega},$$

wonach die beiden entsprechenden Ellipsen gezeichnet werden können. Wird jetzt die Ellipse R_2 mit dem Brennpunkt F festgehalten, indessen die Ellipse R_1 mit dem Radiensystem um den Winkel 2α in positivem Sinne gedreht wird, wodurch der Brennpunkt F in die Lage F' gelangen möge, so findet man als Gleichung der neuen Kurve F':

$$F' = a \cos(v - \alpha) - c \cos(u - \alpha) = 0,$$

der wir schon früher begegnet sind. Da die Kurve F' aber jetzt ein geometrisches Erzeugungsgesetz besitzt, indem sie umhüllt wird vom einen Schenkel eines Winkels von der konstanten Öffnung α, dessen anderer Schenkel stets durch den Punkt F geht, und dessen Scheitel den Kreis D durchläuft, so ist sie nach einem Poncelet'schen Theorem eine Ellipse, welche F und F' zu Brennpunkten hat und den Kreis D doppelt berührt.

Wählt man somit als Teilungskurve eine D doppelt berührende Ellipse, so sind auch die Rollkurven R_1 und R_2 kongruente Ellipsen von der Hauptaxe $2a$, welche O zum gemeinsamen und je einen Brennpunkt von F zum anderen Brennpunkt haben.

Den Teilungskurven

$$F = a \cos nv - c \cos nu = 0$$

entspricht nun die Gruppe der Rollkurven:

$$r_1 = \frac{b^2}{a - c \cos n \varphi_1},$$

die wohl die am längsten bekannte Kurvengruppe dieser Art darstellt.

Für $n = 2$ beispielsweise hat F die Gleichung:

$$a \cos 2v - c \cos 2u = 0,$$

oder

$$(a \cos v - \sqrt{ac} \cos u)(a \cos v + \sqrt{ac} \cos u) = \frac{a(a-c)}{2},$$

welche Gleichung ausdrückt, dass das Produkt der Abstände jeder Tangente von zwei festen Punkten der Polaraxe konstant ist, d.h. dass die Kurve F eine Ellipse ist, deren Brennpunkte im Abstande

$$2\gamma = \pm 2\sqrt{ac}$$

von O auf der Polaraxe liegen. Da ihre Halbaxenquadrate

$$\alpha^2 = 2(a+c)a \quad \text{und} \quad \beta^2 = 2(a-c)a$$

sind, so hat die Ellipse F den Kreis D zum Ort rechtwinkliger Tangentenpaare. Die aus F entspringenden Kurven R_1 und R_2 sind zwei doppelt orthogonal-symmetrische Kurven vierter Ordnung, welche sich in Deckung befinden.

Für $n = \frac{1}{2}$ hat dagegen F die Gleichung:

$$a \cos \frac{v}{2} - c \cos \frac{u}{2} = 0,$$

welcher man die Form:

$$a \cos v - \frac{c^2}{a} \cos u = \frac{c^2 - a^2}{a}$$

geben kann, und welche somit einen Kreis darstellt, welcher seinen Mittelpunkt M im Abstande

$$2b = \frac{2c^2}{a}$$

von O auf der Polaraxe und den Radius:

$$2r_0 = 2\frac{a^2 - c^2}{a} = 2(a-b)$$

hat, d.h. den Kreis D berührt.

Diesem Kreis als Teilungskurve entspricht daher als Rollkurve die Kurve vierter Ordnung mit Knotenpunkt und Schleife:

$$r_1 = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cos \frac{\varphi_1}{2}} = a \frac{a-b}{a \mp \sqrt{ab} \cos \frac{\varphi_1}{2}},$$

welcher wir im folgenden Beispiel nochmals begegnen werden.

c) Die Teilungskurve F ist ein um den Punkt M beschriebener Kreis vom Radius $2r_0$, welcher ganz im Innern von D liegt.

Figur 2 (Taf. I) zeigt die konstruktive Ausführung und Zeichnung der Rollkurven durch Punkte und Tangenten mittelst der Geschwindigkeiten w_{1n} und w_{1r}. Das Gesamterzeugnis ist eine algebraische Kurve sechster Ordnung mit Doppelpunkt und Brennpunkt in O, welche aus zwei getrennten symmetrisch gleichen und geschlossenen Ovalen besteht. Dreht sich R_1 gleichförmig um den Punkt O_1, so erreicht mit

jedem Umlauf die Winkelgeschwindigkeit ω_2 ein Maximum und ein Minimum, nämlich dann, wenn der kleinste resp. grösste Radius r_2 die Centrale passiert. Um diese beiden extremen Werte von r zu finden, welche aber jetzt nicht mehr in die nämliche Richtung fallen wie bei der Ellipse, beachte man, dass in diesem Falle zwischen den Kurven G und E Berührungen stattfinden, d. h., dass G mit dem Mittelpunkt M von F zusammenfallen muss. Bezeichnet also H den Schnittpunkt der Tangente A_1A_2 mit der Centrale OM, so bilden auf dieser Tangente die Punktepaare A_1A_2 und FH eine harmonische Gruppe, mit anderen Worten, der Punkt H besitzt in Bezug auf beide Kreise F und D die nämliche Polare.

Es sind somit die gesuchten Stellen H die Grenzpunkte des durch die Kreise F und D bestimmten Kreisbüschels.

Legt man daher aus den beiden Grenzpunkten H die Tangentenpaare h_1 und h_2 an die Kurve F, so erhält man durch diese die extremen Werte der Radien r_1 oder r_2. Die beiden Punkte H sind nur so lange reell, als der Kreis F ganz innerhalb oder ganz ausserhalb von D liegt, in beiden Fällen befindet sich der eine der Punkte H ausserhalb, der andere innerhalb von F, d. h. die Kurven R_1 und R_2 haben nur einen grössten und einen kleinsten Radius, also keine Wendepunkte. Sind N_1 und M_1, ebenso N_2 und M_2 die Endpunkte dieser extremen Radien, so liegen sie in gleicher auf der Kurve gemessener Entfernung, von denjenigen Punkten J_1 und L_1 resp. J_2 und L_2, denen der Radius a zukommt, und welche den Umfang der Kurven halbieren. Dreht sich der Radius der Kurve R_1 im schraffierten Teil, so durchläuft der Radius von R_2 den entsprechenden nicht schraffierten Teil. Ist das Verhältnis der grössten zur kleinsten Winkelgeschwindigkeit und überdies der Winkel zwischen dem grössten und kleinsten Kurvenradius vorgegeben, so ist dadurch der Kreis F vollkommen bestimmt und die Kurven R_1 und R_2 können demnach verzeichnet werden.

Verlegt man den Mittelpunkt M von F in den Abstand $2b$ von O auf die Polaraxe, so heisst die Gleichung des Kreises vom Radius $2r_0$ je nachdem der Durchmesserendpunkt $2b+2r_0$ oder $2b-2r_0$ als Anfangspunkt figuriert:

$$1)\qquad F = a\cos v - b\cos u \mp r_0 = 0,$$

sodass beide Zeichen von r_0 den nämlichen Kreis darstellen. Es ist nun:

$$2)\qquad \left\{\begin{aligned} r_1 &= \frac{a\sin v - b\sin u}{\sin v},\\ r_2 &= \frac{a\sin v + b\sin u}{\sin v},\end{aligned}\right.$$

oder da nach 1) und für das obere Zeichen von r_0:

$$(a\sin v - b\sin u)(a\sin v + b\sin u) = a^2 - b^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos v,$$

$$3)\qquad r_1\cdot r_2\sin^2 v = a^2 - b^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos v.$$

Anderseits folgt aus der Gleichung:

$$\varphi_1 = u + v,$$

4) $$a - b\cos\varphi_1 - r_0\cos v = r_2\sin^2 v,$$

also durch Multiplikation von 3) und 4):

$$r_1(a - b\cos\varphi_1 - r_0\cos v) = a^2 - b^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos v,$$

d. h.:

5) $$r_2 r_0\cos v = a^2 - b^2 - r_1(a - b\cos\varphi_1) + r_0^2 = E + r_0^2.$$

Eliminiert man jetzt zwischen 4) und 5) den Parameter v, so folgt:

6) $$r_2^2\sin^2 v = r_2(a - b\cos\varphi_1) - E - r_0^2 = H - r_0^2,$$

und indem man schliesslich 5) quadriert und zu 6) addiert, die Resultante der Elimination in der Form:

$$E^2 - r_0^2 L = 0,$$

wo

$$E = a^2 - b^2 - r_1(a - b\cos\varphi_1)$$

$$L = r_2 - 2E - H = (r_1 - a - b\cos\varphi_1)^2 + b^2\sin^2\varphi_1.$$

zu setzen ist.

Diese Gleichung, welche die vereinigten Kurven R_1 und R_2 zugleich darstellt, reduziert sich für $r_0 = 0$ auf die Ellipse E, für $r_0 = \infty$ auf die rein imaginäre Linie L. Berührt speziell F den Distanzkreis für

$$\pm r_0 = a - b,$$

so sondert sich die Polaraxe zwei Mal aus und es erscheint die im vorigen Beispiel aufgestellte Gleichung der beiden vereinigten Kurven vierter Ordnung:

7) $$\left[r_1 - \frac{a^2 - ab}{a - \sqrt{ab}\cos\frac{\varphi_1}{2}}\right]\left[r_1 - \frac{a^2 - ab}{a + \sqrt{ab}\cos\frac{\varphi_1}{2}}\right] = 0.$$

Der Schar von Teilungskurven:

$$a\cos nu - b\cos nv \mp r_0 = 0$$

entpricht im weiteren die Schar der Rollkurven:

$$E_1^2 - r_0^2 L_1 = 0,$$

wo

$$E_1 = a^2 - b^2 - r_1(a - b\cos n\varphi_1),$$

$$L_1 = (r_1 - a - b\cos n\varphi_1)^2 + b^2\sin^2 n\varphi_1$$

bedeutet.

Werden also speziell die von der Polaraxe aus gemessenen Bogen A_0A_1 und A_0A_2 halbiert, so ist $n = 2$ zu setzen und die Gleichung der neuen Teilungskurve F′ ist daher

$$a\cos 2v - b\cos 2u \mp r_0 = 0$$

oder

$$(a\cos v - \sqrt{ab}\cos u)(a\cos v + \sqrt{ab}\cos u) = \frac{a}{2}(a - b \pm r_0);$$

d. h. die Schar der konzentrischen Kreise um den Punkt M transformiert sich in eine Schar konfokaler Ellipsenpaare, deren Brennpunkte im Abstande:

$$2\gamma = \pm 2\sqrt{ab}$$

von O auf der Polaraxe liegen. Jedes dieser Ellipsenpaare führt im allgemeinen auf eine Kurve R von der achten Ordnung mit vierfachem Punkt und Doppelbrennpunkt in O mit der Gleichung:

$$8)\quad \begin{cases} [a^2 - b^2 - r_1(a - b\cos 2\varphi_1)]^2 - r_0^2[(r_1 - a - b\cos 2\varphi_1)^2 \\ \qquad + b^2 \sin^2 2\varphi_1] = 0. \end{cases}$$

Speziell für $r_0 = b - a$ erhält man als Kurve F′ die beiden Brennpunkte des konfokalen Systems:

$$a\cos v - \sqrt{ab}\cos u = 0 \quad \text{und} \quad a\cos v + \sqrt{ab}\cos u = 0$$

somit als Rollkurven zwei kongruente doppelt gelegte Ellipsen.

Wird dagegen $r_0 = a - b$ gesetzt, so folgt als Gleichung von F′:

$$(a\sin v - \sqrt{ab}\sin u)(a\sin v + \sqrt{ab}\sin u) = 0,$$

welche aussagt, dass D der Hauptkreis der Ellipse F′ ist, d. h., dass F′ den Distanzkreis doppelt berührt. Die Kurve R zerfällt daher in die nämlichen zwei Ellipsen, die aber nicht mehr doppelt gelegt sind, und je einen der beiden Brennpunkte von F′ zum Brennpunkt haben. Die Gleichungen dieser Kurven ergeben sich entweder aus oben stehender Gleichung 8) oder einfacher aus Gleichung 7), in welcher die Spezialisierung $r_0 = a - b$ bereits ausgeführt und daher nur der Winkel $\frac{\varphi_1}{2}$ durch φ_1 zu ersetzen ist. Die Kurve R hat demnach die Gleichung:

$$\left(r_1 - \frac{a^2 - ab}{a - \sqrt{ab}\cos\varphi_1}\right)\left(r_1 - \frac{a^2 - ab}{a + \sqrt{ab}\cos\varphi_1}\right) = 0,$$

welche in der That die beiden fraglichen Ellipsen R_1 und R_2 darstellt.

4.

Betrachten wir schliesslich noch den Fall, wo der eine der beiden fixen Drehpunkte, z. B. O_1 ins Unendliche fällt, d. h., wo die Kurve R_1 eine Parallelverschiebung ausführt, indessen die andere R_2 sich um ein im Endlichen liegendes Centrum dreht, so bleibt das bisher angewandte Verfahren auch jetzt in allen Teilen fortbestehen. Der Distanzkreis wird zur geraden Linie D, der Punkt O_1 geht über in die Normalenrichtung der Linie D.

Ist (Figur 3 Taf. I) F die gegebene Teilungskurve, so schneidet irgend eine ihrer Tangenten die Gerade D in einem im Endlichen liegenden Punkt A_1, indessen der Punkt A_2 im Unendlichen liegt. Zieht man daher die zugehörigen Radien aus O, d. h. aus O_1, so liegt OA_2 der ganzen Ausdehnung nach im Unendlichen. Aus dem Radius OA_1 ergiebt sich nun zunächst der Punkt P_1, indem man diesen Radius mit der Mittelsenkrechten der Strecke FA_1 zum Schnitt bringt, und es entsteht auf diese Weise die Kurve R_1, also die Zahnstange.

Beachtet man aber, dass jedes Mal die Strecke $P_1 F$ sowohl der Grösse als der Richtung und dem Sinne nach übereinstimmt mit

$$r_2 = O_2 P_2,$$

so erhält man demnach auch die Kurve R_2 oder das Rad, indem man alle Strecken $P_1 F$ parallel zu sich selbst an einen beliebigen Drehpunkt O_2 verschiebt.

Wendet man zur Konstruktion der Tangenten in P_1 und P_2 das frühere Verfahren an, so ist zunächst die normale Geschwindigkeitskomponente w_{1n} zu suchen. Man ziehe also $P_1 F_1$ parallel $A_1 A_2$ bis zum Radiusvektor OF der Teilungskurve, so ist

$$w_{1n} = P_1 F_1 = n,$$

was auch ohne weiteres klar ist, das $W_1 = n$ die Geschwindigkeit ist, mit welcher der Punkt A_1 die Linie D durchläuft. Um ferner die radiale Komponente zu erhalten, gebe man zunächst auf der Normalen n von F das Geschwindigkeitscentrum G an. Es ist aber der vierte harmonische Punkt zu F bezüglich des Paares $Q_1 Q_2$ der gesuchte Punkt G, d. h., da Q_2 im Unendlichen liegt, G ist der symmetrische Punkt zu F bezüglich des Punktes Q_1. Ist sodann K der Krümmungsmittelpunkt der Stelle F, so ist

$$w_{1r} = \frac{1}{2} GK$$

die normale Komponente von w_1. Sie ist auf dem Radius des Punktes P_1 nach O hin aufzutragen, wenn K mit F auf der nämlichen Seite von G liegt und umgekehrt.

Durch ebenso leichte Modifikation findet man auch die Krümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2, indessen soll hier nur noch die analytische Formulierung der Aufgabe kurz erwähnt werden.

Man wähle auf der Geraden D irgendwo den Pol O_2, nehme die positive Richtung der Geraden D, welche wir zur x-Axe machen, nach links, die positive Axe y durch O_2 nach unten. Ebenso wähle man O_2 als Pol, D als Polaraxe x eines Koordinatensystems für polare Linienkoordinaten. Ist dann in Bezug auf dieses System:

$$r = f(u)$$

die Gleichung der Teilungskurve F und bezeichnet D den Fusspunkt des von O_2 auf die Tangente $A_1 A_2$ gefällten Lotes, so ist:

$$DF = \frac{dr}{du} = r',$$

und man hat daher zunächst für die rechtwinkligen Koordinaten x und y des Punktes P_1:

1) $$x = \frac{r}{\cos u} = \frac{f(u)}{\cos u},$$

2) $$2y = \frac{r' \cos u + r \sin u}{\cos^2 u} = \frac{dx}{du}.$$

Diese beiden Gleichungen ergeben somit die Kurve R_1 mittelst einer Parameterdarstellung durch den Winkel u.

Für die Polarkoordinaten der Kurve R_2 dagegen hat man, falls der Einfachheit der Schreibweise halber die Winkel φ_2 von der positiven y-Axe aus in positivem Sinne gerechnet werden:

$$2r_2 = 2y = \frac{d}{du}\left(\frac{f(u)}{\cos u}\right),$$
$$\varphi_2 = 2u,$$

für welche Gleichungen man einfacher schreibt:

$$3)\qquad r_2 = \frac{d}{d\varphi_2}\left[\frac{f\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)}{\cos\frac{\varphi_2}{2}}\right].$$

Wird R_2 noch mit der Ebene umgelegt, so stellen die Gleichungen 1), 2) und 3) zwei entsprechende Rollkurven dar.

a) Wählt man beispielsweise als Teilungskurve F einen Kreis, dessen Mittelpunkt im Abstande a nach positiver Seite der y-Axe liegt und der D nicht schneidet, also mit einem Radius $r_0 < a$, so heisst seine Gleichung:

$$r = a \sin u - r_0.$$

Daher hat man als Gleichungen der Kurve R_1:

$$x = \frac{a \sin u - r_0}{\cos u},$$
$$2y = \frac{a - r_0 \sin u}{\cos^2 u};$$

für die Kurve R_2 dagegen die Gleichung in Polarkoordinaten:

$$r_2 = \frac{a - r_0 \sin\frac{\varphi_2}{2}}{1 + \cos\varphi_2}.$$

Ist speziell der Radius $r_0 = 0$, d.h. F ein Strahlbüschel, so erhält die Kurve R_1 die Gleichung:

$$y = \frac{a}{2} + \frac{x^2}{2a},$$

die Kurve R_2 dagegen:

$$r_2 = \frac{a}{1 + \cos\varphi_2}.$$

Diese Gleichungen stellen daher zwei kongruente Parabeln vom Halbparameter a dar, welche y zur gemeinschaftlichen Hauptaxe haben und sich in der Mitte der Strecke O_2F berühren. Wird die untere Parabel parallel zur Linie D verschoben und soll sie von der obern stets berührt werden, so hat sich diese um ihren Brennpunkt O_2 zu drehen. Für die Parabel R_1 ist F der Brennpunkt, D die Leitlinie und die Konstruktion ergiebt ohne weiteres die bekannten Erzeugungsweisen, sowie Tangente und Krümmungsradius.

b) Umgekehrt sei die Kurve R_2 gegeben, etwa als eine Ellipse mit y als Hauptaxe, mit der grossen Axe $2a$ und der linearen Exzentrizität $2c$, so heisst ihre Gleichung:

$$r_2 = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\varphi_2}.$$

Da ferner $\varphi_2 = 2u$, so folgt für die Kurve R_1:

1) $$y = r_2 = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos 2u};$$

ferner ist

$$\frac{dx}{d2u} = y = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos 2u},$$

somit durch Integration mit der Konstanten Null:

2) $$\cos\frac{x}{\sqrt{a^2 - c^2}} = \frac{a\cos 2u - c}{a - c\cos 2u},$$

oder indem man aus 1) und 2) den Parameter $2u$ eliminiert und die kleine Halbaxe

$$\sqrt{a^2 - c^2} = b$$

setzt als Gleichung der Kurve R_1:

$$y = a + c\cos\left(\frac{x}{b}\right).$$

Die Kurve R_1 ist also eine Cosinuslinie, welche die Ellipse im Scheitel der grossen Axe berührt. Die Kurven sind also schon in richtiger Lage, da sie beide zur Axe y symmetrisch sind und eine Umlegung um diese Axe keine Lagenveränderung bewirkt.

c) Ist dagegen die Gleichung der Kurve R_1 durch rechtwinklige Punktkoordinaten gegeben, etwa als Kettenlinie, deren Hauptaxe mit y zusammenfällt, d. h. durch die Gleichung:

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

so hat man zunächst ihre Parameterdarstellung aufzustellen, in welcher der Winkel u der Teilungskurve als Parameter figuriert. Nach früherem ist aber

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{dx}{du},$$

aus welcher Gleichung durch Integration folgt:

$$\operatorname{tg}(u - u_0) = e^{\frac{x}{c}}.$$

Wird nun die Konstante u_0 derart bestimmt, dass für $u = 0$ auch $x = 0$ wird, so ergiebt sich:

$$e^{\frac{x}{c}} = \operatorname{tg}\left(u + \frac{\pi}{4}\right)$$

und daher:

$$y = \frac{c}{2}\left[\operatorname{tg}\left(u + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{cotg}\left(u + \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

oder

$$y = \frac{c}{\cos 2u}.$$

Substituiert man hierin $y = r_2$; $2u = \varphi_2$, so erhält man die Gleichung der Kurve R_2 in Polarkoordinaten:

$$r_2 = \frac{c}{\cos \varphi_2}.$$

Als Kurve R_2 erscheint daher die Scheiteltangente der Kettenlinie R_1. Die Kettenlinie ergiebt sich somit als Spezialfall der schon früher erhaltenen Rollkurve zu einer Geraden, unter der Voraussetzung, dass die Distanz $2a$ ins Unendliche gewachsen ist. Anderseits ist der Bewegungsvorgang nichts anderes als eine kinematische Illustration zu dem bekannten Satze:

Fällt man vom Fusspunkt der Ordinate auf der x-Axe das Lot auf die Tangente der Kettenlinie, so ist das Stück der Tangente von diesem Fusspunkt bis zum Berührungspunkt gleich der Länge des Bogens von diesem Berührungspunkt bis zum Scheitel der Kurve.

Der Inhalt des von der Ordinate, der Tangente und ihrem Lote gebildeten Dreieckes ist aber anderseits die Hälfte vom Inhalt der über der Kettenlinie stehenden Fläche. Auch dieser Satz folgt hier ganz unmittelbar. Aus den Gleichungen der Rollkurven dieses Abschnittes ergiebt sich nämlich:

$$y\,dx = y^2 d2u = r_2{}^2 d\varphi_2,$$

oder

$$dF_1 = 2dF_2;$$

d. h.: Die von der Kurve R_1, der Geraden D und den Ordinaten irgend zweier Punkte von R_1 begrenzte Fläche F_1 hat allemal doppelt so grossen Inhalt, wie der über dem entsprechenden Bogen der Kurve R_2 stehende Sektor F_2.

B. Divergente, sich schneidende Axen.

5.

Die Flächen R_1 und R_2 sind in diesem Falle Kegelflächen. Seien o_1 und o_2 die beiden gegebenen Axen, die sich in O schneiden, und 2β der von ihnen eingeschlossene vorläufig spitze Winkel, so denken wir uns die Axen, sowie die um diese beschriebenen Systeme koaxialer Rotationskegel mit der um O beschriebenen Einheitskugel geschnitten. Es seien O_1 und O_2 die Schnittpunkte der Axen mit der Kugel, der Meridian dieser Axen sei der Anfangsmeridian oder die Centrale, P sei ein auf dem direkten Bogen $O_1 O_2$ liegender Punkt, so sollen O_1 und O_2 die Pole und OP_1 sowie OP_2 die sphärischen Polaraxen x_1 und x_2

zweier Polarkoordinatensysteme auf der Kugel bilden. Sind dann α_1 und α_2 die sphärischen Radien, φ_1 und φ_2 die sphärischen Anomalien irgend zweier Punkte P_1 und P_2 der Kugel, so mögen sie entsprechende Punkte heissen, wenn die durch sie gehenden Kreise der Kugel von den Mittelpunkten O_1 und O_2 sich auf der Centrale $O_1 O_2$ berühren, und wenn beim Rollen dieser Kreise aufeinander und um die Punkte O_1 und O_2, P_1 und P_2 gleichzeitig durch die Centrale gehen.

Heisst man zwei solche Kreise der Systeme um O_1 und O_2, die sich auf der Centrale berühren, ein Elementenpaar, so sind entsprechende Punkte jedes Paares definiert durch die beiden Gleichungen:

$$1) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta,$$

$$2) \qquad \sin\alpha_1\, d\varphi_1 - \sin\alpha_2\, d\varphi_2 = 0.$$

Von diesen speziellen Rollkurvenpaaren für konstantes Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten gelangt man nun wieder zu den allgemeinsten durch folgende Überlegung, bei der man sich die Einheitskugel doppelt und in sich verschiebbar zu denken hat:

Durchläuft ein Punkt P die sphärische Centrale $O_1 O_2$ nach irgend einem Gesetz und dreht man die mit den beiden Kreissystemen fest verbundenen Kugelflächen um die Axen o_1 und o_2 derart, als ob die momentan durch P gehenden Kreise jedes Paares aufeinander rollen würden, so beschreibt P auf beiden Kugelflächen zwei entsprechende sphärische Rollkurven.

Seien w_{1n} und w_{2n} die Komponenten der Geschwindigkeiten w_1 und w_2 normal zur Centrale gemessen, mit denen die Kurven R_1 und R_2 durch den Punkt P auf der Kugelfläche laufen, $w_{1\alpha}$ und $w_{2\alpha}$ die Komponenten in der Centralen, so folgt zunächst wegen der Gleichung 1):

$$w_{1\alpha} + w_{2\alpha} = 0;$$

ferner infolge Gleichung 2):

$$\sin\alpha_1 \frac{d\varphi_1}{dt} - \sin\alpha_2 \frac{d\varphi_2}{dt} = 0,$$

also:

$$w_{1n} - w_{2n} = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen zwischen den Komponenten folgt weiter:

$$\frac{w_{1n}}{w_{1\alpha}} + \frac{w_{2n}}{w_{2\alpha}} = 0,$$

d. h.:

$$3) \qquad \vartheta_1 + \vartheta_2 = \pi;$$

durch Quadrieren und Addieren dagegen folgt:

$$\sin^2\alpha_1\, d\varphi_1^2 + d\alpha_1^2 = \sin^2\alpha_2\, d\varphi_2^2 + d\alpha_2^2,$$

oder

$$4) \qquad ds_1 = ds_2.$$

Entsprechende Bogenelemente berühren sich also auf der Centrale und haben gleiche Länge, d. h. die vom Punkte P beschriebenen Kurven R_1 und R_2 rollen aufeinander, indem sie sich drehen.

Die Bedingungsgleichungen 1) und 2) genügen daher, um R_1 und R_2 als entsprechende sphärische Rollkurven zu charakterisieren.

Die über zwei sphärischen Rollkurven stehenden Kegel aus dem Mittelpunkte der Kugel sind entsprechende Rollkegel. Da jede in O konzentrische Kugel aus zwei Rollkegeln sphärische Rollkurven schneidet, so folgt:

Die unendlich fernen Querschnitte entsprechender Rollkegel sind entsprechende ebene Rollkurven.

Diese Eigenschaft der unendlich fernen Querschnitte folgt auch schon aus dem Umstande, dass die unendlich ferne Ebene die einzige des Raumes ist, die auf beiden Axen o_1 und o_2 zugleich normal steht.

Um nun zur geometrischen Erzeugung entsprechender Rollkegel zu gelangen, kann man ein dem früheren analoges Verfahren einschlagen. Die von den Axen o_1 und o_2 nach entsprechenden Erzeugenden p_1 und p_2 gehenden Ebenen bilden zwei Büschel von bestimmter Abhängigkeit und ungleichem oder gleichem Drehungssinn, je nachdem die Kegel sich von aussen oder innen berühren. Verschiebt man daher beide Büschel an eine beliebige Axe o derart, dass die Punkte O_1 und O_2 in den nämlichen Punkt O, und die entsprechenden Halbaxen o_1 und o_2 verkehrt aufeinander fallen, so kann man sich die Abhängigkeit beider Ebenbüschel $A_1, B_1, C_1 \ldots$ und $A_2, B_2, C_2 \ldots$ dadurch vorstellen, dass man sie mit einem um O beschriebenen Kegel Δ vom halben Öffnungswinkel 2β schneidet und entsprechende Schnittlinien $a_1 b_1 c_1 \ldots$ und $a_2 b_2 c_2 \ldots$ durch Ebenen verbindet. Die Gesamtheit dieser Ebenen umhüllt dann einen bestimmten Kegel Φ und umgekehrt definiert jeder Kegel Φ an der Axe o zwei von einander abhängige Ebenensysteme. Beschreibt man jetzt um O die Einheitskugel, so trifft sie den Kegel Δ nach einem Kreise D, dessen Ebene den Kegel Φ nach einer Kurve F schneidet. Aus dieser entspringt jetzt ein bekanntes Paar ebener Rollkurven R_{1e} und R_{2e}, mit welchen die gesuchten sphärischen Rollkurven R_1 und R_2 in einfacher Weise zusammenhängen.

Ist nämlich (Figur 4 Taf. I) O_1 der Mittelpunkt von D, O_2 der zweite Schnittpunkt der positiven Halbaxe o mit der Einheitskugel, Δ_2 der aus O_2 über D beschriebene Gegenkegel zu Δ, $A_1 A_2$ eine Tangente von F, P_{1e}, P_{2e} das aus ihr entspringende Punktepaar der ebenen Kurven R_{1e} und R_{2e}; $P_{1\Delta}$ und $P_{2\Delta}$ die in der Richtung der Axe o auf Δ_2 projizierten Punkte P_{1e} und P_{2e}, so besteht die Proportion:

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = \frac{O_1 P_{2e}}{O_1 P_{1e}} = \frac{O_2 P_{2\Delta}}{O_2 P_{1\Delta}}.$$

Sind daher P_1 und P_2 die Schnittpunkte der nach $P_{1\Delta}$ und $P_{2\Delta}$ gehenden Kugelradien mit der Einheitskugel, so ergiebt sich weiter:

$$\frac{O_2 P_{2\Delta}}{O_2 P_{1\Delta}} = \frac{\sin(O_2 P_2)}{\sin(O_2 P_1)} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2},$$

und da $\widehat{O_2 P_1} + \widehat{O_2 P_2} = 2\beta$, so folgt:

$$\widehat{O_2 P_1} = \alpha_1 \quad \text{und} \quad \widehat{O_2 P_2} = \alpha_2,$$

also sind P_1 und P_2 Punkte entsprechender Rollkurven.

Da nun anderseits die Linie $FP_{1\Delta}$ parallel O_2A_2 und $FP_{2\Delta}$ parallel O_2A_1, so werden somit entsprechende Rollkegel nach folgender Konstruktion erhalten:

Man beschreibe aus den zwei Punkten O und O_2, deren Distanz auf o der Längeneinheit gleich ist, die Kegel Δ und Δ_2 mit 2β und $\frac{\pi - 2\beta}{2}$ als halben Öffnungswinkeln, so durchschneiden sie sich in einem Kreise D.

Ist dann F eine beliebige Kurve dieser Ebene, so ziehe man für jede Tangente A_1A_2 derselben $FP_{1\Delta}$ parallel O_2A_2 und $FP_{2\Delta}$ parallel O_2A_1. Durchläuft jetzt die Tangente A_1A_2 die ganze Kurve F, so beschreiben die Strahlen $OP_{1\Delta}$ und $OP_{2\Delta}$ zwei entsprechende Rollkegel.

Da man für die ebenen Rollkurven die Tangenten in den Punkten P_{1e} und P_{2e} angeben kann, so kennt man die Tangenten auch in den Punkten $P_{1\Delta}$ und $P_{2\Delta}$, d. h. man kann auch die Tangentialebenen der Kegel R_1 und R_2 angeben.

In dieser Weise entstehen die gesuchten Paare von Kegelflächen mit Vermeidung der schwierigen und konstruktiv unbequemen Konstruktionen auf der Kugeloberfläche selbst. Je nachdem die Kurve F ganz im Innern oder ganz ausserhalb von D liegt, werden R_1 und R_2 ganz getrennte Teile eines und desselben Kegels R werden, die nur bei Berührung von aussen oder von innen aufeinander rollen.

Liegt dagegen F teils im Innern und teils ausserhalb des Kreises D, so hängen R_1 und R_2 zusammen, wobei der Kegel R die Axe o zur mehrfachen Erzeugenden haben muss. Der Kegel rollt dann mit dem kongruenten teils für Berührung von aussen, teils für Berührung von innen, wobei der Wechsel beim Durchgang der gemeinschaftlichen Berührungslinie entweder durch die Axe o_1 oder durch o_2 stattfindet.

Wächst der Winkel 2β gegen $\frac{\pi}{2}$, so geht die Ebene des Kreises D durch den Kugelmittelpunkt; wird $2\beta > \frac{\pi}{2}$, so sinkt sie unter denselben und der Kegel Δ_2 wird ein spitzer Kegel, in allen Fällen aber bleibt die Konstruktion die nämliche.

Will man die Gleichungen der Rollkurven R_1 und R_2 auf der Einheitskugel in sphärischen Polarkoordinaten aufstellen, so mögen

zunächst φ_1 und φ_2, u und v in der Ebene des Kreises D die frühere Bedeutung haben. Alsdann folgt aus der Bedingungsgleichung 2):

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1},$$

$$\frac{\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2}{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2} = \frac{d\varphi_2 - d\varphi_1}{d\varphi_2 + d\varphi_1},$$

oder

3) $$\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \beta)}{\operatorname{tg}\beta} = -\frac{dv}{du} = -v'.$$

Eliminiert man daher aus den je drei Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\beta\,\frac{1-v'}{1+\operatorname{tg}^2\beta\cdot v'},\quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\beta\,\frac{1+v'}{1-\operatorname{tg}^2\beta\cdot v'};$$

$$\varphi_1 = u + v,\quad \varphi_2 = u - v,$$

$$F(u, v) = 0,\quad F(u, v) = 0,$$

die Parameter u und v, so erhält man als Resultanten die Gleichungen entsprechender Rollkurven auf der Kugeloberfläche.

Auch hier wird im allgemeinen die nämliche Gleichung beide Kurven zugleich ausdrücken, sodass jede als Teil der Gesamtkurve R aufzufassen ist.

Wenn die Gleichungen der aus der Teilungskurve F entstehenden ebenen Rollkurven R_{1e} und R_{2e} schon bekannt sind, so kann durch einfache Substitution aus ihrer Gleichung:

$$R(r, \varphi) = 0$$

die Gleichung der sphärischen Kurven erhalten werden.

Aus obiger Gleichung 2) ergiebt sich nämlich:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\cos(\alpha_1 - \beta)} = \sin\beta\left(1 - \frac{dv}{du}\right)$$

und da

$$2a = \sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$$

den Radius von D darstellt, so ist nach früherem:

$$\sin\beta\left(1 - \frac{dv}{du}\right) = \frac{r_1}{\cos\beta},$$

sodass

$$\frac{\sin\alpha_1}{\cos(\alpha_1 - \beta)} = \frac{r_1}{\cos\beta}$$

wird, woraus folgt, dass in die Gleichung der ebenen Rollkurve

4) $$\frac{1}{r_1} = \operatorname{cotg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\beta$$

zu substituieren ist, um daraus die Gleichung der sphärischen Rollkurve zu erhalten.

Wählen wir in einem ersten Beispiel als Kurve F ein Strahlenbüschel, so ist die resultierende Kurve R_{1e} eine Ellipse mit der grossen $2a$ Axe und O_1 und F als Brennpunkten. Daraus folgt, dass die

Projektion dieser Ellipse auf den Gegenkegel Δ_2 ebenfalls eine Ellipse ist und ferner, dass ihr projicierender Kegel aus O die Axe o als Fokalstrahl besitzt; d. h.:

Zwei kongruente Kegel zweiten Grades, die sich um entsprechende Fokalstrahlen drehen, sind auch hier die einfachsten Rollkegel, die auftreten können.

Um zu der Gleichung der zugehörigen sphärischen Kegelschnitte zu gelangen, verlegen wir den Punkt F auf die Polaraxe des Kreises D in den Abstand $2c$ von O_1. Bedeuten dann β und δ die Winkel, unter denen die Strecken $2a$ und $2c$ aus dem zweiten Schnittpunkt O_3 der negativen Halbaxe o mit der Kugel gesehen werden, so besteht die Gleichung:

$$\frac{a}{c} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\delta}$$

und da

$$a = \sin\beta\cos\beta$$

ist, so folgt:

$$c = \cos^2\beta \operatorname{tg}\delta.$$

Es ist somit

$$F = \sin\beta\cos\beta\cos v - \cos^2\beta\operatorname{tg}\delta\cos u = 0$$

die Gleichung des Büschels, und daher durch Einsetzen der Werte von a und c die Gleichung der Ellipse R_{1e}:

$$r_1 = \frac{\cos\beta(\sin^2\beta - \cos^2\beta\operatorname{tg}\delta)}{\sin\beta - \cos\beta\operatorname{tg}\delta\cos\varphi_1}.$$

Führt man jetzt die in 4) stehende Substitution aus, so erhält man nach leichter Reduktion als Gleichung der sphärischen Ellipse R_1:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\cos 2\delta - \cos 2\beta}{\sin 2\beta - \sin 2\delta\cdot\cos\varphi_1}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass $\beta + \delta$ und $\beta - \delta$ die extremen Werte des sphärischen Radius α_1 sind, d. h., dass 2δ die sphärische Exzentrizität bedeutet. Man erhält daher den zweiten Fokalstrahl des Kegels R, indem man den Strahl O_3F in F_1 mit der Kugel schneidet und F_1 mit O verbindet. Das sphärische Büschel F besteht daher nicht aus Grosskreisbogen, sondern die Ebenen desselben enthalten den Punkt O_3. Dagegen sind P_1 und P_2 allemal Endpunkte eines sphärischen Durchmessers und ihre Tangenten stehen zu den Bogen des Büschels F normal.

Es ist klar, dass dem Kurvensysteme:

$$F = \sin\beta\cos\beta\cos nv - \cos^2\beta\operatorname{tg}\delta\cos nu = 0$$

die Gruppe der sphärischen Rollkurven

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\cos 2\delta - \cos 2\beta}{\sin 2\beta - \sin 2\delta\cos n\varphi_1}$$

entspricht, welche wie bei der Ellipse mit ihren entsprechenden in Deckung liegen.

Setzen wir endlich als Kurve F eine Kurve der Schar voraus, die durch Winkelteilung aus einem Kreise entsteht, dessen Mittelpunktsabstand $2b$, und dessen Radius $2r_0$ beträgt, und nehmen wir zudem an, o_1 und o_2 seien zu einander rechtwinklige Axen, also

$$2\beta = \frac{\pi}{2},$$

so hat man:

$$a = \frac{1}{2},$$

$$b = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\delta,$$

$$r_0 = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varepsilon$$

zu setzen, sodass die Gleichung von F die Form erhält:

$$F = \frac{1}{2}\cos n v - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\delta\cos n u \mp \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varepsilon = 0.$$

Die sphärischen Rollkurven haben dann eine Gleichung von der Form:

$$E^2 - \frac{\operatorname{tg}^2\varepsilon}{4} L = 0,$$

wo

$$E = \operatorname{cotg}\alpha_1 \cos 2\delta - (1 - \sin 2\delta\cos n\varphi_1),$$

und

$$L = (1 + \sin 2\delta\cos n\varphi_1)\operatorname{cotg}^2\alpha_1 - 2\cos 2\delta\operatorname{cotg}\alpha_1 + (1 - \sin 2\delta\cos n\varphi_1)$$

bedeuten.

Über die angenäherte Geradführung mit Hilfe eines ebenen Gelenkvierecks.

Von

Dr. R. Müller,

Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig.

Hierzu Taf. II Fig. 1—4.

Von einem Gelenkviereck sagt man bekanntlich, es bewirke eine angenäherte n-punktige Geradführung, wenn ein bestimmter Punkt der Koppelebene eine Bahnkurve beschreibt, die von einer gewissen Geraden zwischen n aufeinander folgenden Schnittpunkten nur verschwindend wenig abweicht; dabei ist n höchstens gleich sechs. Liegen die n Schnittpunkte einander unendlich nahe, so möge die Geradführung als eine n-punktig genaue bezeichnet werden. Dann ist zwar die theoretische Anschlußstrecke unendlich klein, in Wirklichkeit kann man aber auch in diesem Falle ein ganz beträchtliches Kurvenstück von der Anschlussgeraden nicht unterscheiden.

In einem früheren Aufsatze* habe ich die Konstruktion der n-punktig genauen Geradführung — insbesondere für $n = 6$ — eingehend behandelt. Im Folgenden wird gezeigt, wie man von hier aus den Übergang zur bloss angenäherten Geradführung findet, und wie man auf diese Weise zu Lösungen gelangt, die vor den früher erhaltenen vom praktischen Standpunkte aus den Vorzug verdienen.

1. Die Kurve der Ballschen Punkte. Wir gehen aus von irgend einem Gelenkviereck $\mathsf{AB}BA$ mit dem festen Gliede AB; für die beliebig gewählte Koppellage AB ist der Pol $\mathfrak{P}$, der Wendekreis w und auf ihm der Ballsche Punkt K — der augenblicklich einen Undulationspunkt beschreibt — in bekannter Weise konstruiert worden (Fig. 1). Zeichnen wir in der Koppelebene alle Kreise, die im Verlaufe der Bewegung zu Wendekreisen werden, so umhüllen diese einerseits

* Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks, diese Zeitschrift 42. Jahrgang S. 247.

die Polkurve p, anderseits den Ort u der Ballschen Punkte (Fig. 1a). Dann erstreckt sich auf der einen Seite von u ein Gebiet von Systempunkten, von denen jeder zwei benachbarten Wendekreisen angehört. Jeder dieser Punkte erzeugt also eine Bahnkurve mit zwei dicht aufeinander folgenden Inflexionen, die zu einem scheinbar geradlinigen Kurvenstück verschmelzen, wenn wir den Systempunkt hinreichend nahe an u annehmen. Das eben Gesagte gilt z. B. von den Punkten M und L, die wir auf der Bahnnormale $\mathfrak{P}K$ des Punktes K gewählt haben; der Punkt L liefert eine angenäherte vierpunktige Geradführung.

In der Koppelebene giebt es im allgemeinen eine bestimmte Anzahl von Punkten, deren Bahnkurven eine fünfpunktig berührende Tangente besitzen.* Solche Punkte liegen immer auf je drei unendlich benachbarten Wendekreisen, sind also Spitzen der Kurve u. In jedem Punkte, der sich in der Nähe einer Spitze innerhalb des von der Kurve u begrenzten Gebietes befindet, schneiden sich drei aufeinander folgende Wendekreise; die zugehörige Bahnkurve hat also kurz nacheinander drei Inflexionen, und wir gelangen zu einer angenäherten fünfpunktigen Geradführung, wenn die Entfernung des beschreibenden Punktes von jener Spitze hinreichend klein ist.

2. Konstruktion der fünfpunktig genauen und der angenäherten fünfpunktigen Geradführung. Bei der wirklichen Ausführung der zuletzt angedeuteten Konstruktion würde die Ermittelung der Systempunkte mit fünfpunktig berührenden Bahntangenten erhebliche Schwierigkeiten bereiten. Es empfiehlt sich deshalb, nicht ein beliebiges Gelenkviereck in einer beliebigen Koppellage zu Grunde zu legen, sondern von vorn herein die Figur so anzuordnen, dass der Ballsche Punkt momentan eine Bahnstelle mit fünfpunktig berührender Tangente durchläuft. Dann müssen die Winkel, welche die vier Seiten des Vierecks augenblicklich mit einer gewissen Geraden einschliessen, einer einfachen Bedingung genügen.** Eine daraus folgende Konstruktion haben wir bereits an anderer Stelle mitgeteilt.***

In Figur 2 ist ein anderer Weg eingeschlagen worden. Hier ist nämlich die Aufgabe gestellt, mit Hilfe eines Gelenkvierecks in allgemeinster Weise eine Kurve zu beschreiben, die von der gegebenen Geraden $\mathfrak{g}$ im Punkte K fünfpunktig berührt wird. Von dem gesuchten Viereck dürfen wir den einen Arm, etwa $\mathsf{A}A$, noch willkürlich annehmen, und zwar in der Lage, die er haben soll, wenn der geradgeführte Punkt sich in K befindet. Durch diese Daten ist die Be-

* a. a. O. S. 260.

** a. a. O. S. 260 Gleichung 25.

*** Konstruktion der Burmesterschen Punkte für ein ebenes Gelenkviereck, zweite Mitteilung, diese Zeitschrift 38. Jahrgang S. 131.

wegung der Koppelebene für fünf unendlich benachbarte Lagen bestimmt, und es giebt ausser A und K noch zwei andere Systempunkte B und B^*, welche augenblicklich Bahnstellen mit fünfpunktig berührendem Krümmungskreise durchlaufen; sie bilden zusammen mit A und K die vier Burmesterschen Punkte der betrachteten Systemlage. Die früher von uns abgeleitete Konstruktion der Punkte B und B^* gestaltet sich gegenwärtig noch etwas einfacher als im allgemeinen Falle, weil dem Punkte K ein unendlich grosser Krümmungskreis entspricht.*

Wir bestimmen zunächst den Pol 𝔓 als Schnittpunkt von AA mit dem in K zu 𝔤 errichteten Lote, ziehen A𝔖 ⊥ 𝔤 bis AK, 𝔓𝔍 ⊥ 𝔓𝔖 bis zu derselben Geraden, legen durch 𝔖 zu 𝔓𝔍 eine Parallele, welche 𝔓A in 𝔄, 𝔓K in 𝔎 schneidet, und errichten in 𝔄 und 𝔎 Lote bez. zu 𝔓A und 𝔓K. Treffen sich diese in 𝔇, so geht durch 𝔇 die Polbahntangente 𝔱, und der Kreis δ, der 𝔓𝔇 zum Durchmesser hat, ist der gemeinschaftliche Krümmungskreis der Kreispunktkurven m und μ für die betrachtete und die umgekehrte Bewegung. Wir ziehen ferner 𝔍𝔊 ∥ 𝔓𝔖 bis 𝔓K, 𝔊𝔈 ⊥ 𝔓𝔊 bis zur Polbahnnormale 𝔫 und bestimmen den Schnittpunkt 𝔉 von 𝔈𝔇 mit δ. Dann ist 𝔓𝔈 ein Durchmesser des zweiten Krümmungskreises der Kurve m in ihrem Doppelpunkte 𝔓, und ihr Fokalzentrum würde sich ergeben durch Halbierung der nicht gezeichneten Strecke 𝔓𝔉. Der Ballsche Punkt der betrachteten Systemlage fällt gegenwärtig mit K zusammen; die Gerade 𝔓K ist folglich die Fokalaxe der Kurve μ. Machen wir daher im Kreise δ die Sehne 𝔓𝔈 = 𝔓𝔎, so ist der Mittelpunkt von 𝔓𝔈 das Fokalzentrum von μ. Die nicht gezeichnete Verbindungslinie der beiden Fokalzentren schneidet die Polbahnnormale 𝔫 im Punkte 𝔔, den wir in unserer Figur als Mittelpunkt der Strecke 𝔓𝔔′ erhalten haben, wobei 𝔔′ den Schnittpunkt von 𝔈𝔉 mit 𝔫 bezeichnet. Nach einem bei anderer Gelegenheit bewiesenen Satze** befinden sich in jeder Lage eines komplan bewegten starren ebenen Systems die vier Burmesterschen Punkte mit den Punkten 𝔓 und 𝔔 auf einem Kegelschnitt, der in 𝔓 die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Ballschen Punkte berührt. Gegenwärtig gehört aber der Ballsche Punkt K selbst mit zu den Burmesterschen Punkten; jener Kegelschnitt zerfällt also in die Geraden 𝔓K und 𝔔A, und die gesuchten Punkte B, B^* liegen demnach auf 𝔔A. — Die weitere Konstruktion erfolgt nach der früher gegebenen Regel: Wir bestimmen die Schnittpunkte 𝔙, 𝔚 und 𝔑 von 𝔈𝔉 bez. mit 𝔄𝔎, 𝔓𝔍 und mit der Parallelen durch 𝔇 zu 𝔄𝔎, ziehen zu 𝔓𝔙 die Parallelen 𝔑𝔗 und 𝔚𝔑 bez. zu 𝔱 und 𝔫 und bezeichnen mit 𝔅, 𝔅* die Schnittpunkte der Geraden 𝔗𝔑 mit dem Kreise δ. Dann trifft 𝔔A die Geraden 𝔓𝔅, 𝔓𝔅* bez. in B, B^*.

Den Punkten B und B^* entsprechen zufolge der bekannten quadratischen Verwandtschaft die Krümmungsmittelpunkte B und B*; wir finden sie z. B. unter Benutzung des Wendepols W, in welchem die Geraden 𝔫 und 𝔤 sich schneiden. Als Lösung der gestellten Aufgabe erhalten wir somit die beiden Vierecke ABBA und AB*B^*A. In Verbindung mit dem ersten beschreibt der Punkt K die Kurve $\varkappa$ (Fig. 2a);

---

* Konstruktion der Burmesterschen Punkte für ein ebenes Gelenkviereck, erste Mitteilung, diese Zeitschrift 37. Jahrgang S. 213. In der obigen Figur 2 sind möglichst dieselben Buchstaben gebraucht, wie in der Figur 2 des angeführten Aufsatzes.

** Über die Bewegung eines starren ebenen Systems durch fünf unendlich benachbarte Lagen, diese Zeitschrift 37. Jahrgang S. 147.

das zweite erteilt ihm eine Bewegung in der Kurve $\varkappa^*$, die sich der Geraden $\mathfrak{g}$ so innig anschmiegt, dass auch ihr sechster Schnittpunkt mit $\mathfrak{g}$ in die scheinbar endliche Anschlußstrecke hineinfällt (Fig. 2).

Figur 2a zeigt den Übergang von der gefundenen fünfpunktig genauen Geradführung zu einer angenäherten fünfpunktigen: In der Koppelebene ABK, die in Figur 2b besonders gezeichnet ist, umhüllen die sämtlichen Wendekreise wie vorhin die Kurven p und u. Innerhalb des von u begrenzten Gebietes ist der Punkt L angenommen worden — in unserer Figur auf dem durch die Spitze K gehenden Wendekreise w; die zugehörige Bahnkurve λ befindet sich in Figur 2a, und zwar der Deutlichkeit wegen ein wenig nach der Seite verschoben. Sie besitzt eine auffallend gestreckte Gestalt und genügt den Anforderungen einer angenäherten Geradführung jedenfalls besser, als die daneben stehende Bahnkurve $\varkappa$ des Punktes K. — Das Gebiet, in welchem der Punkt L gewählt werden kann, ist im vorliegenden Falle beschränkter, als bei der vierpunktigen Geradführung; wir dürfen ihn z. B. nicht mehr auf der Normale des Punktes K annehmen, wie in Figur 1.* Am zweckmässigsten verwenden wir, wie in Figur 2a, einen Punkt des Wendekreises w; dann wird nämlich die etwas umständliche Konstruktion der Kurve u ganz überflüssig.

3. Sechspunktige Geradführung. Da die Konstruktion der sechspunktig genauen Geradführung bereits in allgemeinster Weise erledigt ist,** so haben wir nur noch zu zeigen, wie sich von hier aus der Übergang zur angenäherten Geradführung gestaltet. Dazu genügt aber die Betrachtung eines speziellen Falles; wir wählen als Beispiel die bekannte Geradführung von Tschebischeff (Fig. 3). Bei dieser ist das Gelenkviereck $\mathsf{AB}BA$ gleicharmig, und es verhält sich:

$$AB : \mathsf{AB} : \mathsf{A}A = 1 : 3 : 4.$$

Gelangt dann die Koppel in die gezeichnete Lage, in der sie zum festen Gliede parallel ist, so beschreibt ihr Mittelpunkt K eine Bahnstelle mit sechspunktig berührender Tangente. Jetzt schneiden sich in K vier unendlich benachbarte Wendekreise, und die unmittelbar vorhergehenden und folgenden Wendekreise umhüllen ein Kurvenstück u, das ein von Kreisen freies Gebiet einschliesst, während durch jeden Punkt ausserhalb u zwei solcher Kreise gehen (Fig. 3a). Um zu einer angenäherten sechspunktigen Geradführung zu gelangen, müssten wir in der Koppelebene einen Punkt angeben können, in welchem sich vier verschiedene Kreise der Schar schneiden — ein solcher Punkt ist jedoch in unserer Figur nicht vorhanden.

Hier müssen wir nun bedenken, dass die Singularität, welche gegenwärtig die Kurve u im Punkte K darbietet, aus der Vereinigung

* Vergl. Allievi, cinematica della biella piana, Napoli 1895, p. 59.

** Vergl. die Anmerkung auf S. 36.

von zwei Spitzen entsteht. Wir können aber diese Singularität wieder in zwei Spitzen auflösen, wenn wir unser Gelenkviereck in geeigneter Weise ein wenig verändern. Zu dem Zwecke haben wir in Figur 4 die Koppelstrecke AB ein wenig vergrössert, die drei übrigen Glieder aber unverändert gelassen. Für die dargestellte Koppellage, die zum festen Gliede parallel ist, bezeichnet K wiederum den Ballschen Punkt, der jetzt ausserhalb AB liegt und einen blossen Undulationspunkt beschreibt. Dann umhüllen die Wendekreise in der Umgebung von K ein Kurvenstück u, das zur Geraden $\mathfrak{P}K$ symmetrisch ist und in der unmittelbaren Nähe von K zwei Spitzen besitzt (Fig. 4a). Jeder Systempunkt innerhalb des von der Kurve u begrenzten krummlinigen Dreiecks liegt gleichzeitig auf vier Wendekreisen und durchläuft folglich dicht nacheinander vier Wendepunkte, wie z. B. der Punkt N, der sich auf der Normale $\mathfrak{P}K$ des Punktes K befindet, und dessen Bahnkurve in Figur 4 parallel nach unten verschoben ist. Der Punkt L, der auf $\mathfrak{P}K$ dem Punkte K sehr nahe liegt, liefert eine angenäherte vierpunktige Geradführung; um eine angenäherte sechspunktige Geradführung zu erhalten, werden wir den beschreibenden Punkt zwischen L und N, etwa in M annehmen. Wie die Figur zeigt, ist in diesem Fall die scheinbare Anschlußstrecke erheblich grösser, als bei der sechspunktig genauen Geradführung der Figur 3.

Aus unseren Darlegungen ergiebt sich demnach, dass überhaupt die angenäherte n-punktige Geradführung im allgemeinen längere Anschlußstrecken liefert, als die entsprechende n-punktig genaue. Um aber zu einer solchen angenäherten Geradführung zu gelangen, ist der bequemste Weg immer der, dass man zunächst eine n-punktig genaue Geradführung konstruiert und diese in der angegebenen Weise nachträglich in eine angenäherte umwandelt.

Über die mathematische Bestimmung der Helligkeit in Räumen mit Tagesbeleuchtung, insbesondere Gemäldesälen mit Deckenlicht.

Von

R. Mehmke
in Stuttgart.

Hierzu Tafel III und IV.

Die folgenden Untersuchungen sind auf Anregung des verstorbenen Geh. Baurats Ed. Wagner in Darmstadt entstanden, der ihre Ergebnisse für das Handbuch der Architektur zu verwerten wünschte und auch zum Teil verwertet hat,* nachdem ich sie ohne die mathematischen Entwickelungen bereits Ende 1890 im Mittelrheinischen Architekten- und Ingenieurverein, Ortsverein Darmstadt, mitgeteilt hatte. Neu hinzu gekommen ist jedoch die Anwendung des „Beleuchtungsvektors", mit dessen Einführung ich einen Fortschritt gemacht zu haben glaube.

Kam es ursprünglich nur darauf an, Methoden für die unmittelbare praktische Verwendung zu gewinnen, so scheint mir jetzt aus dem Gebotenen auch Nutzen für den Unterricht gezogen werden zu können, insofern z. B. die Konstruktion der Linien gleicher Helligkeit auf einer (etwa zur Fensterwand schrägen) Wand eines Gemäldekabinets mit Seitenlicht eine gute Übung für Fortgeschrittene in der darstellenden Geometrie ist und sich auch manche leichteren Aufgaben demselben Gebiet entnehmen lassen, während die Bestimmung von absolut oder relativ hellsten Punkten Beispiele für die Auflösung transcendenter numerischer Gleichungen liefert.

A. Allgemeiner Teil.

1. Geschichtliche Bemerkungen.

Eine Theorie der Beleuchtung sowohl von Gemäldesälen mit Deckenlicht, als mit Seitenlicht scheint zuerst Ed. Magnus aufgestellt

* Handbuch der Architektur, 4. Teil, 6. Halbband, 4. Heft, S. 227—231, 251—253, 1893.

zu haben: Zeitschrift für Bauwesen, Bd. 14, S. 202—219, 1864 (Wiedergabe eines Ende 1863 in der Kunstakademie zu Berlin gehaltenen Vortrages); eine besondere Schrift von Magnus mit dem Titel „Entwurf zum Bau eines Kunstmuseums“ ist 1866 erschienen. Magnus geht von richtigen Gedanken aus, ist aber als Maler zu wenig mathematisch gebildet, um dieselben in mathematisches Gewand kleiden und durchführen zu können. A. Tiede hat darauf einen ursprünglich mit Seitenlicht versehenen Saal des alten Museums in Berlin zu einem Deckenlichtsaal umgestaltet und die Grundsätze, nach denen er die Dimensionen des Deckenlichts festgestellt hatte, in der Zeitschrift für Bauwesen, Bd. 21, S. 186—194, 1871 mitgeteilt. Auch ist der entsprechende Abschnitt über Museen im Deutschen Bauhandbuch, Bd. 2, 2. Teil, S. 508 flg., 1884, von Tiede bearbeitet worden. Wissenschaftlich bleibt Tiede eher hinter Magnus zurück, statt über ihn hinaus zugehen. Die Frage erweitert und mathematisch in Angriff genommen haben R. Mentz (Beiträge zur Frage der Beleuchtung durch Oberlicht und Seitenlicht, mit spezieller Rücksichtnahme auf Oberlichtsäle und Seitenkabinette in Gemäldegalerien, Deutsche Bauzeitung Bd. 18, S. 488—491, 499—501, 1884; Berechnung der Tagesbeleuchtung innerer Räume und Maßstäbe dazu, Deutsche Bauzeitung Bd. 21, S. 257—260, 1887) und K. Mohrmann (Über die Tagesbeleuchtung innerer Räume, Berlin 1885). Beide legen zwar das Lambertsche Fundamentalgesetz der Beleuchtungslehre zu Grunde, verlassen aber, um vermeintliche mathematische Schwierigkeiten zu umgehen, den richtigen Weg bald wieder, weshalb sie auch zu manchen falschen Ergebnissen kommen. Eine gewisse Unklarheit findet sich sogar in einer zu unserem Gegenstand in Beziehung stehenden Abhandlung des Physikers Leonhard Weber (Beschreibung des Raumwinkelmessers, Zeitschrift für Instrumentenkunde, 4. Jahrg., S. 343—347, 1884), von wo sie, zu einem vollständigen Irrtum geworden und die Ausbildung unrichtiger Methoden verursachend, in eine Arbeit F. v. Grubers (Versorgung der Gebäude mit Sonnenwärme und Sonnenlicht, II. Versorgung der Gebäude mit Sonnenlicht, Wochenschrift des österreichischen Ingenieur- und Architektenvereins, 13. Jahrgang, S. 277—282, 285—291, 1888), in das Handbuch der Architektur (3. Teil, Bd. 3., 1. Heft, S. 15—23, 1896) und andere, hier nicht in Betracht kommende Schriften übergegangen ist.

Dass die wiederholt erfolglos behandelte Aufgabe, die Erhellung eines Flächenelements durch eine geradlinig begrenzte reflektierende Fläche zu bestimmen, auf die man naturgemäss immer wieder stossen musste, schon 1760 von Lambert in seiner Photometria (siehe Lamberts Photometrie, deutsch herausgegeben von E. Anding, 1. Heft, Ostwalds Klassiker Nr. 31, S. 53—58) mittelst Integralrechnung erledigt worden war und Ch. Wiener 1884 (im 1. Bd. seines Lehrbuchs der darstellenden Geometrie, Nr. 485, S. 401—402) Lamberts Er-

gebnis auf einfache Weise rein geometrisch abgeleitet hat, ist unbeachtet geblieben.

2. Annahmen.

Gewisse vereinfachende Annahmen sind nötig. Mit meinen Vorgängern setze ich voraus, dass, wenn es sich z. B. um die Abstufungen der Helligkeit auf einer Wand eines Gemäldesaales mit Deckenlicht handelt:

1. das von den Wänden und dem Boden zurückgestrahlte Licht dem durch die Deckenöffnung einfallenden Lichte gegenüber vernachlässigt werden dürfe,
2. von allen Punkten der untersuchten Wand das Himmelsgewölbe durch die Deckenöffnung frei gesehen werden könne,
3. die Beleuchtung nicht durch direktes Sonnenlicht erfolge,
4. die Teile des Himmelsgewölbes, welche die verschiedenen Stellen der Wand beleuchten, gleichförmige Beleuchtungsstärke und gleichförmiges Rückstrahlungsvermögen besitzen, und endlich
5. das Lambertsche Gesetz unbeschränkt giltig sei.

3. Beleuchtung eines Flächenelements durch eine reflektierende Fläche. Raumwinkel.

Wird ein Flächenelement f durch ein anderes dF, das Licht zurückstrahlt, beleuchtet, so ist bekanntlich nach dem Lambertschen

Fig. 1.

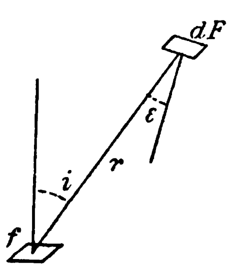
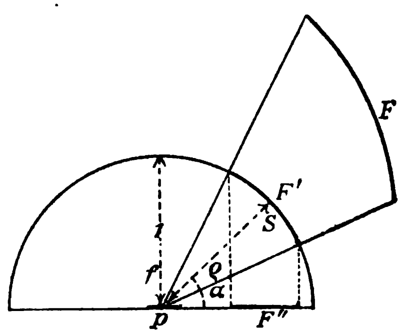


Fig. 2.



Gesetze die Erhellung von f durch dF proportional dem Ausdruck:

$$dF \cdot \frac{\cos \varepsilon \cos i}{r^2}$$

(siehe Fig. 1). Steht dem Elemente f eine reflektierende Fläche F mit endlicher Ausdehnung gegenüber, so muss man letztere in Elemente dF zerlegen, den Einfluss eines jeden Elementes auf f bestimmen und alle diese Einflüsse summieren. Es hat aber für den Fall, dass F gleichförmige Beleuchtungsstärke und gleichförmiges Rückstrahlungsvermögen

besitzt, schon Lambert (a. a. O. S. 37) folgendes gezeigt: Beschreibt man aus dem Mittelpunkte p von f eine Kugel mit beliebigem Halbmesser und nennt man F' die Zentralprojektion von F aus p auf die Kugeloberfläche (siehe Fig. 2, in der alles im Schnitt dargestellt ist), so wird f durch F' ebenso stark beleuchtet, wie durch F, vorausgesetzt, dass Beleuchtungsstärke und Rückstrahlungsvermögen von F und F' gleich sind. Wird der Halbmesser der Hilfskugel gleich 1 gesetzt, die Entfernung des Schwerpunktes s der Fläche F' vom Kugelmittelpunkt p mit ϱ, der Neigungswinkel der Geraden ps gegen die Ebene von f mit α bezeichnet, so findet man, dass die Erhellung von f durch F', also auch durch F proportional ist:

$$F' . \varrho \sin \alpha .$$

Auf ein Element dF' von F' kommt nämlich — wegen $r = 1$, $\cos \varepsilon = 1$ — nach dem Lambertschen Gesetze der Betrag $dF' \cdot \cos i$, der gleich dem Momente von dF' in Bezug auf die Ebene von f ist, wenn man sich die Fläche F' gleichmässig mit Masse von der Dichtigkeit 1 belegt denkt; die Summe dieser Momente ist aber gleich derjenigen der im Schwerpunkt s vereinigten Masse F'. Durch Multiplikation des gefundenen Ausdrucks mit der Beleuchtungsstärke und dem (auch Albedo genannten) Rückstrahlungsvermögen von F würde man die Beleuchtungsstärke von f erhalten; wir wollen aber von diesen Faktoren, die als Konstanten zu betrachten sind, künftig absehen.

Es muss hier ein öfters begangener Fehler berührt werden. Mohrmann nennt F' die zu F gehörige beleuchtende Nutzfläche und setzt, indem er den Faktor ϱ übersieht, die Erhellung von f einfach dem Produkte $F' \sin \alpha$ proportional. L. Weber nennt das Verhältnis der Fläche F' zur Oberfläche 4π der ganzen Einheitskugel den Raumwinkel der Pyramide bezw. der Kegelfläche, welche durch die vom Kugelmittelpunkt nach dem Rande der Fläche F' gehenden Strahlen begrenzt wird, und

$$\frac{F'}{4\pi} \sin \alpha$$

den „reduzierten Raumwinkel", den er als Maß der Erhellung von f durch F' betrachtet.* Webers Raumwinkelmesser (siehe die Beschreibung a. a. O. S. 346) hat auch Eingang in die Praxis gefunden. Da der Schwerpunkt der Fläche F' immer innerhalb der Kugel liegt, also $\varrho < 1$ ist, erhält man durch Weglassen von ϱ ein zu grosses Resultat. Wollte man z. B. die Erhellung eines Flächenelementes durch eine damit parallele unendlich ausgedehnte ebene reflektierende Fläche mittelst des „reduzierten Raumwinkels" bestimmen, so erhielte man das Doppelte des wirklichen Wertes, denn es bedeckt in diesem Falle

* Weber definiert allerdings den Winkel α nicht genauer, sondern spricht nur von einem „mittleren Elevationswinkel" (die Ebene von f ist wagerecht gedacht), ich wüsste aber nicht, welcher andere Winkel, als der oben eingeführte, gemeint sein könnte.

F' eine Halbkugel und wird somit $\varrho = \frac{1}{2}$, weil der Flächenschwerpunkt einer solchen in der Mitte des betreffenden Halbmessers liegt. Ist F' eine verhältnismässig kleine und nicht langgestreckte Fläche, so mag der Fehler gering sein und darum Webers Raumwinkelmesser in der Praxis unbedenklich Anwendung finden. Immerhin darf man eine Prüfung dieses Punktes verlangen. Ich weiss wohl, dass Weber selbst den angegebenen Ausdruck nur als angenähert richtig hinstellt, aber unbekümmert darum haben die späteren Autoren denselben als allgemein giltig angesehen. Es muss noch gesagt werden, dass die auf diesem Irrtum beruhenden Konstruktionen, die z. B. v. Gruber a. a. O. abgeleitet hat, keineswegs einfacher sind, als die beim Festhalten an Lamberts Gesetz sich ergebenden.

4. Beleuchtungsraum. Beleuchtungsvektor.

Ein anderes Maß für die Erhellung eines Elementes f durch eine reflektierende Fläche F' mit gleichförmiger Beleuchtungsstärke und gleichförmigem Rückstrahlungsvermögen, dessen wir uns im folgenden immer bedienen wollen, hat Chr. Wiener (a. a. O. Nr. 484, S. 399 bis 401) eingeführt.

Projiziert man F' (Fig. 2) senkrecht auf die Ebene von f und nennt man F'' die Projektion, dF'' die Projektion eines Elementes dF' von F', so wird

$$dF'' = dF' \cdot \cos i.$$

Daher ist die durch f von F' empfangene Beleuchtungsstärke proportional F'', somit auch proportional $F'' : \pi$, welchen Quotienten Wiener den Beleuchtungsraum der Fläche F' gegenüber dem Elemente f nennt. Zu einer unbegrenzten, mit f parallelen ebenen Fläche, wie zu der über f stehenden Hälfte der Einheitskugel gehört der Beleuchtungsraum 1; in jedem anderen Falle ist der Beleuchtungsraum < 1. Wer Webers Bezeichnungsweise (die nach dem früher Bemerkten nicht älter ist, als die Wienersche, sondern aus dem gleichen Jahre stammt), beibehalten will, sollte wenigstens, um mit Lamberts Beleuchtungslehre in Übereinstimmung zu bleiben, den Begriff des „reduzierten Raumwinkels" dahin abändern, dass er diesen nicht gleich

$$\frac{F'}{4\pi} \cdot \sin\alpha, \quad \text{sondern gleich} \quad \frac{F'}{4\pi} \cdot \varrho \sin\alpha$$

setzte, wodurch der reduzierte Raumwinkel gleich $\frac{1}{4}$ des Beleuchtungsraumes nach Wiener würde. Weber drückt Raumwinkel auch in Quadratgraden aus, von denen 41253 auf die ganze Kugeloberfläche gehen. Auf eine zu f parallele reflektierende Fläche mit einem Raumwinkel von 1 Weberschen Quadratgrad kommt daher annähernd ein Wienerscher Beleuchtungsraum von 0,0001, und dem reduzierten Raumwinkel von 50 Quadratgraden, den nach Herm. Cohn ein guter

Platz in gewöhnlichen Schulräumen mindestens haben sollte (vergl. Weber a. a. O. S. 347) entspricht ungefähr der Beleuchtungsraum 0,005.

Hat man die Beleuchtungsstärken mehrerer Flächenelemente $f, f_1, \ldots$, die von derselben reflektierenden Fläche F beleuchtet werden und denselben Mittelpunkt p, aber verschiedene Stellung besitzen, mit einander zu vergleichen, so leistet ein Begriff gute Dienste, der jetzt erklärt werden soll. Man denke sich von p in der Richtung nach dem Schwerpunkt s der Fläche F' einen Vektor von der Länge $F'\varrho : \pi$ abgetragen; er soll der **Beleuchtungsvektor** der reflektierenden Fläche F in Bezug auf den Punkt p heissen. Wie man sofort sieht, ist der Wienersche Beleuchtungsraum der reflektierenden Fläche F in Bezug auf das Flächenelement f gleich der Längenzahl der senkrechten Projektion des zum Mittelpunkt von f gehörigen Beleuchtungsvektors der Fläche F auf die Normale von f.

Aus einer bekannten Eigenschaft des Schwerpunktes folgt weiter:

Besteht F aus mehreren Teilen, so ist der Beleuchtungsvektor von F die geometrische Summe der zu jenen Teilen gehörigen Beleuchtungsvektoren.

5. Anwendung auf Innenräume mit Tagesbeleuchtung.

Nach einem Lambertschen Satze (a. a. O. S. 37, Lehrsatz 4), von dem unter Nr. 3 bereits ein besonderer Fall benützt worden ist, beleuchten zwei reflektierende Flächen mit gleicher Beleuchtungsstärke und gleichem Rückstrahlungsvermögen ein Flächenelement f gleich stark, wenn beide Flächen aus dem Mittelpunkte von f durch denselben Strahlenkegel bezw. durch dieselbe Strahlenpyramide projiziert werden. Daher würde, um wieder das Beispiel eines Gemäldesaales mit Deckenlicht zu nehmen, die Helligkeit an jeder Stelle des Saales dieselbe bleiben, wenn man die Deckenöffnung durch eine leuchtende ebene Fläche ersetzte, deren Beleuchtungsstärke und deren Rückstrahlungsvermögen natürlich denen des fraglichen Teiles des Himmelsgewölbes gleichkommen müssten. Von dieser Vorstellung ist ohnehin Gebrauch zu machen, wenn die Deckenöffnung durch mattgeschliffenes Glas geschlossen ist. Der damit erreichte Vorteil besteht darin, dass man es jetzt bei allen Punkten des untersuchten Raumes mit einer und derselben leuchtenden Fläche, und nicht mehr mit einem von Punkt zu Punkt wechselnden Stück des Himmelsgewölbes zu thun hat. (Wie sich von selbst versteht, kommt bei einer seitlichen Lichtöffnung, wenn sich das Flächenelement f oberhalb der Fensterbank befindet, nur der, über der wagerechten Ebene durch f liegende Teil der Lichtöffnung in Betracht; vergl. Wagner a. a. O.)

Beschränken wir uns zunächst auf geradlinig begrenzte Lichtöffnungen von sonst beliebiger Gestalt, dann ist der Wienersche Be-

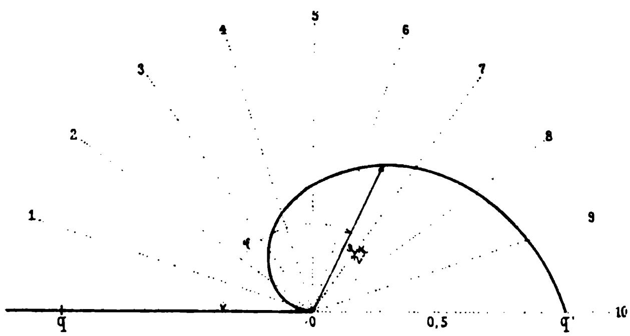
leuchtungsraum eines beliebigen Vielecks zu bestimmen. Das (nach einer Bemerkung unter Nr. 1 schon 1760 von Lambert angegebene, von Chr. Wiener a. a. O. einfacher hergeleitete) Ergebnis ist:

$$R = \frac{1}{2\pi}(\varphi_1 \cos\alpha_1 + \varphi_2 \cos\alpha_2 + \cdots + \varphi_n \cos\alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i}{2\pi} \cos\alpha_i,$$

wobei $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ die Winkel bedeuten, unter denen die n Seiten des Vielecks aus dem Mittelpunkt von f erscheinen, während α_i den Neigungswinkel der Ebene von φ_i gegen die Ebene von f bezeichnet. Von den Winkeln φ ist angenommen, dass sie in Teilen des Halbmessers ausgedrückt seien; sind sie aber in Graden gegeben, so muss man durch 360 (bezw. durch 400 bei Anwendung sogenannter neuer Teilung), statt durch 2π dividieren. Die Winkel α sind so zu nehmen, dass jeder auf der von der leuchtenden Fläche abgewendeten Seite des zugehörigen Winkels φ liegt.

Es kann der Beleuchtungsraum R mit Hilfe der analytischen Geometrie durch Rechnung, oder, was im allgemeinen vorzuziehen sein wird, unter Anwendung der darstellenden Geometrie durch Zeichnung bestimmt werden. Die in letzterem Falle nötige Verwandlung der Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ in Strecken bezw. die graphische Ermittelung der Quotienten $\varphi_i : 2\pi$ lässt sich mittelst einer auf Pauspapier gezeichneten Archimedischen Spirale sehr bequem ausführen.

Fig. 3.



Hat man (Fig. 3) auf einem Stück Pauspapier einen flachen Winkel qoq' in eine Anzahl gleicher Teile, z. B. 10, geteilt, auf dem ersten Strahl $\frac{1}{10}$ der halben Längeneinheit, auf dem zweiten $\frac{2}{10}$ u. s. w., zuletzt auf oq' die halbe Längeneinheit abgetragen und die Endpunkte durch eine stetige Kurve verbunden, so genügt es, den erhaltenen Apparat so auf den gegebenen Winkel φ zu legen, dass — gleichen Erzeugungssinn bei Winkel und Spirale vorausgesetzt — oq den ersten Schenkel von φ deckt; die Spirale wird dann auf dem anderen Schenkel das Stück $\varphi : 2\pi$ abschneiden.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, den Beleuchtungsvektor eines Vielecks in Bezug auf einen beliebigen Punkt p des Raumes zu konstruieren. Wie oben seien die Winkel, welche je zwei aufeinander

folgende Strahlen von p nach den Ecken des Vielecks einschliessen, der Reihe nach mit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ bezeichnet. Die senkrechte Projektion des gesuchten Beleuchtungsvektors v auf die Normale des Flächenelementes f muss eine Länge gleich dem Beleuchtungsraum des Vielecks, also nach dem Obigen gleich

$$\frac{\varphi_1}{2\pi}\cos\alpha_1 + \frac{\varphi_2}{2\pi}\cos\alpha_2 + \cdots + \frac{\varphi_n}{2\pi}\cos\alpha_n$$

haben. Errichtet man senkrecht auf der Ebene des Winkels φ_i, und zwar auf der dem Vieleck zugewendeten Seite, einen Vektor v_i von der Länge $\varphi_i : 2\pi$, so ist dessen Projektion auf die Normale von f gleich:

$$\varphi_i \cos\alpha_i : 2\pi.$$

Da nun die Projektion der geometrischen Summe mehrerer Vektoren auf irgend eine Gerade gleich der Summe der Projektionen jener Vektoren auf dieselbe Gerade ist, so hat die geometrische Summe der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$, und offenbar auch kein anderer Vektor, die verlangte Eigenschaft. Also:

Der Beleuchtungsvektor v einer geradlinig begrenzten Fläche in Bezug auf einen beliebigen Punkt p wird gefunden, wenn man in p auf den Verbindungsebenen dieses Punktes mit den Begrenzungsstrecken der Fläche, die, aus p gesehen, unter den Winkeln $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ erscheinen mögen, Lote errichtet, in letzteren (immer auf der, der leuchtenden Fläche zugewendeten Seite) die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ von den Längen

$$\frac{\varphi_1}{2\pi}, \frac{\varphi_2}{2\pi}, \ldots \frac{\varphi_n}{2\pi}$$

(die aus den Winkeln $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ auf die früher angegebene Art mittelst einer im voraus gezeichneten Archimedischen Spirale erhalten werden) aufträgt und diese Vektoren geometrisch addiert (d. h. wie Kräfte zu einer Resultante zusammensetzt).

Der Beleuchtungsvektor einer beliebig begrenzten Fläche lässt sich mit jeder gewünschten Genauigkeit bestimmen, indem man die vorhergehende Konstruktion auf ein ihrem Rande einbeschriebenes Vieleck mit genügend kleinen Seiten anwendet.

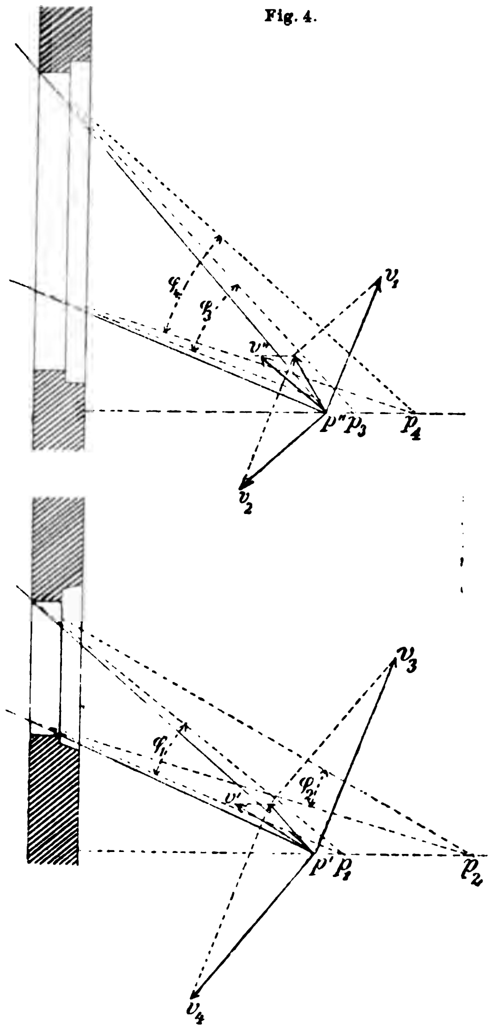
Alles dies gilt für gekrümmte Flächen so gut wie für ebene.

6. Beispiel: Beleuchtung durch ein seitliches Fenster.

Es handle sich darum, die Erhellung einer Pultfläche in dem beliebigen Punkte p durch das in Figur 4 in Grund- und Aufriss dargestellte Fenster zu beurteilen, wobei das in p sichtbare Stück des Himmels nach unten durch die Ebene von p nach einem zur Fensterwand parallelen Dachfirst begrenzt sein möge. Die vierseitige Lichtpyramide, deren Spitze p ist, hat zwei zur Aufrissebene, zwei zur

Grundrissebene senkrechte Seitenflächen. Die in den ersteren liegenden Kantenwinkel sollen φ_1 und φ_2, die übrigen φ_3 und φ_4 heissen. Die wahre Grösse dieser Winkel lässt sich durch Drehen ihrer Ebenen (etwa um die Spuren mit der äusseren Fensterwand) in Parallelstellung mit der Grundriss- bezw. Aufrissebene finden. (Die Scheitel der Winkel kommen dadurch beziehentlich in die Lagen p_1, p_2, p_3, p_4.) Die Vektoren v_1 und v_2 werden parallel zur Aufrissebene, die Vektoren v_3 und v_4 parallel zur Grundrissebene, weshalb erstere im Aufriss, letztere im Grundriss in wahrer Länge erscheinen. Der Grundriss des resultierenden Vektors v ist mit v', der Aufriss mit v'' bezeichnet; v_1 und v_2 für sich zusammengesetzt, geben eine zur Aufrissebene parallele, v_3 und v_4 eine wagerechte Komponente von v. Die Pultfläche würde unter sonst gleichen Umständen die grösstmögliche Helligkeit zeigen, wenn sie senkrecht zu dem gefundenen Beleuchtungsvektor v wäre. Der ihr zukommende Wienersche Beleuchtungsraum wäre dann gleich der wahren Länge von v; die Zeichnung hat — bei Benützung einer für die Längeneinheit 400 mm konstruierten Archimedischen Spirale, von der jedoch nur ein kurzes Stück nötig war — ungefähr die Länge 14 mm, also den Beleuchtungsraum 0,035 ergeben. Bei anderer Neigung der Pultfläche muss der Vektor v auf ihre Normale projiziert werden. Für eine wagerechte Fläche liefert die Zeichnung (durch die etwa 7 mm lange lotrechte Komponente von v) einen Beleuchtungsraum vom ungefähren Betrage 0,018. Sind bloss wagerechte Flächen auf ihre Helligkeit zu untersuchen, so brauchen die Vektoren v_3 und v_4 nicht konstruiert zu

Fig. 4.



werden, weil sie keinen Beitrag zur lotrechten Komponente von v geben; die Zeichenarbeit vermindert sich dann um die Hälfte. Bei mehreren Fenstern sind für jedes einzelne die Konstruktionen auszuführen und die erhaltenen Beleuchtungsvektoren geometrisch (bezw. die Beleuchtungsräume arithmetisch) zu addieren.

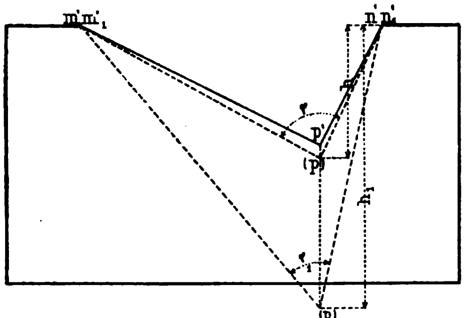
B. Anwendung auf Gemäldesäle mit Deckenlicht.

7. Beleuchtungsstärke einer beliebigen Stelle einer Wand.

Wir wollen uns auf die Untersuchung einer Saalwand und auf den Fall einer rechteckigen Deckenöffnung mit einem Paare zur Wand paralleler Seiten beschränken.

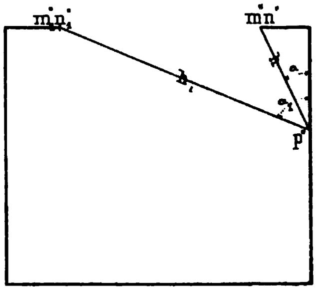
Bei Fragen wie der, welchen Einfluss auf die Helligkeit das Vorwärtsneigen eines Bildes um einen gegebenen Winkel hat, ist es nötig, den Beleuchtungsvektor zu konstruieren. Die Ausführung stimmt mit der unter Nr. 6 beschriebenen ganz überein, denn kippt

Fig. 5.



Aufriss.

Fig. 6.



Seitenriss.

man den Saal in Gedanken um eine Bodenkante, so wird das Deckenfenster zu einem seitlichen.

Einfacher ist die Bestimmung des Beleuchtungsraumes R der Deckenöffnung, deren Ecken m, n, m_1, n_1 heisen sollen, in Bezug auf irgend ein, an der Stelle p gelegenes Element der Wand. Die Formel in Nr. 5 ergiebt:

$$R = \frac{\varphi}{2\pi}\cos\alpha - \frac{\varphi_1}{2\pi}\cos\alpha_1,$$

wo φ und φ_1 die Winkel bezeichnen, unter denen die zur Wand parallelen Seiten mn und $m_1 n_1$ der Öffnung aus p gesehen erscheinen, α und α_1 die spitzen Winkel der Ebenen von φ und φ_1 mit der Wand.* Hat man mittelst der dem Seitenriss (Fig. 6) entnommenen Höhen h

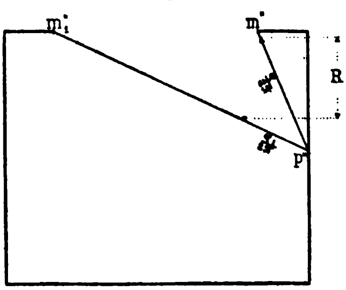
---

* Magnus hat irrtümlicherweise $(\alpha_1 - \alpha)$ als Maß der Helligkeit in p betrachtet, Mentz dagegen $(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_1)$ als Maß für die Erhellung durch eine zur Wand senkrechte Lamelle der Lichtpyramide.

und h_1 der Dreiecke mnp und m_1n_1p die wahre Grösse der Winkel φ und φ_1 im Aufriss (Fig. 5) bestimmt und daraus mit Hilfe der Archimedischen Spirale die Strecken $\varphi : 2\pi$ und $\varphi_1 : 2\pi$ abgeleitet, so genügt es, letztere im Seitenriss von p aus in den Geraden pm und pm_1 (Fig. 7) abzutragen und auf die Wand zu projizieren; der Unterschied der Projektionen, mit der Längeneinheit der verwendeten Spirale gemessen, giebt den gesuchten Beleuchtungsraum R.

Um R durch Rechnung zu bestimmen, kann man ein Cartesisches Koordinatensystem, etwa mit der Schnittlinie der Wand und der Decke als x-Axe und der Lotrechten durch die Projektion des Mittelpunktes der Deckenöffnung auf die Wand als z-Axe annehmen. Wird die halbe Länge der Deckenöffnung — unter Länge die zur untersuchten Saalwand parallele Abmessung verstanden — mit l, die halbe Breite derselben mit b, die Entfernung des Mittelpunktes der Deckenöffnung von der Wand (gleich der halben Saalbreite bei regelmässiger Anordnung) mit b' bezeichnet, so ist:

Fig. 7.



$$2)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b'-b}{z}, \\ \operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{b'+b}{z}, \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} h = \dfrac{b'-b}{\sin\alpha} = \dfrac{z}{\cos\alpha}, \\ h_1 = \dfrac{b'+b}{\sin\alpha_1} = \dfrac{z}{\cos\alpha_1}, \end{cases}$$

$$4)\quad \varphi = \chi + \psi, \quad \varphi_1 = \chi_1 + \psi_1,$$

wo

$$5)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\chi = \dfrac{l+x}{h}, \quad \operatorname{tg}\psi = \dfrac{l-x}{h}, \\ \operatorname{tg}\chi_1 = \dfrac{l+x}{h_1}, \quad \operatorname{tg}\psi_1 = \dfrac{l-x}{h_1}. \end{cases}$$

Bei der Ausrechnung genügen für gewöhnlich dreistellige Logarithmen.

Die Helligkeit in irgend einem Punkte der Wand hängt von den Koordinaten dieses Punktes, den Abmessungen des Deckenlichts und der Saalbreite ab, mit anderen Worten: der Beleuchtungsraum R ist eine Funktion der fünf Veränderlichen x, z, l, b, b', die wir mit $f(x, z, l, b, b')$ bezeichnen wollen.

Aus den Gleichungen 4) und 5) folgt:

$$6)\quad \begin{cases} \varphi = arc\operatorname{tg}\dfrac{l+x}{h} + arc\operatorname{tg}\dfrac{l-x}{h}, \\ \varphi_1 = arc\operatorname{tg}\dfrac{l+x}{h_1} + arc\operatorname{tg}\dfrac{l-x}{h_1}. \end{cases}$$

Setzt man diese Werte, sowie

$$\cos\alpha = \frac{z}{h}, \quad \cos\alpha_1 = \frac{z}{h_1},$$

in die erste Gleichung ein, so kommt als ein Ausdruck der fraglichen Funktion:

$$7)\quad \begin{cases} R = f(x, z, l, b, b') \\ \quad = \frac{z}{2\pi h}\left(arc\,tg\,\frac{l+x}{h} + arc\,tg\,\frac{l-x}{h}\right) \\ \quad - \frac{z}{2\pi h_1}\left(arc\,tg\,\frac{l+x}{h_1} + arc\,tg\,\frac{l-x}{h_1}\right), \end{cases}$$

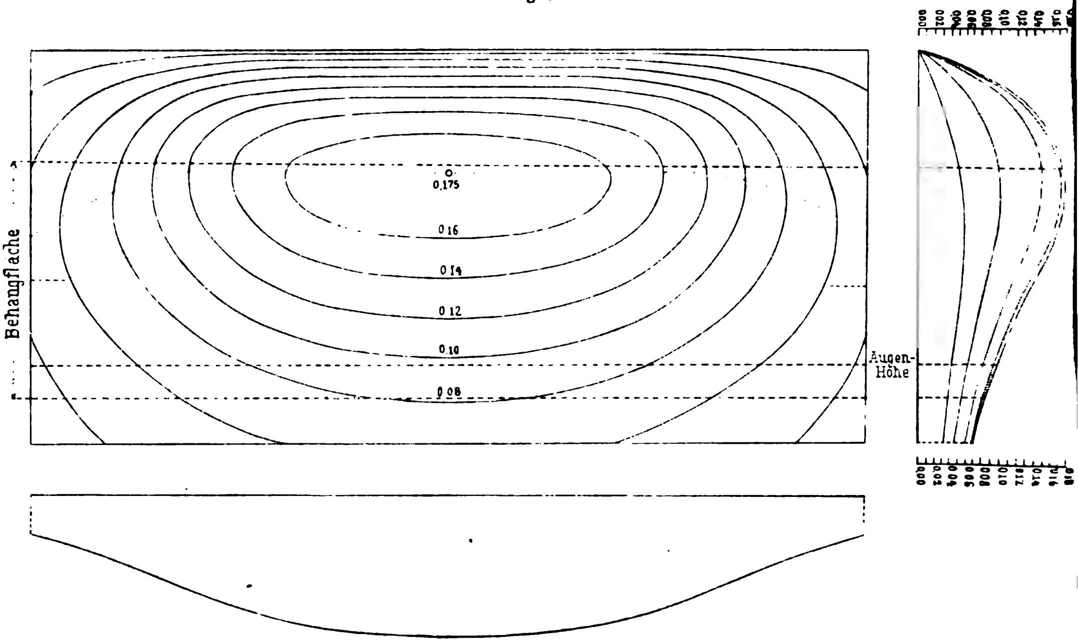
worin

$$8)\quad h = +\sqrt{(b'-b)^2 + z^2}, \quad h_1 = +\sqrt{(b'+b)^2 + z^2}.$$

8. Linien gleicher Helligkeit.

Wir denken uns in jedem Punkte der Wand senkrecht zu ihr den als Strecke dargestellten Beleuchtungsraum der Deckenöffnung in Be-

Fig. 8



zug auf diesen Punkt abgetragen. Die Endpunkte erfüllen eine (offenbar zur yz-Ebene symmetrische) Fläche, deren Gestalt eine klare Vorstellung von den Abstufungen der Beleuchtungsstärke oder, falls überall gleiches Rückstrahlungsvermögen vorausgesetzt wird, von den Abstufungen der Helligkeit auf der Wand giebt. In Bezug auf das in Nr. 7 eingeführte Koordinatensystem hat die betrachtete Fläche die Gleichung $y = f(x, z)$, mit $f(x, z)$ als der durch 7) definierten Funktion; sie ist also transcendent. Behufs Darstellung dieser Fläche denke man sich die Wand mit einem Netz von lotrechten und wagerechten Linien überzogen, die einander etwa in 1 m Abstand folgen, und bestimme für die Knotenpunkte entweder graphisch oder durch Rechnung nach Nr. 7 den Beleuchtungsraum der Deckenöffnung. Trägt man immer

für die Punkte einer und derselben Lotrechten oder einer und derselben Wagerechten die zugehörigen Strecken im Seitenriss bezw. im Grundriss ab — die Wand als Aufrissebene gedacht — und verbindet man die Endpunkte durch eine stetige Kurve, so ergeben sich die Schnitte der gesuchten Fläche mit einer Reihe von zur Seitenebene bezw. zur Grundrissebene parallelen Ebenen. Man erhält daraus in einfachster Weise die Schnitte der Fläche mit beliebigen zur Wand parallelen Ebenen, deren Aufrisse Linien gleicher Helligkeit sind. Figur 8 zeigt ein (von mir gezeichnetes und bereits von Wagner a. a. O. verwendetes) Beispiel; es betrifft die in $\frac{1}{150}$ n. Gr. dargestellte Langwand eines Saales von 16,60 m Länge, 9,10 m Breite und 7,85 m Höhe; das Deckenlicht hat 12,20 m Länge und 4,70 m Breite. (Drei weitere von mir bezw. nach meiner Angabe durchgeführte Beispiele, darunter zwei Gemäldekabinette mit Seitenlicht, findet man a. a. O. S. 230, 252, 253). Mohrmann und Menz haben (a. a. O.) auch schon Linien gleicher Helligkeit gezeichnet, aber nicht richtig.

9. Relativ hellste Punkte in Wagerechten und Senkrechten.

Für Punkte in einer beliebigen wagerechten Linie der Wand ist z wie auch h und h_1 konstant. Durch partielle Ableitung nach x erhält man aus Gleichung 7) nach leichter Umformung

$$9)\quad \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2lxz}{\pi}\left(\frac{1}{[h^2+(l+x)^2][h^2+(l-x)^2]} - \frac{1}{[h_1{}^2+(l+x)^2][h_1{}^2+(l-x)^2]}\right).$$

Wegen $h < h_1$ ist die Klammergrösse immer positiv, weshalb $\frac{\partial f}{\partial x}$ das Vorzeichen von $-x$ hat, also die Funktion f oder mit anderen Worten die Helligkeit von der Mitte — der z-Axe — nach beiden Seiten hin fortwährend abnimmt.

Auch in jeder senkrechten Linie der Wand befindet sich ein relativ hellster Punkt. Man bestimmt ihn graphisch mit Hilfe einer senkrechten Tangente, die man im Seitenriss an den betreffenden senkrechten Schnitt der unter Nr. 8 eingeführten Helligkeitsfläche legt. Die Tiefe z eines solchen Punktes unter der Decke ist Wurzel der transcendenten Gleichung $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, die ausführlich hier anzuschreiben überflüssig ist, wie auch der Beweis übergangen werden soll, dass nur eine Wurzel vorhanden ist und ihr wirklich ein Maximum von f entspricht. Mentz hat angenommen, der Ort dieser Punkte sei eine wagerechte Gerade, die er Intensitätspolare nennt. Wäre das richtig, so dürfte $\frac{\partial f}{\partial z}$ x nicht enthalten oder es müsste $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0$ sein, d. h. es könnte $\frac{\partial f}{\partial x}$ nicht von z abhängen, entgegen dem, was der obige Ausdruck für $\frac{\partial f}{\partial x}$ zeigt. Der fragliche, in Fig. 8 punktiert eingezeichnete

Ort ist also eine (zur z-Axe symmetrische transcendente) Kurve, über die noch bemerkt werden möge, dass sie von dem hellsten Punkte der Wand nach beiden Seiten fällt, entweder unmittelbar, oder nachdem sie (vergl. Fig. 8) sich etwas über den hellsten Punkt erhoben hat, und sich beiderseits je einer schiefen Geraden asymptotisch nähert. Wünscht man zu einzelnen Abscissen x die Ordinaten der betreffenden Kurvenpunkte zu berechnen, was allerdings ein mühsames Geschäft ist, so mag man (mit Anwendung der früheren Bezeichnungen) die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ nach Multiplikation mit $2\pi z$ auf die Form

$$10)\quad \begin{cases} \varphi \cos\alpha \sin^2\alpha + \sin\varphi_1 \cos(\chi_1 - \psi_1)\cos^3\alpha_1 = \varphi_1 \cos\alpha_1 \sin^2\alpha_1 \\ \qquad\qquad + \sin\varphi \cos(\chi - \psi)\cos^3\alpha \end{cases}$$

bringen, jedesmal den graphisch gefundenen Näherungswert von z einsetzen und sich dabei der in dieser Zeitschrift, Bd. 36, S. 158 flg., 1891, beschriebenen Methode — Anwendung der Additionslogarithmen und Berechnung von Korrektionen durch Proportionalteile — bedienen. Die „vorbereitenden" Gleichungen werden dann, abgesehen von den früheren 2)—5)*

$$11)\quad \begin{cases} A = \log\varphi^0 + E\log\varrho^0 + \log\cos\alpha + 2\log\sin\alpha \\ \qquad\qquad + E3\log\cos\alpha_1 + E\log\sin\varphi_1 + E\log\cos(\chi_1 - \psi_1), \end{cases}$$

$$12)\quad \begin{cases} A_1 = \log\varphi_1^0 + E\log\varrho^0 + \log\cos\alpha_1 + 2\log\sin\alpha_1 \\ \qquad\qquad + E3\log\cos\alpha + E\log\sin\varphi + E\log\cos(\chi - \psi), \end{cases}$$

und die „Schlussgleichung", aus der die Korrektion von $\log z$ gefunden wird:

$$13)\quad \begin{cases} B + EB_1 + 3\log\cos\alpha_1 + \log\sin\varphi_1 + \log\cos(\chi_1 - \psi_1) \\ \qquad\qquad + E3\log\cos\alpha + E\log\sin\varphi + E\log\cos(\chi - \psi) = 0. \end{cases}$$

10. Hellster Punkt der Wand.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass in der senkrechten Mittellinie der Wand ein graphisch leicht zu bestimmender hellster Punkt vorhanden ist, dessen Tiefe z unter der Decke der für $x = 0$ gebildeten transcendenten Gleichung $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, nämlich

$$14)\quad \begin{cases} \frac{(b'-b)^2}{h_3} arc\,tg\,\frac{l}{h} - \frac{(b'+b)^2}{h_1^3} arc\,tg\,\frac{l}{h_1} \\ \qquad\qquad + lz^2\left[\frac{1}{h_1^2(h_1^2+l^2)} - \frac{1}{h^2(h^2+l^2)}\right] = 0 \end{cases}$$

genügt, wo h und h_1 die in 8) angegebenen Funktionen von z sind.

* φ^0 bedeutet den in Graden ausgedrückten Winkel φ, ϱ^0 die auf den Bogen von der Länge 1 kommende Zahl von Graden, E die dekadische Ergänzung des nachfolgenden Logarithmus, B den Wert, den die Tafel der Additionslogarithmen zum Argument A liefert.

Mentz hat behauptet, wenn die Deckenöffnung vergrössert werde, so gehe der hellste Punkt der Wand in die Höhe. Das ist nur teilweise richtig, denn es kann, wie sich zeigen wird, die Vergrösserung der Deckenöffnung auch in solcher Weise vorgenommen werden, dass der hellste Punkt an seiner Stelle bleibt oder sogar nach unten rückt. Die analytische Untersuchung der Abhängigkeit der Lage des hellsten Punktes der Wand von den Abmessungen des Deckenlichtes bei gegebener Breite des Saales, obwohl in der Theorie so einfach, hat angesichts der ungefügen Ausdrücke in 14) nichts Verlockendes. Um in dieser Sache klar zu sehen, habe ich für die konstante Saalbreite $2b' = 10\,m$ und für die Längen $2l = 0, 2, 4, 6, \ldots, 18, 20, \infty$ sowie eine hinreichende Zahl verschiedener Breiten der Deckenöffnung die Tiefe des hellsten Punktes berechnet und als Ordinate zu der als Abscisse angenommenen jedesmaligen Breite der Deckenöffnung aufgetragen, wodurch die Kurven in Tafel III entstanden sind. Diese Kurven zeigen aufs Deutlichste, dass bei gleichbleibender Länge der Deckenöffnung der hellste Punkt in der That nach oben rückt, wenn ihre Breite vergrössert wird, und zwar um so schneller, je grösser die ursprüngliche Breite war, dass dagegen der hellste Punkt nach unten rückt, wenn die Breite beibehalten, die Länge vergrössert wird. Wie man weiter sieht, hat die Veränderung der Länge einen verhältnismässig geringen Einfluss auf die Höhenlage des hellsten Punktes. Lässt man bei gegebener Breite $2b$ der Deckenöffnung die Länge in Gedanken über alle Grenzen hinaus wachsen, so rückt der hellste Punkt nur bis zu einer bestimmten endlichen Tiefe hinunter. Denn für $x = 0$, $l = \infty$ erhält man $\varphi = \varphi_1 = \pi$ oder

$$R = f(z) = \frac{1}{2}\,(\cos\alpha - \cos\alpha_1) = \frac{z}{2}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_1}\right),$$

mit

$$h^2 = (b' - b)^2 + z^2, \quad h_1{}^2 = (b' + b)^2 + z^2,$$

und als Gleichung, aus der z zu berechnen ist, ergiebt sich

$$\frac{(b' - b)^2}{h^3} = \frac{(b' + b)^2}{h_1{}^3},$$

woraus man mit den Abkürzungen

$$b' - b = a, \quad b' + b = a_1$$

findet:

15) $$z = \frac{a^{\frac{2}{3}}\, a_1{}^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} + a_1{}^{\frac{2}{3}}}}.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in den obigen Ausdruck für R erhält man als obere Grenze für den Beleuchtungsraum im hellsten Punkte der Wand bei gegebenem b:

16) $$R = \frac{1}{2}\,\frac{a_1{}^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\, a_1{}^{\frac{2}{3}} + a_1{}^{\frac{4}{3}}}},$$

und als grössten Wert hiervon bei $a = 0$, also $b' = b$, d. h. im Falle eines die ganze Saalbreite einnehmenden Deckenlichtes:

$$R = \frac{1}{2}.$$

Aus Tafel III ist Tafel IV abgeleitet, die den Zweck hat, für einen Saal von 10 m Breite und beliebigen Abmessungen des Deckenlichts bis zu 20 m Länge und 10 m Breite augenblicklich die Höhenlage des hellsten Punktes zu liefern. Man sucht den gegebenen Wert der Länge $2l$ des Deckenlichts auf dem wagerechten Maßstabe, denjenigen der Breite $2b$ auf dem senkrechten Maßstabe, geht von dem ersteren Punkte senkrecht herunter bis zu der Wagerechten durch den letzteren und liest an der durch den erhaltenen Punkt gehenden Kurve die gesuchte Tiefe des hellsten Punktes der Wand unter der Decke ab. Die Tafel kann natürlich auch Anwendung finden, wenn die Saalbreite grösser oder kleiner als 10 m ist, denn bei proportionaler Vergrösserung oder Verkleinerung aller Abmessungen ändert sich die Tiefe des hellsten Punktes unter der Decke im gleichen Verhältnis.

Die Anschauungen von Magnus über die Lage des hellsten Punktes stimmen mit unseren Ergebnissen ebenfalls nicht überein. So schätzte Magnus bei einem quadratischen Saal von 25′ Höhe und 35′ Breite, dessen Deckenlicht $\frac{1}{3}$ der Saalbreite einnimmt, die Bodenhöhe des hellsten Punktes auf 8′, welche Höhe er als die angenehmste für den Beschauer ansieht. Bei 10 m Breite und den angegebenen Verhältnissen ergiebt sich aber für den hellsten Punkt etwa 2,64 m, also bei 35′ Breite 9,24′ Deckentiefe oder 15,76′ Bodenhöhe, also fast das Doppelte des von Magnus geschätzten Wertes, ja es wäre sogar durch unendliche Verlängerung des Saales und des Deckenlichtes nicht möglich, den hellsten Punkt auf die von Magnus verlangte Höhe von 8′ herunter zu bringen, da bei den obigen Verhältnissen

$$a_1 = 2a, \quad 3a = 35'$$

ist, also Gleichung 15):

$$z = 11{,}5',$$

d. h. 13,5′ Bodenhöhe für den hellsten Punkt liefert.

Bei der Konstruktion der Tafel III genügte die graphische Bestimmung der zu verschiedenen Wertepaaren l, b gehörigen Werte von z nicht, sondern es musste die Genauigkeit durch Rechnung erhöht werden. Es wurde dabei folgender Weg eingeschlagen. Für

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b'-b}{z}, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{b'+b}{z},$$

$$h = \frac{z}{\cos \alpha} = \frac{b'-b}{\sin \alpha}, \quad h_1 = \frac{z}{\cos \alpha_1} = \frac{b'+b}{\sin \alpha_1},$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{l}{h}, \quad \operatorname{tg} \psi_1 = \frac{l}{h_1},$$

geht Gleichung 14) nach Multiplikation mit l und Trennung der positiven und negativen Glieder über in

$$17)\quad \psi \sin^2\alpha \operatorname{tg}\psi + \sin^2\psi_1 \cos^2\alpha_1 = \psi_1 \sin^2\alpha_1 \operatorname{tg}\psi_1 + \sin^2\psi \cos^2\alpha.$$

Die Anwendung der Additionslogarithmen führt zur Aufstellung der vorbereitenden Gleichungen:

$$18)\quad \begin{cases} A = \log\psi^0 + E\log\varrho^0 + 2\log\sin\alpha + \log\operatorname{tg}\psi + E\,2\log\sin\psi_1 \\ \qquad + E\,2\log\cos\alpha_1 \end{cases}$$

und

$$19)\quad \begin{cases} A_1 = \log\psi^0{}_1 + E\log\varrho^0 + 2\log\sin\alpha_1 + \log\operatorname{tg}\psi_1 + E\,2\log\sin\psi \\ \qquad + E\,2\log\cos\alpha, \end{cases}$$

sowie der Schlussgleichung:

$$20)\quad \begin{cases} B + EB_1 + 2\log\sin\psi_1 + 2\log\cos\alpha_1 + E\,2\log\sin\varphi \\ \qquad + E\,2\log\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Die graphisch, mitunter auch nur durch Schätzung gefundenen Näherungswerte z wurden in diese Gleichungen eingesetzt, worauf sich durch Anwendung der Methode der Proportionalteile aus der Schlussgleichung eine Korrektion von $\log z$ ergab. Vom Hersetzen eines Zahlenbeispieles glaube ich absehen zu dürfen.

Zur Berechnung der Senkungen der Knotenpunkte eines Fachwerks.

Von

E. Hammer

in Stuttgart.

In der Abhandlung „Berechnung der Durchbiegungen und der Nebenspannungen der Fachwerksträger“ (Zeitschrift für Bauwesen, herausgegeben im Preussischen Ministerium der öffentlichen Arbeiten, Jahrgang 48, 1898, Heft I bis III, S. 111 flg.) macht der Verfasser, Baurat A. Francke, von folgendem Verfahren Gebrauch:

Nach Ermittelung der Hauptspannungen S der einzelnen Fachwerksglieder kann man die Längenänderungen der Seiten jedes der Fachwerksdreiecke einfach berechnen. Sind a, b, c die Seitenlängen eines spannungslosen Dreiecks,

$$a_1 = a + \varDelta a, \quad b_1 = b + \varDelta b, \quad c_1 = c + \varDelta c$$

die durch die Spannungen S_a, S_b, S_c im belasteten Zustand geänderten Seitenlängen, so ist, wenn F_a, F_b, F_c die Querschnittszahlen der Stäbe a, b, c und E_a, E_b, E_c ihre Elastizitätsmaße sind:

$$\varDelta a = \frac{S_a}{F_a \cdot E_a}, \quad \varDelta b = \frac{S_b}{F_b \cdot E_b}, \quad \varDelta c = \frac{S_c}{F_c \cdot E_c}.$$

Damit kann man die Winkeländerungen des Dreiecks (a, b, c) infolge der Belastung bestimmen, und aus ihnen lassen sich einfach die Richtungsänderungen (Neigungsänderungen) der einzelnen Gurtungsglieder zusammensetzen, womit die gesuchten Einsenkungen der Knotenpunkte unmittelbar bekannt sind.

Es handelt sich also um Berechnung der Winkeländerungen eines Dreiecks aus gegebenen kleinen Veränderungen zweier Seiten. Herr Francke erhält zur Berechnung dieser Winkeländerungen mit den Bezeichnungen:

$$2s = a + b + c,$$

$$2s_1 = a_1 + b_1 + c_1 \text{ (siehe oben)},$$

A, B, C die Winkel des ursprünglichen, A_1, B_1, C_1 Winkel in dem veränderten Dreieck, F Inhalt des einen oder andern Dreiecks,

$$\alpha = A_1 - A\,,\quad \beta = B_1 - B\,,\quad \gamma = C_1 - C$$

und mit Hilfe der Grössen

$$\varDelta_A = s(s-a)(s_1-b_1)(s_1-c_1) - s_1(s_1-a_1)(s-b)(s-c),$$
$$\varDelta_B = s(s-b)(s_1-c_1)(s_1-a_1) - s_1(s_1-b_1)(s-c)(s-a),$$
$$\varDelta_C = s(s-c)(s_1-a_1)(s_1-b_1) - s_1(s_1-c_1)(s-a)(s-b)$$

für die gesuchten Winkeländerungen die Gleichungen:

I) $$\alpha = \frac{\varDelta_A}{F\cdot bc},\quad \beta = \frac{\varDelta_B}{F\cdot ca},\quad \gamma = \frac{\varDelta_C}{F\cdot ab}.$$

Diese Berechnung ist aber offenbar nicht bequem; man muss die Zähler der Brüche in I), die als Differenzen grosser Zahlen entstehen, viel zu scharf, mit vielstelligen Logarithmen berechnen, wenn das Resultat genügend ausfallen soll. Man hat zur Berechnung von $\varDelta_A$, $\varDelta_B$, $\varDelta_C$ nicht weniger als 8 Logarithmen scharf (z. B. 6—7 stellig) aufzuschlagen und dazu sechs Zahlen scharf aufzusuchen, um schliesslich allenfalls mit dem Rechenschieber nach I) rechnen zu können. Eine Ersparnis an Rechenarbeit gegen das Verfahren, das Dreieck (a, b, c), und sodann das Dreieck (a_1, b_1, c_1) mit der vorhin angegebenen Zahl von Logarithmendezimalen direkt aufzulösen (also z. B. A und A_1 direkt auf 0″, 5 zu rechnen und daraus $\alpha = A_1 - A$ zu bilden) wird gar nicht mehr erzielt. Dazu entbehrt die Rechnung nach I) der Probe, die man bei der eben angegebenen nächstliegenden Rechnungsweise in den Winkelsummen erhält.

Da ich der Ansicht bin, dass man bei ähnlichen Dingen, d. h. überall in der praktischen Differentialrechnung, sich durchaus des Rechenschiebers statt der vielziffrigen Logarithmentafel bedienen sollte, wobei nur die Formeln entsprechend herzurichten sind, so möchte ich mir gestatten, für diese Rechnung folgende Form vorzuschlagen. Differentiiert man, um aus $\varDelta a$, $\varDelta b$, $\varDelta c$ die Veränderung $\varDelta A$ an A zu berechnen, die Gleichung

$$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2,$$

so erhält man leicht für $\alpha\ (= \varDelta A)$ die Gleichung (ich behalte die Bezeichnungen des Herrn Francke bei):

$$\alpha = \frac{1}{c\sin B}(\varDelta a - \cos C\varDelta b - \cos B\varDelta c),$$

die sich mit $c = \frac{a\sin C}{\sin A}$ und $\frac{\sin A}{\sin B\sin C} = \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} B$ auf die viel einfachere und symmetrische Form bringen lässt:

$$\alpha = \left(\frac{\varDelta a}{a} - \frac{\varDelta b}{b}\right)\operatorname{cotg} C + \left(\frac{\varDelta a}{a} - \frac{\varDelta c}{c}\right)\operatorname{cotg} B.$$

Diese Form halte ich im vorliegenden Fall für die beste*; sie setzt allerdings voraus, dass die Winkel des ursprünglichen Dreiecks oder besser gleich ihre cotg ebenfalls bekannt, also aus a, b, c berechnet oder sonstwie ermittelt seien. Da es auf grosse Genauigkeit in diesen cotg der Dreieckswinkel nicht ankommt, so kann man sie sich, wenn sie im Fall des Fachwerks nicht a priori bekannt sind ($45^0, 90^0, 60^0$) mittelbar dadurch bestimmen, dass man in der Zeichnung die Höhen der Dreiecke zieht, an der Rechenschieber-Maßstabkante die Höhen und Seitenabschnitte abliest, um mit dem Rechenschieber die cotg-Brüche sofort bilden zu können.

Die Formelgruppe, die ich an Stelle von I. vorschlagen möchte, ist also (die gesuchten Winkelveränderungen α, β, γ wie oben in Halbmesserteilen):

$$\text{II)} \quad \begin{cases} \alpha = \left(\frac{\varDelta a}{a} - \frac{\varDelta b}{b}\right) \operatorname{cotg} C + \left(\frac{\varDelta a}{a} - \frac{\varDelta c}{c}\right) \operatorname{cotg} B \\ \beta = \left(\frac{\varDelta b}{b} - \frac{\varDelta c}{c}\right) \operatorname{cotg} A + \left(\frac{\varDelta b}{b} - \frac{\varDelta a}{a}\right) \operatorname{cotg} C \\ \gamma = \left(\frac{\varDelta c}{c} - \frac{\varDelta a}{a}\right) \operatorname{cotg} B + \left(\frac{\varDelta c}{c} - \frac{\varDelta b}{b}\right) \operatorname{cotg} A. \end{cases}$$

Die Gleichungen II) verifizieren sich damit sehr einfach, dass

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

sein muss, was der Anblick bestätigt, da in den sechs Ausdrücken, die rechts auftreten, nur drei verschiedene Werte je mit entgegengesetzten Zeichen vorhanden sind, und dass bei ähnlicher Veränderung des Dreiecks, also Gleichheit und Gleichzeichigkeit der Verhältnisse $\frac{\varDelta a}{a}, \frac{\varDelta b}{b}, \frac{\varDelta c}{c}$, die Werte von α, β, γ verschwinden müssen, was ebenfalls der Anblick von II) bestätigt.

Man hat zur Anwendung der Gleichungen II) nur die drei Verhältniszahlen $\frac{\varDelta a}{a}, \frac{\varDelta b}{b}, \frac{\varDelta c}{c}$ mit dem Rechenschieber in Dezimalbruchform zu verwandeln, die Differenz je zweier zu bilden, diese wieder mit Hilfe des Schiebers mit der cotg des nicht gleich benannten Winkels zu multiplizieren und je zwei dieser Produkte (mit dem richtigen Vorzeichen) zu addieren (wobei man sich, um des Vorzeichens sicher zu sein, nur zu merken braucht, dass in den Klammern in II. die dem Winkel gleich benannte Seite voransteht), um sofort die Winkeländerungen in Halbmesserteilen zu haben. Man wird kaum eine bequemere Rechnung dafür finden können; ein bestimmtes Dreieck lässt sich ganz gut in einer Minute so durchrechnen.

Nehmen wir als Zahlenbeispiel das folgende (absichtlich eines, bei dem die Beziehungen so einfach sind, dass selbst die II. entbehrlich

* Vergl. einen Aufsatz des Verfassers in Zeitschr. für Vermess. 1895, S. 165; ferner Lehrbuch der Trigonometrie, 2. Aufl. 1897, S. 405.

wären): Die Katheten eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks seien 4000,0 und 4000,0 mm lang, die Hypotenuse also $4000\sqrt{2} = 5656,86$ mm. Die Katheten werden um je 4,0 mm verlängert $\Big($die Maße sind ganz willkürlich angenommen, eine Streckung um $\frac{1}{1000}$ kommt bei Fachwerken aus Eisen ja nicht in Betracht, nur etwa $\frac{1}{2000}\Big)$, die Hypotenuse um 3,0 mm verlängert. Welche Winkel erhält das Dreieck statt der ursprünglich vorhandenen 45°, 45° und 90°?

Es ist hier $\operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} C = 1$, $\operatorname{cotg} A = 0$; also aus II) mit

$$b = c = 4000,\ \varDelta b = \varDelta c = +4,0;\ a = 5657,\ \varDelta a = +3,0:$$

$$\alpha = 2\left(\frac{3}{5657} - \frac{4}{4000}\right),$$

oder nach Ablesung des ersten Bruchs am Rechenschieber (ich habe hier den 50 cm-Schieber benutzt, obwohl für die Praxis der 25 cm-Schieber auch hier ausreicht):

$$\alpha = -0,000939_4,$$

in Winkelmaß:

$$\alpha'' = -0,000939_4 .\ 206265'' = -193_5'' = -3'\,14''.$$

Die Änderungen der Winkel B und C sind hier selbstverständlich

$$\beta = \gamma = -\frac{1}{2}\alpha = +1'\,37'';$$

nach Anblick von II) wird in der That:

$$\beta = \gamma = \frac{4}{4000} - \frac{3}{5657} = +0,000469_7 .$$

Rechnet man direkt mit Logarithmen, so findet man mit $a = 5,656854$, $b = c = 4,000000$, also $a_1 = 5,659854$, $b_1 = c_1 = 4,004000$:

$$\sin\frac{A_1}{2} = \frac{5,659854}{8,008000},\ \text{d. h.}$$

$$A_1 = 44^0 58'\,22'',_7 \quad \text{oder} \quad \alpha = -3'\,14''$$

wie oben, u. s. w.

Ist das Dreieck ursprünglich rechtwinklig

$$\left(\operatorname{cotg} A = 0,\quad \operatorname{cotg} B = \frac{1}{\operatorname{cotg} C}\right)$$

oder ursprünglich gleichschenklig (z. B. $\operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} C$), so vereinfacht sich natürlich die Anwendung von II) noch sehr.

Selbstverständlich berührt all' das Vorstehende die von Herrn Francke a. a. O. aufgestellten Gleichungen zur Ausrechnung der linearen Durchbiegungen mit Hilfe der α (s. z. B. Sp. 114 und 115) in keiner Weise; man sollte sich nur zur Rechnung dieser y wieder unbedingt des Rechenschiebers bedienen, der für solche Dinge viel Zeit und Mühe erspart.

Zur graphischen Behandlung der Kräfte im Raume.

Von **W. Stäckel** in Charlottenburg.

A. Die Zusammensetzung der Kräfte im Raume lässt sich bekanntlich in der Weise durchführen, dass man jede Kraft in zwei Komponenten zerlegt, von denen die erste in einer Ebene E liegt, während die andere entweder senkrecht zu E oder parallel zu einer Geraden G oder durch einen fixierten Punkt O läuft. Der Kürze wegen seien diese Methoden hier mit Orthogonal-, Parallel- resp. Centralreduktion (E, G resp. O) bezeichnet.

Zur Konstruktion der Centralaxe empfiehlt sich die Orthogonalreduktion. Man setze die vorliegenden Kräfte zunächst vermittelst Kräftepolygons so zusammen, als ob sie alle in demselben Punkte angriffen. Die hierbei resultierende Kraft sei im folgenden kurzweg die Wertresultante (R_w) genannt. Wählt man jetzt $E \perp R_w$, so liefert die Orthogonalreduktion (E, R_w) eine Kraft gleich und parallel R_w und ein Moment in der Ebene E. Die gewonnene Wirkungslinie von R_w ist dann nach der Definition der Centralaxe mit derselben identisch. — Zur zeichnerischen Ausführung ist diese Methode nicht geeignet, da die Kräfte meist schon in einem bestimmten orthogonalen Projektionssystem dargestellt vorliegen werden. Man führe daher zunächst in dem gegebenen System die Orthogonalreduktion aus, wodurch man zwei sich senkrecht kreuzende Kräfte K_1 und K_2 erhält. Wendet man jetzt erst auf K_1 und K_2 die oben beschriebene Centralaxenkonstruktion an, so ergiebt sich eine sehr einfache Ausführung. Nach einem Satz von Möbius* schneidet die Centralaxe die kürzeste Entfernung der Aktionslinien von K_1 und K_2. Ist hier D der Durchstosspunkt von K_2 durch die Projektionsebene, so stellt das Lot DJ von D auf K_1 die kürzeste Entfernung von K_1 und K_2 dar. Die Richtung der Centralaxe ist bekannt, sie ist der Wertresultante R_w parallel. Es handelt sich also nur noch um die Lage von C ($CD:CJ$). Denkt man sich jetzt die Orthogonalreduktion ($E \perp R_w$, R_w) ausgeführt, so erkennt man, dass $CD:DJ = K_{1w}:K_{2w}$ ist, wobei K_{1w} und K_{2w} die Komponenten von K_1 und K_2 parallel R_w sind. $K_{1w}:K_{2w}$ erhält man aber leicht, wenn man im Kräftedreieck (K_1, K_2, R_w) von der Ecke (K_1, K_2) auf R_w ein Lot fällt, in dem Verhältnis der auf R_w gebildeten Höhenabschnitte. Ist der Punkt C festgelegt, so ist die Centralaxe nach Lage und Richtung bestimmt.

B. Die Zerlegung der Kräfte im Raume. Allgemeines Prinzip: Handelt es sich um irgend eine Zerlegung einer Kraft in Komponenten, die in vorgeschriebenen Geraden liegen, so denke man sich die Kraft zunächst in beliebige leicht bestimmbare Hilfskomponenten zerlegt. Jede der gesuchten Komponenten kann man jetzt als algebraische Summe der durch den Einfluss der einzelnen Hilfskomponenten in den gegebenen Geraden hervorgerufenen Kräfte darstellen. Die gewünschte Zerlegung ist also durchführbar, wenn sich Hilfskomponenten finden lassen, durch die sich einerseits die gegebene Kraft leicht ersetzen lässt, und von denen anderseits die Zerlegungsverhältnisse (auf die absoluten Grössen kommt es hierbei nicht an) nach den gegebenen Geraden bekannt sind. Derartige Hilfskomponenten

* Siehe hierüber K. Th. Vahlen, diese Zeitschrift Bd. 42, S. 160, 1897.

kann man sich verschaffen als Resultanten von Kräftezusammensetzungen, indem man in den vorgeschriebenen Geraden Kräfte zweckentsprechend annimmt und reduziert. Anwendungen des Prinzips:

1. Zerlegung einer Kraft K nach 6 beliebigen gegen einander windschiefen Geraden.

Liegt eine bestimmte Projektionsebene E bereits vor, so wende man die Parallelreduktion (E, K) an. Man wähle in E zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte R_1 und R_2 in derselben Wirkungslinie und zerlege R_1 nach den drei ersten der in E liegenden vorgeschriebenen Wirkungslinien, R_2 nach den drei anderen. Jeder der so in E entstandenen Kräfte entspricht eine Kraft in dem Parallelsystem, da die Resultante beider in eine bestimmte Raumrichtung fallen muss. Als Gesamtresultante ergiebt sich eine Kraft $S \| K$. Wiederholt man das Verfahren dreimal unter immer verschiedener Wahl von R_1 und R_2, so erhält man drei zu K parallele Hilfskomponenten mit den oben verlangten Eigenschaften.

2. Konstruktion der Ebene, in der eine Kraft K liegen muss, wenn sie nach fünf gegebenen Geraden zerlegbar sein und durch einen festen Punkt O gehen soll.

Diese Konstruktion gestaltet sich zu einer Spezialisierung der vorigen, nur wird statt der Parallelreduktion die Centralreduktion (E, O) angewendet. Die Spezialisierung besteht darin, dass die eine der in E liegenden Kraftgruppen jetzt nur noch aus zwei Kräften besteht, weshalb R_1 durch den Schnittpunkt derselben laufen muss. Durch zweimalige Anwendung der beschriebenen Zusammensetzung erzielt man hier zwei durch O laufende nach den fünf Richtungen zerlegbare Kräfte S' und S'', welche die gesuchte Ebene bestimmen.

Spezialfall: Soll K eine gegebene Richtung haben, so liegt O im Unendlichen, und es wird die Parallelreduktion angewendet.

Um zu begründen, dass der Ort der Kraft K im vorliegenden Falle eine Ebene ist, braucht man nur zu beweisen, dass man durch eine dritte Kräftezusammensetzung eine Kraft erhält, die in der durch S' und S'' bestimmten Ebene liegt.

Man denke sich zu diesem Zweck S' und S'' zu einer Resultante S vereinigt. Dieselbe Kraft S würde man auch erhalten, wenn man zuerst die angenommenen Kräfte $R_1' = R_2'$ und $R_1'' = R_2''$ zu $R_1 = R_2$ zusammensetzte und durch Zerlegung von R_1 und R_2 in der bisher immer verfolgten Art die Bildung von S bewirkte. Es folgt dies aus dem eingangs aufgestellten allgemeinen Zerlegungsprinzips. Da nun die Kraft S aus S' und S'' resultiert, muss sie in der durch S' und S'' bestimmten Ebene liegen. Es haben also, wie verlangt war, drei Reduktionen drei in einer Ebene liegende Kräfte ergeben.

3. Die Zerlegung einer Kraft nach vier vorgeschriebenen Geraden. Hier muss die Wirkungslinie der anzunehmenden Kräfte $R_1 = R_2$, damit in der Ebene E Gleichgewicht herbeigeführt werden kann, durch die Schnittpunkte je zweier in E gelegener Wirkungslinien laufen. Soll also die Kraft K eine bestimmte Richtung haben, oder durch einen bestimmten Punkt gehen, so ist ihre Lage durch Anwendung des unter 1. angegebenen Verfahrens

eindeutig bestimmt, da nur zwei Annahmen von $R_1 = R_2$ möglich sind, die beide, wie leicht ersichtlich, dasselbe Resultat liefern.

4. Die Zerlegung einer Kraft K nach drei vorgeschriebenen Geraden. Es sei hier nur der für die Theorie des räumlichen Fachwerks wichtige Fall behandelt, dass sich die vier Wirkungslinien in einem Punkte schneiden und für den allgemeineren Fall auf „Henneberg, Statik der starren Systeme" verwiesen. Eine Spezialisierung des bisherigen Konstruktionsvorganges empfiehlt sich bei der vorliegenden Aufgabe nicht, sondern die Kraft K und die Geraden G_1, G_2 und G_3 werden jetzt durch Horizontal- und Vertikalprojektion dargestellt. (K', K'', G_1', G_1'' etc.) — Statt der räumlichen werden nun zwei ebene Zerlegungen nacheinander ausgeführt, derart, dass man z. B. die Schnittlinie G der Ebenen (KG_1 und ($G_2 G_3$) konstruiert und K zuerst nach G und G_1, darauf die in G entstandene Hilfskraft H nach G_2 und G_3 zerlegt. Zur Auffindung der Projektionen von G bringe man eine zur Horizontalebene vertikale Hilfsebene mit sämtlichen Kraftrichtungen zum Schnitt (Schnittpunkte 1, 2, 3, 4). Die Projektionen von 1, 2, 3, 4 sind leicht konstruierbar. Zieht man dann $1''4''$ und $2''3''$, so ist der Schnittpunkt S'' ein Punkt der Vertikalprojektion der gesuchten Geraden G. Denkt man sich das Kräfteviereck z. B. in der Horizontalprojektion konstruiert, so erkennt man, dass die entsprechende Diagonale desselben der Geraden G' parallel sein muss. Die ohnehin schon meist wenig übersichtlichen Kraftepläne werden bei dieser Konstruktion von Hilfsfiguren frei gehalten.

5. Die Zerlegung eines Kräftesystems, das aus zwei gegeneinander windschief liegenden Kräften (einer sogenannten Dyade) besteht, nach sechs vorgeschriebenen Geraden.

a) Durch zweimalige Anwendung von 1).

b) Ein etwas kürzeres Verfahren sei hier nur angedeutet: Man wende zunächst auf die gegebene Dyade die Orthogonalreduktion (E, G) an, die eine neue Dyade (K_E, K_G) ergiebt. Dann führe man viermal eine Zusammensetzung angenommener Kräfte aus, die je eine Kraft parallel K_G und eine zweite in der Wirkungslinie von K_E ergiebt. Durch die so entstandenen vier Dyaden kann man die gegebene Dyade ersetzen, wenn man nochmals das allgemeine Zerlegungsprinzip zur Anwendung bringt.

Aufgabe 3.

Von **S. Finsterwalder** in München.

Ein oben offener, bis zum Rande gefüllter Wasserbehälter von der Form eines Rotationskörpers mit vertikaler Axe, gegebenem Volumen und gegebener oberer Öffnung soll so konstruiert werden, dass ausschliesslich die durch Rippen entsprechend zu verstärkenden Meridiane Zugspannungen aber keine Biegungsspannungen aufnehmen, während alle Spannungen in der Querrichtung (Ringspannungen) verschwinden. Dementsprechend soll auch der obere Rand spannungslos bleiben. Der Behälter wird an einer Reihe vertikaler Ketten, die von den oberen Enden der Rippen ausgehen, aufgehängt. Welche Form muss der Meridian des Rotationskörpers besitzen? Das Eigengewicht der Konstruktion soll vernachlässigt und nur jenes des Wassers berücksichtigt werden.

Über die automorphe Transformation einer Summe von Quadraten mit Hilfe infinitesimaler Transformationen und höherer komplexer Zahlen.

Von

Professor Beez

in Plauen i. V.

Einleitung.

In meiner Abhandlung „Zur Theorie der Vektoren und Quaternionen"* habe ich versucht, eine Lücke in der wissenschaftlichen Begründung des Quaternionenkalküls auszufüllen und ihn zugleich von einer Voraussetzung zu befreien, welche seiner Ausdehnung auf mehr als vier Einheiten entgegensteht. Sodann habe ich die Multiplikationstafeln der reinen Quaternionensysteme von 8, 16 und 32 Einheiten in extenso aufgestellt und die Bedingungen erörtert, die erfüllt sein müssen, damit das Produkt zweier konjugierter Quaternionen gleich der Norm des Quaternions werde. Zum Schluss bin ich des näheren auf den engen Zusammenhang eingegangen, welcher zwischen der Norm eines Quaternions von 2^{n-1} Einheiten und den schiefen Determinanten Cayleys von $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + 1$ unabhängigen Elementen besteht. Diese Determinanten spielen bekanntlich bei der Lösung des Problems der linearen orthogonalen Substitution oder der automorphen Transformation einer Summe von Quadraten eine hervorragende Rolle. In der vorliegenden Arbeit soll das gleiche Problem mit Hilfe von Vektoren und Quaternionen gelöst und, soweit es angeht, noch eine dritte Methode benutzt werden, welche theoretisch auf eine beliebige Zahl von Veränderlichen angewendet werden kann, praktisch aber in der Hauptsache schon bei $n = 4$ versagt, nämlich die Methode der infinitesimalen Transformationen von Sophus Lie.

* Siehe diese Zeitschrift 41. Jahrgang.

§ 1.

Die Transformation zweier Quadrate in sich selbst.

Um die Summe zweier Quadrate $x_0^2 + x_1^2$ in die Summe $x_0'^2 + x_1'^2$ zu transformieren, hat man statt x_0 und x_1 bezüglich zu setzen:

$$1)\quad \begin{cases} x_0' = a_{00}x_0 + a_{01}x_1, \\ x_1' = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 \end{cases}$$

und die Koeffizienten a so zu bestimmen, dass

$$2)\quad \begin{cases} a_{00}^2 + a_{10}^2 = 1, \\ a_{01}^2 + a_{11}^2 = 1, \\ a_{00}a_{01} + a_{10}a_{11} = 0 \end{cases}$$

werde, dann ist:

$$x_0'^2 + x_1'^2 = x_0^2 + x_1^2$$

und der Punkt x_0, x_1 des Kreises $x_0^2 + x_1^2 = c$ in einen anderen Punkt desselben Kreises x_0', x_1' übergeführt oder transformiert. Es entspricht also diese Transformation der Drehung einer Ebene um einen festen Punkt in derselben, bei welcher jeder Punkt der Ebene einen Kreis um den festen Punkt beschreibt. Die Gleichungen 1) an und für sich, d. h. ohne Rücksicht auf die Gleichungen 2) stellen die sogenannte allgemeine lineare homogene kontinuierliche Transformationsgruppe in zwei Veränderlichen dar.* Sie ist viergliedrig, d. h. sie enthält vier von einander unabhängige oder wesentliche Parameter $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}$, wenn keine Bedingungsgleichung zwischen denselben stattfindet, dreigliedrig, wenn eine Bedingungsgleichung gegeben ist, z. B.:

$$a_{00}a_{11} - a_{01}a_{10} = 1.$$

In unserem Falle, sobald also neben den Gleichungen 1) auch die Gleichungen 2) Bestand haben, ist die Gruppe eingliedrig. Die Koeffizienten a_{ik} lassen sich dann sämtlich als Funktionen eines einzigen Parameters darstellen. Die Gruppeneigenschaft der Transformation 1) ohne Berücksichtigung der Bedingungen 2) ergiebt sich daraus, dass zwei aufeinander folgende Transformationen wiederum eine Transformation derselben Beschaffenheit geben. Wendet man auf die Transformation 1) eine neue Transformation derselben Art:

$$1^*)\quad \begin{cases} x_0'' = b_{00}x_0' + b_{01}x_1', \\ x_1'' = b_{10}x_0' + b_{11}x_1' \end{cases}$$

an, so ergiebt sich, wenn

$$3)\quad \begin{cases} a_{00}b_{00} + a_{10}b_{01} = c_{00}, \\ a_{01}b_{00} + a_{11}b_{01} = c_{01}, \\ a_{00}b_{10} + a_{10}b_{11} = c_{10}, \\ a_{01}b_{10} + a_{11}b_{11} = c_{11} \end{cases}$$

gesetzt wird:

* Siehe S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen I, 578.

$$4)\qquad \begin{cases} x_0'' = c_{00}x_0 + c_{01}x_1, \\ x_1'' = c_{10}x_0 + c_{11}x_1, \end{cases}$$

also eine Transformation, die von derselben Beschaffenheit ist wie 1). Darnach bilden die Transformationen 1) eine Gruppe. Die identische Transformation

$$x_0' = x_0,$$
$$x_1' = x_1$$

tritt ein, wenn $a_{00} = a_{11} = 1$, $a_{10} = a_{01} = 0$ ist. Die inverse Transformation oder diejenige Transformation, welche den Punkt x_0', x_1' in den Punkt x_0, x_1 zurückführt, lautet:

$$x_0'' = \frac{a_{11}}{\varDelta}x_0' - \frac{a_{01}}{\varDelta}x_1',$$

$$x_1'' = -\frac{a_{10}}{\varDelta}x_0' + \frac{a_{00}}{\varDelta}x_1',$$

$$\Delta = a_{00}a_{11} - a_{01}a_{10}.$$

Denn setzt man für x_0', x_1' ihre Werte aus 1), so kommt:

$$x_0'' = x_0,$$
$$x_1' = x_1.$$

Zwei Transformationen der Gruppe 1) sind im allgemeinen nicht mit einander vertauschbar. Lässt man auf die Transformation 1) mit den Parametern a die Transformation 1*) die mit den Parametern b folgen, so kommt die Transformation 4), deren Koeffizienten c_{ik} durch die Gleichungen 3) bestimmt werden. Lässt man dagegen auf die b-Transformation 1*) die a-Transformation 1) folgen, so ergiebt sich, wenn:

$$5)\qquad \begin{cases} c_{00}' = a_{00}b_{00} + a_{01}b_{10}, \\ c_{01}' = a_{00}b_{01} + a_{01}b_{11}, \\ c_{10}' = a_{10}b_{00} + a_{11}b_{10}, \\ c_{11}' = a_{10}b_{01} + a_{11}b_{11} \end{cases}$$

gesetzt wird:

$$4^*)\qquad \begin{cases} x_0'' = c_{00}'x_0 + c_{01}x_1, \\ x_1'' = c_{10}'x_0 + c_{11}x_1. \end{cases}$$

Die Transformation 4*) ist der Transformation 4) nur dann gleich, wenn

$$c_{00}' = c_{00}, \quad c_{01}' = c_{01}, \quad c_{10}' = c_{10}, \quad c_{11}' = c_{11}.$$

Diese Bedingungen sind erfüllt, sobald

$$6)\qquad \begin{cases} \dfrac{a_{10}}{a_{01}} = \dfrac{b_{10}}{b_{01}}, \\[2ex] \dfrac{a_{00} - a_{11}}{a_{00}} = \dfrac{b_{00} - b_{11}}{b_{00}} \end{cases}$$

ist. Nun ergeben sich aus 2) zwei verschiedene Wertsysteme der Koeffizienten a_{ik}. Denn da das Quadrat der Determinante der Koeffizienten:

$$\Delta^2 = (a_{00}\,a_{11} - a_{01}\,a_{10})^2 = 1$$

ist, so hat man die beiden Fälle zu unterscheiden:

$$a_{00}\,a_{11} - a_{01}\,a_{10} = 1,$$
$$a_{00}\,a_{11} - a_{01}\,a_{10} = -1.$$

Hieraus in Verbindung mit 2) ergiebt sich, dass man entweder

7) $$a_{11} = a_{00}, \quad a_{01} = -a_{10} = -\sqrt{1 - a_{00}^2},$$

oder

7*) $$a_{11} = -a_{00}, \qquad a_{01} = a_{10} = \sqrt{1 - a_{00}^2}$$

zu setzen hat. Schreibt man $\cos t$ für a_{00}, so erhält man die beiden eingliedrigen Gruppen:

8) $$\begin{cases} x_0' = x_0 \cos t - x_1 \sin t, \\ x_1' = x_0 \sin t + x_1 \cos t \end{cases}$$

und

8*) $$\begin{cases} x_0' = x_0 \cos t + x_1 \sin t, \\ x_1' = x_0 \sin t - x_1 \cos t. \end{cases}$$

Die Transformationen der Gruppe 8) sind mit einander vertauschbar, denn für eine b-Transformation ist:

9) $$b_{11} = b_{00}, \quad b_{01} = -b_{10} = -\sqrt{1 - b_{00}^2},$$

also:

$$\frac{a_{10}}{a_{01}} = -1 = \frac{b_{10}}{b_{01}},$$
$$\frac{a_{00} - a_{11}}{a_{01}} = 0 = \frac{b_{00} - b_{11}}{b_{01}}$$

entsprechend den Gleichungen 6). Die Transformationen der Gruppe 8*) dagegen sind nicht mit einander vertauschbar, denn in diesem Falle ist zwar:

$$\frac{a_{10}}{a_{01}} = 1 = \frac{b_{10}}{b_{01}},$$

aber nicht:

$$\frac{a_{00} - a_{11}}{a_{01}} = \frac{b_{00} - b_{11}}{b_{01}},$$

wenn nicht $a_{00} = b_{00}$, $a_{01} = b_{01}$ oder die b-Transformation identisch ist mit der a-Transformation. Man kann dies leicht an den Gleichungen 8) und 8*) selbst verifizieren. Wenn man auf die Transformation 8) mit dem Parameter t eine zweite ebensolche Transformation mit dem Parameter t' folgen lässt, also:

$$x_0'' = x_0' \cos t' - x_1' \sin t',$$
$$x_1'' = x_0' \sin t' + x_1' \cos t'$$

annimmt, so kommt nach Einführung der Werte x_0' und x_1' aus 8):

10) $$\begin{cases} x_0'' = x_0 \cos(t + t') - x_1 \sin(t + t') \\ x_0'' = x_0 \sin(t + t') + x_1 \cos(t + t'). \end{cases}$$

Setzt man also

11) $$t + t' = t'',$$

so wird:

$$x_0'' = x_0 \cos t'' - x_1 \sin t'',$$
$$x_1'' = x_0 \sin t'' + x_1 \cos t''.$$

Der neue Parameter t'' ändert sich nicht, wenn man t mit t' vertauscht. Die Gleichung 10), welche den Parameter t'' aus den Parametern t und t' finden lehrt, stellt ebenfalls eine Gruppe dar, die sogenannte Parametergruppe. Beiläufig erwähnt gilt der Satz von der Vertauschbarkeit der Transformationen der Gruppe der Rotationen in der Ebene überhaupt für alle eingliedrigen kontinuierlichen Gruppen, so z. B. auch für die Rotationen des Raumes um eine feste Axe. Zwei Transformationen der Gruppe 8*) dagegen sind nicht miteinander vertauschbar. Denn lässt man auf die Transformation 8*) eine zweite mit dem Parameter t' folgen, nämlich:

$$x_0'' = x_0' \cos t' + x_1' \sin t',$$
$$x_1'' = x_0' \sin t' - x_1' \cos t',$$

so findet man:

12) $$\begin{cases} x_0'' = x_0 \cos(t - t') + x_1 \sin(t - t') \\ x_1'' = -x_0 \sin(t - t') + x_1 \cos(t - t') \end{cases}$$

Da das Vorzeichen von $\sin(t - t')$ sich ändert, wenn man t mit t' vertauscht, oder die Reihenfolge der beiden Transformationen umkehrt, so ist ersichtlich, dass zwei Transformationen der Gruppe 8*) nicht mit einander vertauscht werden können. Auch bemerkt man sofort, dass die Gruppe 8*) die identische Transformation nicht besitzt und jede Transformation zugleich ihre eigene inverse ist. Setzt man nämlich $t' = t$, so kommt $x_0' = x_0$, $x_1' = -x_1$. Eine zweimalige Anwendung der Transformation 8*) mit demselben Parameter führt also den Punkt x in sich selbst zurück. Die Gruppe 8*) enthält mithin diskontinuierliche Untergruppen von der Periode 2. Bezeichnet man eine bestimmte Transformation der Gruppe 8* mit T, so ist

$$T \cdot T = T^2 = 1,$$

folglich auch

$$T = \frac{1}{T},$$

also die Transformation zugleich ihre eigene inverse.

Die geometrische Bedeutung der Formeln 8) und 8*) ist unschwer zu erkennen. Man beziehe den Punkt M einer Ebene auf zwei rechtwinklige Koordinatensysteme $x_0 O x_1$ und $x_0' O x_1'$ (siehe Fig. 1), welche denselben Koordinatenanfang O besitzen. Das erste sei um den Koordinatenanfang drehbar, das zweite dagegen fest. Die Koordinaten des Punktes M mögen in dem ersten System mit x_0 und x_1, im zweiten mit x_0' und x_1' bezeichnet werden. Im Augenblick des Zusammenfallens beider Systeme — in der Anfangslage — ist $x_0' = x_0$, $x_1' = x_1$ oder es findet die „identische Transformation" statt. Dreht

man aber das erste System durch den Winkel t in der der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzten Richtung, so ist im Falle 8) (siehe Fig. 1):

$$x_0' = OP' = OQ - PR = x_0 \cos t - x_1 \sin t,$$
$$x_1' = MP' = PQ + MR = x_0 \sin t + x_1 \cos t.$$

Für $t = 0$ erhält man die identische Transformation:

$$x_0' = x_0, \quad x_1' = x_1.$$

Setzt man $-t$ für t, so erhält man die inverse Transformation:

$$x_0' = x_0 \cos t + x_1 \sin t,$$
$$x_1' = -x_0 \sin t + x_1 \cos t.$$

Im zweiten Falle (siehe Fig. 1) ist:

$$x_0' = OP' = OQ + PR = x_0 \cos t + x_1 \sin t,$$
$$x_1' = MP' = PQ - MR = x_0 \sin t - x_1 \cos t.$$

Für $t = 0$ kommt

$$x_0'' = x_0,$$
$$x_1'' = -x_1.$$

Die Gruppe 8*) besitzt also nicht die identische Transformation, sondern die symmetrische. Setzt man jetzt $-t$ für t, so erhält man

$$x_0'' = x_0 \cos t - x_1 \sin t,$$
$$x_1' = -x_0 \sin t - x_1 \cos t,$$

also nicht die inverse Transformation. Diese ist vielmehr, wie wir schon oben bemerkt haben, mit der ursprünglichen identisch. Lässt man n Transformationen der Gruppe 8) mit den Parametern $t_1, t_2 \ldots t_n$ aufeinander folgen, so ergiebt sich:

$$13) \quad \begin{cases} x_0^{(n)} = x_0 \cos(t_1, t_2 + \cdots + t_n) + x_1 \sin(t_1, t_2 + \cdots + t_n), \\ x_1^{(n)} = x_0 \sin(t_2 + t_2 + \cdots + t_n) + x_1 \cos(t_1 + t_2 + \cdots + t_n) \end{cases}$$

und wenn alle t einander gleich sind:

$$x_0^{(n)} = x_0 \cos nt - x_1 \sin nt,$$
$$x_1^{(n)} = x_0 \sin nt + x_1 \cos nt.$$

Bei der Gruppe 8*) dagegen hat man zwischen den Transformationen gerader und ungerader Ordnung zu unterscheiden. Man findet:

$$14_1) \quad \begin{cases} x_0^{(1)} = x_0 \cos t_1 + x_1 \sin t_1, \\ x_0^{(3)} = x_0 \cos(t_3 - \overline{t_2 - t_1}) + x_1 \sin(t_3 - \overline{t_2 - t_1}) \text{ etc.,} \\ x_1^{(1)} = x_0 \sin t_1 - x_1 \cos t_1, \\ x_1^{(3)} = x_0 \sin(t_3 - \overline{t_2 - t_1}) - x_1 \cos(t_3 - \overline{t_2 - t_1}). \end{cases}$$

Diese Transformationen sind nach dem Typus 8*) zusammengesetzt, wenn man t_1, $\overline{t_2 - t_1}$ etc. als Parameter ansieht, wogegen die Transformationen gerader Ordnung:

$$x_0^{(3)} = x_0 \cos \overline{t_2 - t_1} - x_1 \sin \overline{t_2 - t_1},$$

$$x_0^{(4)} = x_0 \cos(\overline{t_4 - t_3} + \overline{t_2 - t_1}) + x_1 \sin(\overline{t_4 - t_3} + \overline{t_2 - t_1}) \text{ etc.},$$

$$14_2) \begin{cases} x_1^{(2)} = x_0 \sin \overline{t_2 - t_1} + x_1 \cos \overline{t_2 - t_1}, \\ x_1^{(4)} = x_0 \sin(\overline{t_4 - t_3} + \overline{t_2 - t_1}) + x_1 \cos(\overline{t_4 - t_3} + \overline{t_2 - t_1}), \end{cases}$$

sobald man $\overline{t_2 - t_1}$, $\overline{t_4 - t_3}$ als aufeinander folgende Parameter annimmt, nach dem Typus 8) gebildet erscheinen.

Setzt man jetzt alle t einander gleich, so erhalten alle Transformationen ungerader Ordnung die Form:

$$x_0' = x_0 \cos t + x_1 \sin t,$$
$$x_1' = x_0 \sin t - x_1 \cos t.$$

Die gerader Ordnung dagegen:

$$x_0' = x_0,$$
$$x_1' = x_1.$$

Wir können also sagen: Die Transformationen 8) bedeuten eine Drehung der Ebene um den Koordinatenanfang durch den Winkel t,

Fig. 1.

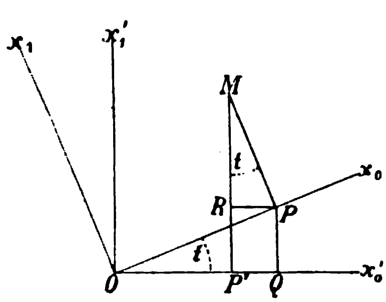
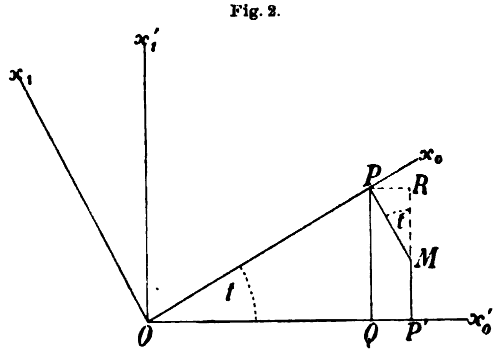


Fig. 2.



die Transformationen 8*) aber eine Umklappung der Ebene mit nachfolgender Drehung derselben um den Winkel t. Die erstgenannten Transformationen bilden eine einzige kontinuierliche Gruppe, die letztgenannten sind dagegen zusammengesetzt aus einer diskontinuierlichen Gruppe von der Periode 2 und zwei kontinuierlichen Gruppen, von denen die eine nach dem Typus 8), die andere nach dem Typus 8*) gebildet ist.

Beide Transformationsgruppen sowohl 8) als 8*) lassen den Koordinatenanfang $x_0 = 0$, $x_1 = 0$ unverändert; ebenso auch die Entfernung zweier Punkte x_0, x_1 und y_0, y_1. Denn wendet man auf beide zugleich die Transformation 1), 2) an, so kommt:

$$15) \begin{cases} (x_0' - y_0')^2 + (x_1' - y_1')^2 = [a_{00}(x_0 - y_0) + a_{01}(x_1 - y_1)]^2 \\ \qquad + [a_{10}(x_0 - y_0) + a_{11}(x_1 - y_1)]^2 = (x_0 - y_0)^2 + (x_1 - y_1)^2. \end{cases}$$

Da zwei Figuren kongruent oder symmetrisch sind, wenn die gerade Verbindungslinie je zweier Punkte der einen Figur dieselbe Länge hat, wie die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte in der anderen Figur, so transformieren die Gleichungen 1), 2), also auch 8), 8*) jede Figur in eine kongruente bez. symmetrische.

Eine gerade Linie

$$lx_0 + mx_1 = 1 \tag{16}$$

geht durch die Transformationen 8) und 8*) in eine andere Gerade

$$l'x_0 + m'x_1 = 1$$

über, wobei im Falle 8):

$$\begin{cases} l' = l\cos t + m\sin t, \\ m' = l\sin t + m\cos t; \end{cases} \tag{17}$$

im Falle 8*):

$$\begin{cases} l' = l\cos t + m\sin t, \\ m' = l\sin t - m\cos t \end{cases}$$

ist. Für $l = m = 0$ ist in beiden Fällen auch $l' = m' = 0$, d. h. die unendlich entfernte Gerade bleibt bei beiden Transformationen erhalten. Auch das Paar der imaginären Kreispunkte bleibt bei 8) unverändert.

Denn es ist:

$$\begin{cases} (x_0' + ix_1') = (x_0\cos t - x_1\sin t) + i(x_0\sin t + x_1\cos t) \\ \qquad\qquad = (x_0 + ix_1)(\cos t + i\sin t), \\ (x_0' - ix_1') = (x_0\cos t - ix_1\sin t) - i(x_0\sin t + x_1\cos t) \\ \qquad\qquad = (x_0 - ix_1)(\cos t - i\sin t). \end{cases} \tag{18}$$

Wenn also:

$$x_0 + ix_1 = 0,$$
$$x_1 - ix_1 = 0,$$

so ist auch:

$$x_0' + ix_1' = 0,$$
$$x_0' - ix_1' = 0.$$

Dagegen werden durch die Transformation 8*) die unendlich entfernten imaginären Kreispunkte mit einander vertauscht. Denn es ist:

$$\begin{cases} (x_0' + ix_1') = (x_0\cos t + x_1\sin t) + i(x_1\sin t - x_0\cos t) \\ \qquad\qquad = (x_0 - ix_1)(\cos t + i\sin t), \\ (x_0' - ix_1') = (x_0\cos t + x_1\sin t) - i(x_0\sin t - x_1\cos t) \\ \qquad\qquad = (x_0 + ix_1)(\cos t - i\sin t). \end{cases} \tag{19}$$

Es gehen also durch die Transformation 8*) die Kreispunkte:

$$x_0 + ix_1 = 0,$$
$$x_0 - ix_1 = 0,$$

beziehentlich über in

$$x_0' - ix_1' = 0,$$
$$x_0' + ix_1' = 0$$

Wenn das bewegliche Koordinatensystem nur um einen unendlich kleinen Winkel aus der Anfangslage gedreht wird, so erhalten wir eine sogenannte „infinitesimale Transformation“. Wir leiten dieselbe aus den Gleichungen 1) und 2) ab. Wir variieren 1) in der Weise, dass die Grössen x_0 und x_1 ungeändert bleiben und nur die Konstanten a_{ik} einen unendlich kleinen Zuwachs erhalten. Dies giebt:

$$\text{20)} \qquad \begin{cases} \delta x_0' = x_0 \delta a_{00} + x_1 \delta a_{01}, \\ \delta x_1' = x_0 \delta a_{10} + x_1 \delta a_{11}. \end{cases}$$

Die Variationen der Konstanten sind aber nicht unabhängig von einander, sondern an das Bestehen der Gleichungen 2) geknüpft.

Diese geben, wenn sie ebenfalls variiert werden:

$$\text{21)} \qquad \begin{cases} a_{00} \delta a_{00} + a_{10} \delta a_{10} = 0, \\ a_{01} \delta a_{01} + a_{11} \delta a_{11} = 0, \\ a_{00} \delta a_{01} + a_{01} \delta a_{00} + a_{10} \delta a_{11} + a_{11} \delta a_{10} = 0. \end{cases}$$

Im Moment des Zusammenfallens beider Systeme ist:

$$\delta x_0' = \delta x_0, \quad \delta x_1' = \delta x_1, \quad a_{00} = a_{11} = 1, \quad a_{10} = a_{01} = 0.$$

Daher ist:

$$\delta a_{00} = 0, \quad \delta a_{11} = 0, \quad \delta a_{10} + \delta a_{01} = 0;$$

folglich, wenn man $\delta a_{10} = \delta t$ setzt:

$$\text{22)} \qquad \begin{cases} \delta x_0 = - x_1 \delta t, \\ \delta x_1 = x_0 \delta t. \end{cases}$$

Wir können selbstverständlich diese infinitesimalen Transformationen auch aus den endlichen Gleichungen 8) und 8*) ableiten, wenn wir sie nach t differentiieren, und sodann $t = 0$ setzen. Aus 8) ergiebt sich durch Differentiation nach t:

$$\text{22*)} \qquad \begin{cases} \delta x_0' = -(x_0 \sin t + x_1 \cos t) \delta t = - x_1' \delta t, \\ \delta x_1' = (x_0 \cos t - x_1 \sin t) \delta t = x_0' \delta t, \end{cases}$$

aus 8*) ebenfalls:

$$\text{22*)} \qquad \begin{cases} \delta x_0' = (- x_0 \sin t + x_1 \cos t) \delta t = - x_1' \delta t, \\ \delta x_1' = (x_0 \cos t + x_1 \sin t) \delta t = x_0' \delta t. \end{cases}$$

Da für $t = 0$, $x_0' = x_0$, $x_1' = x_1$, $\delta x_0' = \delta x_0$, $\delta x_1' = \delta x_1$ wird, so erhält man aus 22) sowohl als aus 22*) sofort die Gleichungen der infinitesimalen Transformation 21), wenn $t = 0$ gesetzt wird. Man erkennt aber auch zugleich — was bei weitem wichtiger ist —, wie man umgekehrt aus der infinitesimalen Transformation 22) die endlichen Transformationen von 8) und 8*) erhalten kann. Vertauscht man nämlich das Variationszeichen δ mit dem Differentialzeichen d, so kann 22) auch schreiben:

$$23)\qquad \begin{cases} \frac{d x_0}{d t} = - x_1, \\ \frac{d x_1}{d t} = x_0 \end{cases}$$

und 22) oder 22*):

$$23^*)\qquad \begin{cases} \frac{d x_0'}{d t} = - x_0', \\ \frac{d x_1'}{d t} = x_1', \end{cases}$$

welche als die Differentialgleichungen der endlichen Transformation anzusehen sind, aus denen sich durch Integration die endlichen Transformationen selbst ergeben. Man hat also, um von der infinitesimalen Transformation zur endlichen Transformation überzugehen, in der infinitesimalen Transformation statt der Variationszeichen die Differentialzeichen, statt der Koordinaten x_0 und $x_1 \ldots . x_0'$ und x_1' einzuführen und das erhaltene simultane System so zu integrieren, dass für $t = 0$ wieder $x_0' = x_0$ und $x_1' = x_1$ werde.

Zur Ausführung dieser Integration bieten sich drei verschiedene Wege dar.

I. Zuerst nämlich kann man die Veränderlichen x_0' und x_1', da sie Funktionen von t sind, in Reihen entwickeln, die nach steigenden Potenzen von t geordnet sind. Nach dem Maclaurinschen Satze ist z. B.:

$$24)\qquad x_0' = (x_0')_0 + t\left(\frac{d x_0'}{d t}\right)_0 + \frac{t^2}{2!}\left(\frac{d^2 x_0'}{d x^2}\right)_0 + \cdots$$

Für $t = 0$ aber ist:

$$x_0' = x_0, \quad \left(\frac{d x_0'}{d t}\right)_0 = (-x_1')_0 = -x_1,$$

$$\left(\frac{d^2 x_0'}{d t^2}\right)_0 = -\left(\frac{d x_1'}{d t}\right)_0 = -(x_0')_0 = -x_0.$$

Auf gleiche Weise findet man:

$$\left(\frac{d^3 x_0'}{d t^3}\right)_0 = x, \quad \left(\frac{d^4 x_0'}{d t^4}\right)_0 = x_1 \quad \text{etc.},$$

also:

$$x_0' = x_0 - t x_1 - \frac{t^2}{2!} x_0 + \frac{t^3}{3!} x_1 + \frac{t^4}{4!} x_0 + \cdots$$

$$= x_0 \cos t - x_1 \sin t$$

und ebenso:

$$x_1' = x_1 + t \cdot x_0 - \frac{t^2}{2!} x_1 - \frac{t^3}{3!} x_0 + \frac{t^4}{4!} x_1 + \cdots$$

$$= x_0 \sin t + x_1 \cos t.$$

Mit Hilfe einer symbolischen Bezeichnung, die Herr Lie eingeführt hat, lassen sich aus den infinitesimalen Transformationen 22) die Koeffizienten in der Reihenentwickelung der endlichen Transformation 24) übersichtlich, wie folgt, darstellen. Da für eine beliebige Funktion von x_0, x_1, t die Gleichung gilt:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_0}\frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt},$$

so erhält man nach Einführung der Werte von $\frac{dx_0}{dt}$ und $\frac{dx_1}{dt}$ aus 23):

$$\frac{df}{dt} = x_0\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial f}{\partial x_0},$$

welcher Ausdruck mit $\varphi(t)$ bezeichnet werden soll. Dieses ist das Symbol der allgemeinen infinitesimalen Transformationen, aus denen sich die besonderen

$$\frac{dx_0}{dt} = -x_1 = \varphi x_0,$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_0 = \varphi x_1$$

dadurch ergeben, dass man statt f der Reihe nach x_0 und x_1 setzt. Man erkennt leicht, dass dann:

$$\left(\frac{dx_0'}{dt}\right)_0 = \varphi x_0,$$

$$\left(\frac{d^2x_0'}{dt^2}\right)_0 = \varphi(\varphi x_0) = \varphi^2 x_0,$$

$$\left(\frac{d^3x_0'}{dt^3}\right)_0 = \varphi[\varphi(\varphi x_0)] = \varphi^3 x_0$$

u. s. f. ist. Man kann also statt der Reihe 24) auch schreiben:

25) $$x_0' = x_0 + t\varphi x_0 + \frac{t^2}{2!}\varphi^2 x_0 + \frac{t^3}{3!}\varphi^3 x_0 + \cdots$$

Auf dieselbe Weise wird auch die Reihe für x_1' gebildet.

II. Bei der zweiten Methode der Integration stellt man die Differentialgleichungen 23) in der Form:

26) $$\frac{dx_0'}{-x_1'} = \frac{dx_1'}{x_0'} = dt$$

auf und sucht zunächst aus

$$\frac{dx_0'}{-x_1'} = \frac{dx_1'}{x_0'}$$

ein von t freies Integral. Ein solches ist:

27) $$x_0'^2 x + x_1'^2 = c^2,$$

worin c eine Konstante bedeutet. Hieraus bestimmt man etwa:

$$x_1' = \sqrt{c^2 - x_0'^2}$$

und hat also

$$\frac{dx_0'}{-x_1'} = \frac{dx_0'}{-\sqrt{c^2 - x_0'^2}} = dt,$$

folglich:

28) $$\arcsin x_0' + t = c',$$

wobei c' eine zweite Konstante darstellt. Hieraus folgt:

29) $\left\{\text{und wegen 27):}\quad\begin{array}{l} x_0' = c\sin(c' - t) \\ x_1' = c\cos(c' - t). \end{array}\right.$

Da für $t = 0$ x_0' in x_0, x_1' in x_1 übergeht, so hat man:

30) $$\left\{\begin{array}{l} x_0 = c\sin c', \\ x_1 = c\cos c', \end{array}\right.$$

folglich aus 29) und 30):

$$x_0' = x_0 \cos t - x_1 \sin t,$$
$$x_1' = x_0 \sin t + x_1 \cos t.$$

III. Da die Gleichungen 23) ein sogenanntes d'Alembertsches System bilden, so ergiebt sich die dritte Integrationsmethode wie folgt. Man setze zunächst:

31) $$\lambda_0 x_0' + \lambda_1 x_1' = u',$$

32) $$\frac{du}{dt} = \varrho u',$$

worin λ_0, λ_1, ϱ noch näher zu bestimmende Konstante bedeuten. Integriert man die letzte Gleichung mit der Bedingung, dass für $t = 0$

$$(u')_0 = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1$$

wird, so kommt

33) $$u' = (\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1) e^{\varrho t}.$$

Nun ist:

$$\frac{du'}{dt} = \lambda_0 \frac{dx_0'}{dt} + \lambda_1 \frac{dx_1'}{dt}$$
$$= -\lambda_0 x_1' + \lambda_1 x_0' = \varrho(\lambda_0 x_0' + \lambda_1 x_1'),$$

also:

$$x_0'(\lambda_1 - \varrho\lambda_0) - x_1'(\lambda_0 + \varrho\lambda_1) = 0.$$

Da x_0' und x_1' unabhängig von einander sind, so zerfällt diese Gleichung in die beiden anderen:

$$-\lambda_0\varrho + \lambda_1 = 0,$$
$$\lambda_0 + \varrho\lambda_1 = 0,$$

welche nur neben einander bestehen können, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} -\varrho & 1 \\ 1 & \varrho \end{vmatrix} = -(\varrho^2 + 1) = 0$$

ist. Darnach ist also:

34) $$\left\{\begin{array}{l} \varrho = \pm\sqrt{-1}, \\ \lambda_0 : \lambda_1 = 1 : \varrho = -\varrho : 1. \end{array}\right.$$

Setzt man nun in die Gleichung 33), die man auch schreiben kann:

$$\lambda_0 x_0' + \lambda_1 x_1' = (\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1) e^{\varrho t}$$

für x_0' und x_1' die Werte:

$$x_0' = a_{00} x_0 + a_{01} x_1,$$
$$x_1' = a_{10} x_0 + a_{11} x_1,$$

so ergiebt sich, da die Koeffizienten von x_0 und x_1 verschwinden müssen:

$$\lambda_0 a_{00} + \lambda_1 a_{10} = \lambda_0 e^{\varrho t},$$
$$\lambda_0 a_{01} + \lambda_1 a_{11} = \lambda_1 e^{\varrho t},$$

oder wenn man einen der Werte von $\lambda_0 : \lambda_1$ aus 34) einführt:

$$\varrho a_{00} - a_{10} = \varrho e^{\varrho t},$$
$$\varrho a_{01} - a_{11} = - e^{\varrho t}.$$

Da nun ϱ zwei Werte — nennen wir sie zunächst ϱ_1 und ϱ_2 — hat, so findet man zur Bestimmung von a_{00} und a_{10} die beiden Gleichungen:

35) $$\begin{cases} \varrho_1 a_{00} - a_{10} = \varrho_1 e^{\varrho_1 t}, \\ \varrho_2 a_{01} - a_{10} = \varrho_2 e^{\varrho_2 t}, \end{cases}$$

und zur Bestimmung von a_{01} und a_{11}:

36) $$\begin{cases} \varrho_1 a_{01} - a_{11} = - e^{\varrho_1 t}, \\ \varrho_2 a_{00} - a_{11} = - e^{\varrho_2 t}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir die Koeffizienten a_{ik} wie folgt:

37) $$\begin{cases} a_{00} = \quad a_{11} = \dfrac{\varrho_1 e^{\varrho_1 t} - \varrho_2 e^{\varrho_2 t}}{\varrho_1 - \varrho_2}, \\ a_{01} = - a_{10} = \dfrac{e^{\varrho_1 t} - e^{\varrho_2 t}}{\varrho_1 - \varrho_2}. \end{cases}$$

Setzt man schliesslich für ϱ_1 und ϱ_2 ihre Werte $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ ein, so kommt:

$$a_{00} = a_{11} = \cos t,$$
$$a_{01} = - a_{10} = - \sin t.$$

Um die endlichen Transformationen 8*) aus dem Gleichungssysteme:

$$\frac{dx_0'}{dt} = - x_1',$$
$$\frac{dx_1'}{dt} = x_0'$$

abzuleiten, hat man diese mit der Bedingung zu integrieren, dass für $t = 0$ $x_0' = x_0$, $x_1' = - x_1$ werde.

I. Nach der ersten Methode stellt man das Integral in der Form einer nach steigenden Potenzen von t geordneten Reihe auf [s. 19)]:

$$x_1' = x_0' + t\left(\frac{dx_0'}{dt}\right)_0 + \frac{t^2}{2!}\left(\frac{d^2 x_0'}{dt^2}\right)_0 + \frac{t^3}{3!}\left(\frac{d^3 x_0'}{dt^3}\right)_0 + \cdots$$

Man erkennt leicht, dass, wenn man das Symbol:

$$\varphi f = \frac{df}{dt} = x_0' \frac{\partial f}{\partial x_1'} - x_1' \frac{\partial f}{\partial x_0'}$$

benützt, diese Reihe auch geschrieben werden kann:

$$x_0' = (x_0')_0 + t(\varphi x_0')_0 + \frac{t^2}{2!}(\varphi^2 x_0')_0 + \frac{t^3}{3!}(\varphi^3 x_0')_0 + \cdots$$

Nun ist:
$$\begin{aligned}
\varphi x_0' &= -x_1' && \ldots (\varphi x_0')_0 = x_1,\\
\varphi^2 x_0' &= -\varphi x_0' = -x_0' && \ldots (\varphi^2 x_0')_0 = -x_0,\\
\varphi^3 x_0' &= -\varphi x_0' = x_1' && \ldots (\varphi^3 x_0')_0 = -x_1,\\
\varphi^4 x_0' &= \varphi x_0' = x_0' && \ldots (\varphi^4 x_0')_0 = x_0
\end{aligned}$$
u. s. f.

Ebenso:
$$\begin{aligned}
\varphi x_1' &= x_0' && \ldots (\varphi x_1')_0 = x_0,\\
\varphi^2 x_0' &= \varphi x_0' = -x_1' && \ldots (\varphi^2 x_1')_0 = x_1,\\
\varphi^3 x_0' &= -\varphi x_1' = -x_0' && \ldots (\varphi^3 x_1')_0 = -x_0,\\
\varphi^4 x_0' &= -\varphi x_0' = x_1' && \ldots (\varphi^4 x_1')_0 = -x_1
\end{aligned}$$
u. s. f.

Durch Einführung dieser Werte erhält man ohne weiteres die endlichen Transformationen von 8).

III*. Bei Anwendung der zweiten Methode erhalten wir zunächst wieder die Gleichungen 29):

$$x_0' = c\sin(c'-t) = c\sin c'\cos t - c\cos c'\sin t,$$
$$x_1' = c\cos(c'-t) = c\cos c'\cos t + c\sin c'\sin t$$

für $t = 0$, wobei $x_0' = x_0$, $x_1' = -x_1$ wird, also:

$$x_0 = c\sin c',$$
$$x_1 = -c\cos c'$$

und

$$x_0' = x_0\cos t + x_1\sin t,$$
$$x_1' = x_0\sin t - x_1\cos t.$$

IV*. Bei der dritten Methode hat man statt Gleichung 33):

$$u' = (\lambda_0 x_0 - \lambda_1 x_1)e^{\varrho t}$$

an Stelle der Gleichungen 36) zu setzen:

$$36^*)\qquad \begin{cases} \varrho_1 a_{01} - a_{11} = e^{\varrho_1 t},\\ \varrho_2 a_{01} - a_{11} = e^{\varrho_2 t},\end{cases}$$

während die Gleichungen 35):

$$35)\qquad \begin{cases} \varrho_1 a_{00} - a_{10} = \varrho_1 e^{\varrho_1 t},\\ \varrho_2 a_{00} - a_{10} = \varrho_2 e^{\varrho_2 t}\end{cases}$$

unverändert bleiben.

Aus beiden ergiebt sich:

$$a_{11} = -a_{00} = -\frac{\varrho_1 e^{\varrho_1 t} - \varrho_2 e^{\varrho_2 t}}{\varrho_1 - \varrho_2} = -\cos t,$$
$$a_{01} = a_{10} = \frac{e^{\varrho_1 t} - e^{\varrho_2 t}}{\varrho_1 - \varrho_2} = \sin t.$$

Die automorphen Transformationen zweier Quadrate lassen sich, wie aus den Gleichungen 18) und 19) ersichtlich ist, zusammenfassen

in Gleichungen zwischen gewöhnlichen komplexen Grössen, nämlich 8) in die Gleichung:

$$(x_0' + ix_1') = (x_0 + ix_1)(\cos t + i \sin t),$$

8*) in

$$(x_0' + ix_2') = (x_0 - ix_1)(\cos t + i \sin t).$$

Bezeichnet man allgemein die komplexe Grösse $y_1 + iy_1$ mit y, setzt $\cos t = a_0$, $\sin t = a_1$, so kann man die erste Gleichung auch abgekürzt schreiben:

$$x' = xa,$$

und wenn man $y_0 - iy_1 = \bar{y}$ setzt, die zweite Gleichung:

$$x' = \bar{x}a.$$

Die Gleichung

$$x' = xa$$

mit der wir allein uns beschäftigen wollen, lässt nun sofort erkennen,

1. dass die Transformationen 8) eine eingliedrige Gruppe bilden, da $a_0^2 + a_1^2 = 1$ ist;
2. dass die Transformationen der Gruppe mit einander vertauschbar sind.

Denn lässt man auf die Transformation $x' = xa$ eine zweite $x'' = x'b$ folgen, so ergiebt sich $x'' = (xa)b = x(ab)$, oder da ab wieder eine gewöhnliche komplexe Zahl ist, die mit c bezeichnet werden mag, $x' = xc$. Die Gleichung $c = ab$ heisst die Parametergleichung der Gruppe. Sie lehrt die Parameter c_0, c_1 und a_0, a_1 und b_0, b_1 finden und stellt wiederum eine Gruppe dar wie $x' = xa$. Man kann also sagen, die Gruppe $x' = xa$ ist ihre eigene Parametergruppe. Die Transformationen der Gruppe sind ferner miteinander vertauschbar. Denn lässt man auf $x' = x_0$ folgen $x'' = x'a$, so kommt $x'' = xba$, welches von $x'' = xab$ nicht verschieden ist, da $ba = ab$. Die Vertauschbarkeit der Transformationen fällt also genau zusammen mit der Vertauschbarkeit der Faktoren in dem Produkt zweier gewöhnlicher komplexer Zahlen. Die Transformation $x' = abx$, wobei die Faktoren in beliebiger Folge geschrieben werden können, stellt also ebenfalls eine automorphe Transformation zweier Quadrate dar, bei denen aber die Parameter in bilinearer Verbindung auftreten. Denn die Entwickelung giebt:

$$x_0' = (a_0 b_0 - a_1 b_1)x_0 - (a_0 b_1 + a_1 b_0)x_1,$$
$$x_1' = (a_0 b_1 + a_1 b_0)x_0 + (a_0 b_0 - a_1 b_1)x_1,$$

Setzt man hierin $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1 = b_{12}$, so erhält man die Cayleysche Transformation:

$$x_0' = (b_0^2 - b_{12}^2)x_0 - 2b_0 b_{12} x_1,$$
$$x_1' = 2b_0 b_{12} x_0 \qquad + (b_{02} - b_{12}^2)x_1.$$

(Fortsetzung folgt.)

Hilfstafel zur Auflösung quadratischer Gleichungen mit reellen Wurzeln.

Von

R. Mehmke

in Stuttgart.

Die algebraische Auflösung einer numerischen Gleichung zweiten Grades nach der bekannten elementaren Formel empfiehlt sich nicht, ausser wenn die Koeffizienten ganz einfache Zahlen sind und zugleich eine Quadrattafel benützt wird. Sind, wie es häufig der Fall ist, die Logarithmen der Koeffizienten gegeben und von den Wurzeln der Gleichung ebenfalls die Logarithmen verlangt, so wäre bei Anwendung jener Formel ein viermaliges Aufschlagen der Logarithmentafel nötig. Zweimaliges Aufschlagen genügt bei Mollweides bekannter Auflösung mit Hilfe goniometrischer Funktionen. Um mit einmaligem Aufschlagen auszukommen, hat Gauss eine besondere Hilfstafel berechnen lassen, die man in Vega-Hülsses Sammlung mathematischer Tafeln in der Ausgabe von 1840, Tafel XII, S. 636—678 findet. Sie besteht in drei mit D, E, F überschriebenen Zusatzkolonnen zu der, ebenfalls aus drei Kolonnen mit den Überschriften A, B, C zusammengesetzten Gaussischen Tafel der Leonellischen oder sogenannten Additionslogarithmen. Diese Gaussische Tafel ist meines Wissens nicht wieder abgedruckt worden. Ich glaube nicht, dass man daraus schliessen darf, sie hätte keinem wirklichen Bedürfnis entsprochen, denn quadratische Gleichungen kommen in der angewandten Mathematik häufig genug vor. Es leidet aber jene Tafel an einigen Mängeln. Infolge der Verquickung mit den Additionslogarithmen und weil mehr Fälle unterschieden werden als nötig ist, hat sie zu viele Kolonnen; auch sind die Rechenvorschriften für die einzelnen Fälle einander sehr unähnlich und das Aufschlagen ist unbequem. Ich habe vor einer Reihe von Jahren eine Hilfstafel zur Auflösung quadratischer Gleichungen mit reellen Wurzeln konstruiert, die mir vor der Gaussischen folgende Vorzüge zu haben scheint:

1. Man hat, wenn man sie benützt, bloss zwei Fälle zu unterscheiden, statt, wie bei Gauss, deren drei.

2. Die Formeln und das Rechenschema sind in beiden Fällen dieselben.
3. Der Gebrauch der Tafel ist bequem, weil man direkt in sie eingeht.

Die Tafel besteht aus zwei, den genannten beiden Fällen entsprechenden Teilen von derselben Einrichtung wie die Logarithmentafeln. Auch nach dem, letztes Jahr erfolgten Erscheinen der „Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämtlicher trinomischer Gleichungen“ von Gundelfinger, einer modifizierten Erweiterung der erwähnten Gaussischen Tafel, ist, wie ich glaube, die Veröffentlichung meiner Tafel nicht überflüssig. Ich gebe dieselbe hier mit drei Stellen, um zunächst ihre Einrichtung zu zeigen und weil diese geringe Zahl von Stellen bei manchen Anwendungen schon ausreicht. Auch wenn man vier oder fünf Stellen ansetzte, wäre die Tafel noch auf einem verhältnismässig kleinen Raum unterzubringen.

Die Unterschiede zwischen dieser Tafel und der Gaussischen wie auch den genannten und den älteren Tafeln zur Auflösung trinomischer Gleichungen (Lambert, Barlow, Kulik, Guldberg) beabsichtige ich später zu besprechen und bei dieser Gelegenheit neue Entwürfe, auch von Tafeln zur Auflösung quaternomischer Gleichungen, vorzulegen.

Ableitung der Formeln.

Die aufzulösende Gleichung habe die Gestalt:

1) $$ax^2 \pm bx - c = 0, \quad \text{oder aber} \quad ax^2 \pm bx + c = 0,$$

wo a, b und c positiv sein sollen. Es werden also die beiden Fälle „Absolutglied negativ“ und „Absolutglied positiv“ unterschieden. Setzt man

2) $$x = \pm \frac{c}{b} \cdot \frac{1}{y} \quad \text{bezw.} \quad x = \mp \frac{c}{b} \cdot \frac{1}{y},$$

so geht die Gleichung durch Multiplikation mit $y^2 : c$ über in

3) $$y^2 - y - \frac{ac}{b^2} = 0, \quad \text{bezw.} \quad y - y^2 - \frac{ac}{b^2} = 0.$$

Wir wollen

4) $$\log y = v$$

als Funktion von

5) $$u = \log(y^2 - y) \quad \text{bezw.} \quad u = \log(y - y^2)$$

betrachten. Dass dies möglich ist, wird unten noch gezeigt werden. Diese beiden Funktionen sind in den beiden Teilen der Hilfstafel dargestellt. Zufolge Gleichung 3) muss

6) $$u = \log \frac{ac}{b^2}$$

genommen werden, damit der zugehörige, aus dem ersten bezw. zweiten Teile der Tafel zu bestimmende Wert von $v = \log y$, in 2) eingesetzt,

eine Wurzel der gegebenen Gleichung liefert. Bezeichnet man diese Wurzel mit x_1, so ergiebt sich

7) $\log(\pm x_1) = \log\frac{c}{b} - v$ bezw. $\log(\mp x_1) = \log\frac{c}{b} - v.$

Die andere Wurzel, x_2, erhält man mit Hilfe der Beziehung

$$x_1 x_2 = -\frac{c}{a} \quad \text{bezw.} \quad x_1 x_1 = \frac{c}{a},$$

nämlich

8) $$\log(\mp x_2) = v + \log\frac{b}{a}.$$

Es wird übrigens, wenn man zur Abkürzung:

9) $$\frac{c}{b} = d, \quad \frac{b}{a} = e$$

setzt,

10) $$\frac{ac}{b^2} = \frac{d}{e}.$$

Die

Rechenvorschriften

lassen sich nun zusammenfassen wie folgt.

Berechne

$$\log d = \log c - \log b,$$
$$\log e = \log b - \log a,$$

und

$$u = \log d - \log e,$$

suche zu diesem Werte von u den Wert von v im ersten oder zweiten Teile der Hilfstafel, je nachdem das Absolutglied der gegebenen Gleichung negativ oder positiv ist, dann wird

$$\log(\pm x_1) = \log d - v, \quad \text{bezw.} \quad \log(\mp x_1) = \log d - v,$$
$$\log(\mp x_2) = v + \log e.$$

Es gilt bei x_1 und x_2 das $\left\{\begin{matrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{matrix}\right\}$ Zeichen, je nachdem in der gegebenen Gleichung beim zweiten Gliede das + oder − Zeichen vorhanden ist.

Bei der Ausrechnung mag man sich der folgenden Anordnung bedienen. Zur Verdeutlichung des Ganges der Rechnung sind die Reihen, nach der Ordnung ihres Auftretens, durch römische Ziffern bezeichnet und die mit ihnen vorzunehmenden Operationen rechterhand angegeben worden.

$\log c$	I
$\log b$	II
$\log c$	III
$\log d$	IV = I − II
v	VII
$\log e$	V = II − III
u	VI = IV − V
$\log(\pm x_1)$ bezw. $\log(\mp x_1)$	VIII = IV − VII
$\log(\mp x_2)$	IX = VII + V.

Hilfstafel zur Auflösung quadratischer Gleichungen mit reellen Wurzeln.

1. Absolutglied negativ (v wächst mit u).

u	v 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
7·	0·000	001	001	001	001	001	002	002	003	003	1
8·	004	005	007	008	011	013	016	020	025	031	7
9·	033	047	057	068	082	098	116	136	158	182	27
0·	209	233	268	301	335	371	408	446	486	527	41
1·	568	611	654	699	743	789	834	881	927	974	48
2·	1·022	069	117	165	214	262	311	360	409	458	49
3·	507	556	605	655	704	754	803	853	903	952	50
4·	2·002	052	102	152	201	251	301	351	401	451	

2. Absolutglied positiv (v nimmt ab, wenn u wächst).

u	v 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
7·	9·	999	999	999	999	999	998	998	997	997	1
8·	996	994	993	991	989	986	982	976	970	960	12
9·0	948	947	945	943	942	940	938	937	935	933	2
9·1	931	928	926	924	921	919	916	914	911	908	4
9·2	904	901	898	894	890	886	881	877	871	866	6
9·3	860	854	847	839	830	821	809	796	779	754	
9·39	754	750	747	743	738	733	727	719	699		

Beispiele.

1. Fall, Absolutglied negativ.

$$10^{0\cdot291}\cdot x^2 - 10^{0\cdot691}\cdot x - 10^{0\cdot555} = 0.$$

$$\begin{array}{rl}
\log c & 0\cdot555 \\
\log b & 0\cdot691 \\
\log a & 0\cdot219 \\
\hline
\log d & 9\cdot864 - 10 \\
v & 0\cdot081 \\
\log e & 0\cdot472 \\
\hline
u & 9\cdot392 - 10 \\
\hline
\log(-x_1) & 9\cdot783 - 10 \\
\log\ \ x_2 & 0\cdot553.
\end{array}$$

2. Fall, Absolutglied positiv.

$$10^{1\cdot203}\cdot x^2 - 10^{1\cdot536}\cdot x + 10^{0\cdot929} = 0.$$

$$\begin{array}{rl}
\log c & 0\cdot929 \\
\log b & 1\cdot536 \\
\log a & 1\cdot203 \\
\hline
\log d & 9\cdot393 - 10 \\
v & 9\cdot938 - 10 \\
\log e & 0\cdot333 \\
\hline
u & 9\cdot060 - 10 \\
\hline
\log x_1 & 9\cdot455 - 10 \\
\log x_2 & 0\cdot271.
\end{array}$$

Zur weiteren **Erläuterung der Tafel**

diene folgendes. Wie die logarithmische Darstellung* der Funktion $z = y^2 - y$ in Fig. 1 erkennen lässt, ist $v = \log y$ eine einwertige Funktion von $u = \log(y^2 - y)$, die mit abnehmendem u der Null, mit wachsendem u dem Werte $\frac{1}{2}u$ sich unbegrenzt nähert, entsprechend dem Umstand, dass die zugehörige Kurve die negative u-Axe und die (gestrichelt gezeichnete) Gerade zur Gleichung $v = \frac{1}{2}u$ zu Asymptoten hat. Der erste Teil der Tafel liefert zu jedem Wert von u zwischen $7 \cdot 000 - 10$ und $5 \cdot 000$ den zugehörigen Wert der in Rede stehenden Funktion v mit drei Dezimalen. Für $u \leqq 7 \cdot 000 - 10$ ist bis auf drei Dezimalen

Fig. 1.

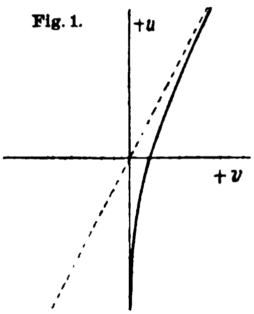
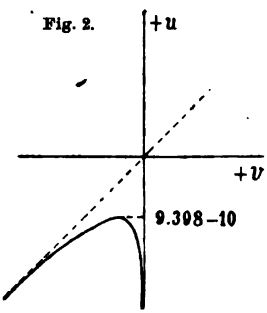


Fig. 2.



richtig $v = 0 \cdot 000$, für $u \geqq 5 \cdot 000$ ebenfalls bis auf drei Dezimalen richtig $v = \frac{1}{2}u$.

Das logarithmische Bild der Funktion $z = y - y^2$ in Fig. 2 zeigt, dass $v = \log y$ eine zweiwertige Funktion von $u = \log(y - y^2)$ ist, vorausgesetzt, dass u unter dem grössten Werte von $\log(y - y^2)$, nämlich

$$\log\frac{1}{4} = 9 \cdot 3979400 - 10$$

liegt. Mit Rücksicht auf die Genauigkeit und bequeme Interpolation ist im zweiten Teile der Tafel derjenige Funktionszweig dargestellt worden, der die kleineren Tafeldifferenzen giebt. Er entspricht dem Teil der Kurve rechts von ihrem höchsten Punkt, der in der That von den Parallelen zur v-Axe unter günstigeren Winkeln geschnitten wird, als der Teil links vom höchsten Punkt. Allerdings hat diese Wahl den Nachteil, dass man eine mit wachsendem Argument abnehmende Funktion erhält. Es hätte ebenso gut der andere Funktionszweig tabuliert werden können, bei dem v mit u wächst, aber es wären dann die Tafeldifferenzen beträchtlich grösser geworden.

Ergiebt sich $u > 9 \cdot 3979400 - 10$, d. h. bei dreistelliger Rechnung $u > 9 \cdot 398 - 10$, so sind die Wurzeln der vorgelegten Gleichung imaginär.

* Über die logarithmischen Bilder von Funktionen einer Veränderlichen und ihre Konstruktion vergl. meine Abhandlung „Neue Methode, beliebige numerische Gleichungen mit einer Unbekannten graphisch aufzulösen", Civilingenieur Bd. 35, S. 617, 1889.

Harmonische Analyse mittelst des Polarplanimeters.

Von

S. FINSTERWALDER
in München.

Wer häufig in die Lage kommt, graphisch gegebene Funktionen harmonisch zu analysieren, oder mit anderen Worten, in eine Fouriersche Reihe zu entwickeln, wird sich wohl eines der zu diesem Zwecke konstruierten Integrierapparate (harmonische Analysatoren) bedienen, wie solche heutzutage in sehr vollkommener Form von Coradi nach den Grundsätzen von Sharp und Henrici* hergestellt werden. Für den aber, der nur gelegentlich solche Entwickelungen vorzunehmen hat, verlohnt sich die Anschaffung eines solchen komplizierten Instrumentes nicht, und für ihn mag es von Wert sein zu wissen, dass man auch mittelst eines gewöhnlichen Polarplanimeters eine mechanische Bestimmung der Koeffizienten der Fourierschen Reihe vornehmen kann, wenn schon dieselbe die Zeichnung von eben so viel Kurven voraussetzt, als Koeffizienten zu bestimmen sind. Letzterer Umstand dürfte von der Verfolgung des an sich so naheliegenden Gedankens, das in allen Händen befindliche Integrierinstrument auch für diesen Zweck auszunützen, abgeschreckt haben.** Dabei übersah man aber, wie einfach jene Kurven zu zeichnen sind, und dass bei gehöriger Anordnung das Zeichnen derselben kaum mehr Mühe erfordert wie das Umfahren mit dem Planimeter. Da zudem der Grad der bei der graphischen Integration erreichbaren Genauigkeit ein sehr hoher ist, und wohl für die praktischen Bedürfnisse ausreichen wird, so empfiehlt sich das Verfahren für alle jene, welche graphische Prozesse den rechnerischen vorzuziehen pflegen, also vor allem für die Techniker. Freilich werden Solche, bei denen das Umgekehrte der Fall ist (Astronomen, Geodäten und Meteorologen), viel lieber zu einer rechnerischen Auswertung der bestimmten Integrale schreiten, welche für viele Fälle

---

* Vergl. hierzu: W. Dyck, Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Apparate, München 1892, namentlich den darin (S. 125) enthaltenen Aufsatz: Über Instrumente zur Harmonischen Analyse von O. Henrici. Die nunmehr von Coradi adoptierte Form des Analysators ist darin noch nicht erwähnt. Dieselbe ist ein Meisterstück in Anordnung und Ausführung.

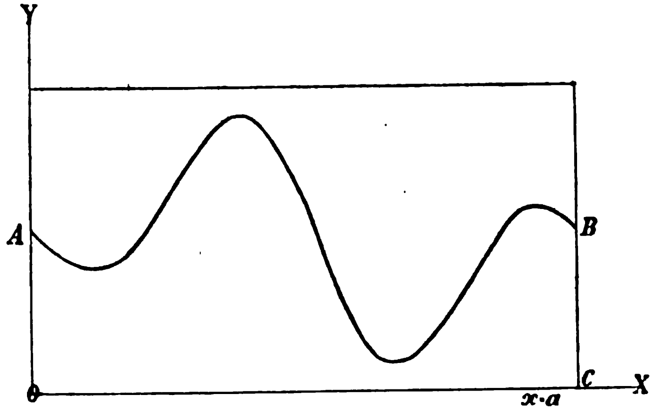
** Vergl. dagegen die Anmerkung am Schlusse.

der Praxis durch tabellarische Behelfe recht handlich gestaltet werden kann.

Es sei die zu analysierende Kurve $y = f(x)$ in dem Intervalle von $x = 0$ bis $x = a$ zeichnerisch gegeben. Unter bestimmten, allerdings sehr weiten Voraussetzungen, von welchen hier nur die Eindeutigkeit, Endlichkeit und abteilungsweise Stetigkeit der Funktion $f(x)$ und ihrer ersten Ableitung genannt werden mögen, lässt sich für $f(x)$ die im gegebenen Bereich konvergente Reihe ansetzen:

$$\begin{cases} y = A_0 + A_1 \cos \frac{2x\pi}{a} + A_2 \cos 2\frac{2x\pi}{a} + A_3 \cos 3\frac{2x\pi}{a} + \cdots + A_n \cos n\frac{2x\pi}{a} + \cdots \\ \qquad + B_1 \sin \frac{2x\pi}{a} + B_2 \sin 2\frac{2x\pi}{a} + B_3 \sin 3\frac{2x\pi}{a} + \cdots + B_n \sin n\frac{2x\pi}{a} + \cdots \end{cases}$$

Fig. 1.



Hierbei ist:

$$A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a y\,dx;$$

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a y\cos\left(n\frac{2x\pi}{a}\right)dx; \qquad B_n = \frac{2}{a}\int_0^a y\sin\left(n\frac{2x\pi}{a}\right)dx.$$

Je zwei unter einander stehende Glieder der Reihe können in eines vereinigt werden; so ist:

$$A_n \cos n\frac{2x\pi}{a} + B_n \sin n\frac{2x\pi}{a} = \mathsf{A}_n \cos\left(n\frac{2x\pi}{a} - \alpha_n\right),$$

wobei:

$$\mathsf{A}_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

und:

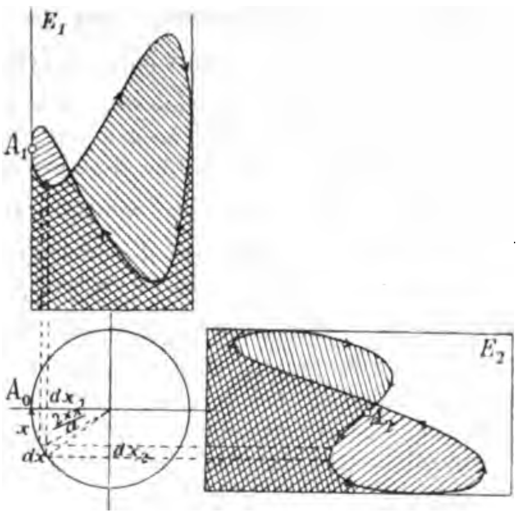
$$\cos\alpha_n = \frac{A_n}{\mathsf{A}_n}; \quad \sin\alpha_n = \frac{B_n}{\mathsf{A}_n}; \quad \operatorname{tg}\alpha_n = \frac{B_n}{A_n}$$

ist. Nach diesen Vorbemerkungen über ganz bekannte Dinge soll zur graphischen Ermittelung der Koeffizienten übergegangen werden. Das konstante Glied A_0 stellt den Mittelwert der Funktion $f(x)$ im Intervall

$0 < x < a$ dar und lässt sich in der Weise bestimmen, dass man die Fläche $OABC$ mit dem Planimeter ausmisst und durch die Länge des Intervalles a dividiert.

Um die Koeffizienten A_1 und B_1 zu erhalten, denke ich mir die Zeichenebene samt der darauf befindlichen Kurve $y = f(x)$ auf einen Kreiscylinder vom Umfang a so aufgewicknet, dass die X-Axe auf die Basis des Cylinders zu liegen kommt. Wenn die beiden Ordinaten am Beginn und am Schluss des Intervalles übereinstimmen, bildet die Kurve auf dem Cylinder einen geschlossenen Linienzug. Wäre dies nicht der Fall, so müsste man zur Schliessung des Zuges ein Stück Mantellinie hinzunehmen. Es würde dann der Linienzug an der Schliessungsstelle eine ähnliche Stetigkeitsunterbrechung aufweisen, wie solche in endlicher Anzahl auch in den übrigen Teilen der Kurve vorkommen könnten. Ich projiziere nun diesen Linienzug auf zwei zu einander rechtwinklige Ebenen $E_1 E_2$ durch die Axe des Cylinders. Die eine Ebene E_1 geht durch diejenige Mantellinie des Cylinders, auf welche die Anfangs- bezw. Endordinate aufgetragen wurde. Die andere E_2 steht senkrecht zur eben definierten Ebene. Die beiden Projektionen bilden wieder geschlossene Linienzüge, und der von ihnen umgrenzte Flächeninhalt giebt nach Division mit dem halben Cylinderumfang die gesuchten Koeffizienten. Um dies zu beweisen, beachten wir, dass die Projektionen dx_1 bezw. dx_2 des Elementes dx der auf dem Cylinderumfang aufgewickelten X-Axe auf die Ebene E_1:

Fig. 2.



$$dx_1 = dx \cdot \sin \frac{2x\pi}{a},$$

auf die Ebene E_2: $$dx_2 = dx \cdot \cos \frac{2x\pi}{a}$$

projiziert werden. Das von der Projektion der Kurve umschlossene Flächen-

Anmerkung. In der Figur sind die positiv gezählten Flächen von links nach rechts, die negativ gezählten von rechts nach links schraffiert; die Pfeilspitzen an den Kurven geben den Umfahrungssinn für das Planimeter unter der Voraussetzung an, dass der Sinn entgegengesetzt dem Uhrzeiger positive Planimeterablesungen giebt.

stück lässt sich durch Summation der Elemente $y\,dx_1$ bezw. $y\,dx_2$ finden, wobei zu beachten ist, dass jene Elemente, welche der Rückseite des Cylinders entsprechen, negativ zu nehmen sind, wie es der Rückläufigkeit der zugehörigen Elemente dx_1 bezw. dx_2 entspricht. Die Elemente $y\,dx_1$ bezw. $y\,dx_2$ sind aber keine anderen als jene, welche in den Integralen der Koeffizienten A_1 und B_1 nämlich:

$$\int_0^a y\,dx \cos\frac{2x\pi}{a} \quad \text{und} \quad \int_0^a y\,dx \sin\frac{2x\pi}{a}$$

vorkommen. Man übersieht unmittelbar, dass in diese Integrale die einzelnen Elemente auch genau mit demselben Vorzeichen eingehen, wie bei der Zusammensetzung des Flächeninhaltes der Projektion des Linienzuges.

Die Ermittelung der folgenden Reihenkoeffizienten lässt sich auf ganz ähnliche Art bewirken. Um zum Beispiel A_2 und B_2 zu erhalten, denke ich mir die Zeichenebene samt der Kurve $y = f(x)$ auf einen Cylinder vom Umfang $\frac{a}{2}$ derart aufgewickelt, dass die X-Axe den Umfang der Basis zweimal umschliesst. Aus dem Flächeninhalt der Projektionen dieses neuen Linienzuges auf dieselben zwei zu einander senkrechten Ebenen können die Koeffizienten A_2 und B_2 wiederum durch Division mit $\frac{a}{2}$ gefunden werden. Ganz ähnlich verfährt man bei Aufsuchung der folgenden Koeffizienten. Um beispielsweise A_n und B_n zu finden, hätte man die Kurve $y = f(x)$ auf einen Cylinder vom Umfang $\frac{a}{n}$ derart aufzutragen, dass die X-Axe die Basis n-mal umschlingt. Der Beweis lässt sich durch einfache Wiederholung der Schlüsse führen, die bei der Ableitung der analogen Prozedur für die Bestimmung der Koeffizienten A_1 und B_1 angewendet wurden. Der Unterschied besteht nur darin, dass jetzt zum Bogen x auf dem Basiskreis ein Centriwinkel $n\frac{2x\pi}{a}$ gehört.

Die Verzeichnung der Kurven, deren Flächeninhalte die Reihenkoeffizienten liefern, wäre nach dem angegebenen Verfahren keineswegs besonders umständlich. Sie lässt sich aber noch ganz erheblich vereinfachen, wenn man folgende Umstände beachtet:

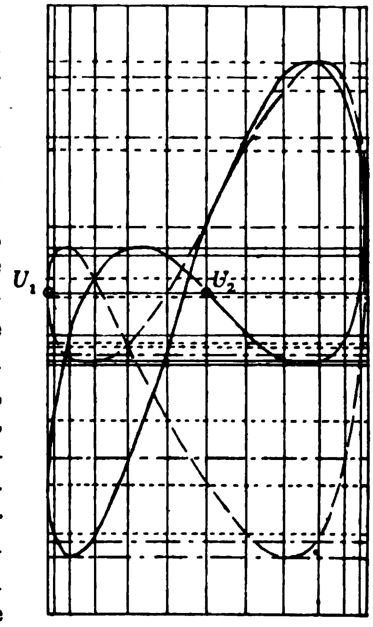
Statt die Kurve $y = f(x)$ auf den Cylinder vom Umfang $\frac{a}{n}$ aufzutragen, kann man dieselbe vorher in der Richtung der Y-Axe auf das n-fache dehnen und diese Kurve mit den gedehnten Abscissen [und unveränderten Ordinaten] auf den Cylinder vom Umfange a auftragen. Die neue gedehnte X-Axe wird diesen Cylinder ebenfalls n-mal umschliessen. Der Flächeninhalt der Projektionen dieser Kurven auf die beiden Ebenen wird dann nur n-mal so gross als beim kleinen Cylinder. Um die Koeffizienten A_n und B_n zu erhalten, hat man dann

die Flächeninhalte nicht mit dem halben Cylinderumfange, sondern mit dem $\frac{n}{2}$-fachen des Cylinderumfanges zu dividieren. Auf diese Weise lassen sich alle Kurven, deren Projektionen die Reihenkoeffizienten geben, auf einen Cylinder auftragen.

Zur wirklichen Verzeichnung der Projektionen schlägt man dann am besten folgendes Verfahren ein:

Man teilt den Cylinderumfang in eine solche Anzahl von gleichen Teilen, dass die Ordnungszahlen der Reihenkoeffizienten als Faktoren in dieser Anzahl enthalten sind, z. B. in 60 Teile, wenn man sich auf die ersten sechs cos- und sin-Glieder beschränkt, oder in 24, wenn man nur bis zu den vierten Gliedern gehen will. Dann zieht man in der Projektion die Erzeugenden des Cylinders, die zu diesen Teilpunkten gehören. Diese geben ein erstes System von Parallel-Linien. Ein zweites zu diesem senkrechtes Parallel-Liniensystem wird nun dadurch erhalten, dass man die Ordinaten der Kurve, die zu diesen Teilpunkten gehören, in vertikaler Richtung aufträgt und horizontale Linien durch die Teilpunkte zieht. Man hat dabei die Vorsicht zu gebrauchen, dass man die Parallel-Linien — etwa durch verschiedene Farben — auseinander hält, welche den einzelnen aufsteigenden und absteigenden Ästen der Kurve entsprechen. Zu dem so gefundenen Parallel-Liniennetz sind nun die Kurven, deren Flächeninhalte die Koeffizienten A_1 und B_1 geben, einfache Diagonalkurven; und zwar ist die Kurve, welche A_1 giebt, jene Diagonalkurve, die beim Punkte U_2 in der Mitte der Projektion des Cylinderumfanges beginnt, während die zum Koeffizienten B_1 gehörige ihren Anfang bei U_1 am Rande der Projektion des Cylinders nimmt. Die Kurven für die höheren Koeffizienten lassen sich in ähnlicher Weise als Diagonalkurven des Netzes finden. Man hat nur, um A_2 und B_2 zu finden, von den Teilpunkten des Cylinderumfanges und den zugehörigen Erzeugenden die ungeraden zu unterdrücken, und die geraden beizubehalten. Bei den Koeffizienten A_3 und B_3 werden alle Teilpunkte unterdrückt, die nicht durch 3 teilbar sind, bei den Koeffizienten A_4 und B_4 jene, die nicht durch 4 teilbar sind und so fort. Man sieht also, dass nach Verzeichnung des Parallel-Liniennetzes die Konstruktion der gewünschten Kurven nur mehr auf die Verbindung der gehörig gewählten Netzpunkte

Fig. 3.



hinauskommt. Um die Reihenkoeffizienten zu bestimmen, hat man die so gezeichneten Kurven mit dem Planimeter zu umfahren und die ermittelten Flächeninhalte durch den halben Umfang $\frac{a}{2}$ und die Ordnungszahl des Koeffizienten zu dividieren.

Es soll noch darauf hingewiesen werden, dass mit Hilfe unserer Methode auch die Möglichkeit gegeben ist, die Grössen A_n und α_n [Amplitude und Phasenverschiebung] direkt zu bestimmen. Die verschiedenen Diagonalkurven ein und desselben Parallel-Liniennetzes, die nicht gerade von den Punkten U_1 oder U_2 ausgehen, stellen nämlich, wie leicht ersichtlich, die Projektionen der Cylinderkurve auf Ebenen dar, welche gegen die ursprüngliche Projektionsebene E_1 unter verschiedenen Winkeln β geneigt sind. Der Flächeninhalt einer solchen Projektion ist dann durch $\int y\,dx_3$ gegeben, wo

$$dx_3 = dx \cdot \sin\left(\frac{2x\pi}{a} \cdot n - \beta\right)$$

wird. Dieser Flächeninhalt F_3 lässt sich nach Entwickelung des Sinus unter dem Integralzeichen auch in der Form schreiben:

$$\cos\beta \cdot B_n - \sin\beta \cdot A_n.$$

Wählen wir den Winkel β so, dass der Flächeninhalt der Projektion gerade $= 0$ wird, d. h. dass die positiven und negativen Teile des Flächeninhaltes sich aufheben, so kann

$$\sin\beta = \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}}; \quad \cos\beta = \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}}$$

gesetzt werden. Der Winkel β stimmt dann mit dem Phasenwinkel α_n überein.

Betrachten wir die Projektion auf eine Ebene, welche den Winkel $\alpha = \alpha_n - 90^0$ mit der Ausgangsebene einschliesst, so wird der Flächeninhalt derselben:

$$\cos\alpha\, B_n - \sin\alpha \cdot A_n = \sin\alpha_n \cdot B_n + \cos\alpha_n \cdot A_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = \mathsf{A}_n.$$

Es ist dies offenbar der absolut grösste Wert, welchen der Flächeninhalt der Projektion der Cylinderkurve auf irgend eine Ebene annehmen kann. Dieser Flächeninhalt dividiert durch den $\frac{n}{2}$-fachen Umfang des Cylinders giebt die Amplitude A_n, der Winkel α, den die zugehörige Projektionsebene mit der ursprünglichen einschliesst, giebt die Phasenverschiebung $\alpha_n = 90^0 + \alpha$.

Bei der wirklichen Ausführung müsste man so vorgehen, dass man zunächst jene beiden Diagonalkurven aussucht, welche am nächsten den Flächeninhalt 0 geben. Die eine, zum Winkel β_1 gehörige, giebt einen positiven, die andere zu β_2 gehörige einen negativen Inhalt. Zwischen β_1 und β_2 interpoliert man den Winkel $\beta = \alpha_n$ nach Maßgabe der Flächeninhalte. Man sucht dann die Projektion auf die Ebene, die den Winkel $\beta - 90^0$ einschliesst und erhält aus ihr A_n. Das direkte Aufsuchen der Diagonalkurve mit grösstem Inhalt würde für den Phasenwinkel eine ganz unzureichende Bestimmung geben, da sich in

der Nähe des Maximums der Inhalt mit dem Phasenwinkel kaum mehr ändert.

Um die Genauigkeit der harmonischen Analyse mittelst des Planimeters praktisch zu erproben, habe ich einen aus zwei Geraden bestehenden Linienzug von beistehender Form in eine Fouriersche Reihe entwickelt und folgende Formel erhalten:

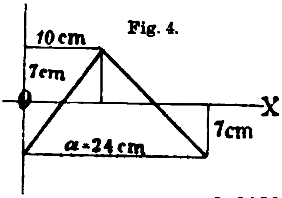


Fig. 4.

$$\begin{aligned} y = &- 5{,}4450 \cos 15^0 x - 1{,}4590 \sin 15^0 x \\ &- 0{,}3647 \cos 30^0 x + 0{,}6318 \sin 30^0 x \\ &- 0{,}3242 \cos 45^0 x - 0{,}3242 \sin 45^0 x \\ &- 0{,}2736 \cos 60^0 x + 0{,}1579 \sin 60^0 x \\ &- 0{,}0156 \cos 75^0 x - 0{,}0584 \sin 75^0 x \\ &- 0{,}1621 \cos 90^0 x + 0{,}0000 \sin 90^0 x + \cdots \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &+ \frac{2 \cdot 9180}{n^2} [\cos(n \cdot 210^0) - 1] \cos(n \cdot 15^0 \cdot x) + \cdots \\ &+ \frac{2 \cdot 9180}{n^2} \sin(n \cdot 210^0) \cdot \sin(n \cdot 15^0 \cdot x) + \cdots \end{aligned} \right.$$

Die graphische Ermittelung der Koeffizienten nahm ich in doppelter Weise vor. Zunächst an einem Cylinder von 24 cm Umfang, wobei sich für die ersten vier Paare von Gliedern nachstehende Werte ergaben:

$$\begin{aligned} y = &- 5{,}422 \cos 15^0 x - 1{,}483 \sin 15^0 x \\ &- 0{,}355 \cos 30^0 x + 0{,}615 \sin 30^0 x \\ &- 0{,}330 \cos 45^0 x - 0{,}328 \sin 45^0 x \\ &- 0{,}270 \cos 60^0 x + 9{,}155 \sin 60^0 x. \end{aligned}$$

Rechnet man für 24 gleich verteilte Ordinaten die Summe der ersten vier Paare der Reihenglieder nach der genauen Formel und vergleicht man sie mit den Werten, welche aus der graphisch ermittelten Formel folgen, so ergiebt sich ein mittlerer Fehler (Wurzel aus dem mittleren Fehlerquadrat) von 0,028 cm, oder $\frac{1}{500}$ der grössten Ordinatendifferenz. Die so erreichte Genauigkeit erscheint um so befriedigender, als die ersten vier Paare von Gliedern die analysierte gebrochene Linie überhaupt nur mit einem mittleren Fehler von 0,182 cm darstellen können, neben welchem der Unterschied der rechnerischen und der graphischen Entwickelung beinahe verschwindet. Um aber zu sehen, wie weit sich die Genauigkeit der Methode steigern lässt, habe ich den gleichen Linienzug nur mit doppelt vergrösserten Ordinaten und mit einem auf 60 cm ausgedehnten Abscisseninterval nochmals analysiert und dabei die lithographisch reproduzierte Vorzeichnung der Projektion der 60 Erzeugenden eines Cylinders von 60 cm Umfang benützt.*

* Bei Benützung einer solchen lithographischen Unterlage darf man natürlich nicht ausser Acht lassen, den Papiereingang durch Umfahrung einer geeigneten Probefläche von bekanntem Inhalt, etwa des lithographierten rechteckigen Umrisses des Cylinders zu bestimmen und in Rechnung zu ziehen. Die bei den beschriebenen Versuchen notwendigen Flächenmessungen und Rechnungen hat mein Assistent Herr R. Lutz in dankenswerter Weise ausgeführt.

Es ergaben sich nun folgende Werte für die ersten sechs Paare von Gliedern:

$$\begin{aligned} y = & - 5{,}436 \cos(15^0 x) - 1{,}460 \sin(15^0 x) \\ & - 0{,}369 \cos(30^0 x) + 0{,}628 \sin(30^0 x) \\ & - 0{,}325 \cos(45^0 x) - 0{,}325 \sin(45^0 x) \\ & - 0{,}271 \cos(60^0 x) + 0{,}156 \sin(60^0 x) \\ & - 0{,}015 \cos(75^0 x) - 0{,}059 \sin(75^0 x) \\ & - 0{,}158 \cos(90^0 x) - 0{,}002 \sin(90^0 x). \end{aligned}$$

Die Übereinstimmung mit den gerechneten Werten ist nun noch viel besser geworden, nur der erste Koeffizient weicht noch um 0,009 cm ab, sonst kommen keine grösseren Differenzen als 0,004 cm mehr vor. Freilich beansprucht die Aufsuchung der zwölf Koeffizienten auch die Tagesleistung eines gewandten Zeichners.

Die auseinandergesetzte Methode ist durch einen Konstruktionsversuch zur Herstellung eines Harmonischen Analysators, den O. Henrici an der früher citierten Stelle S. 129 unter dem Spezialtitel: „Neues Instrument“ beschreibt, ziemlich vorgebildet und mit Rücksicht auf den rein mathematischen Inhalt hätte die Veröffentlichung derselben leicht unterlassen werden können. Ich habe mich indessen auf den Standpunkt gestellt, dass den Technikern eine ihnen gelegene Methode nicht vorenthalten werden soll.

Anmerkung: Während des Satzes vorstehender Zeilen wurde ich vom Herausgeber der Zeitschrift auf eine Arbeit von Perry und Hunt: „The Development of Arbitrary Funktions“, Phil. Magazine Vol. XL 5 Ser. July-December 1895, S. 506—511, aufmerksam gemacht, welche den Hinweis auf eine Note des erstgenannten Verfassers in: „The Electrician“ vom 28. Juni 1895 enthält. Nach Letzterer geht die Grundidee des auseinandergesetzten Verfahrens auf keinen Geringern als Clifford zurück, von dessen Schülern am Finsbury Technical College dasselbe praktisch ausgearbeitet und erprobt wurde. Die Herren Perry und Hunt haben das Verfahren in der erstgenannten Arbeit auf die Auswertung von Integralen von der Form:

$$\int_0^a y \cdot Q(x)\, dx,$$

worin $Q(x)$ eine bekannte, y eine graphisch gegebene Funktion von x ist, ausgedehnt. Der Wunsch, die Methode weiteren Kreisen zugänglich zu machen, mag es rechtfertigen, dass ich unter den auseinandergesetzten Verhältnissen die Publikation meiner Mitteilung nicht zurückgezogen habe.

Die räumliche und zeitliche Ausbreitung der Gravitation.

Von

Paul Gerber

in Stargard in Pommern.

1. Das Grundgesetz.

Die Gravitationserscheinungen zeigen die einzigen an getrennten Körpern bestehenden Wirkungen, für die man noch keinen Anteil des zwischenliegenden Raumes, d. h. kein Vorhandensein sich von Ort zu Ort mitteilender Veränderungen in ihm nachweisen kann. Um so begreiflicher ist die Hoffnung, dass es schliesslich einmal gelingen werde, den fehlenden Nachweis zu führen. Nur darf man die Sache nicht so betrachten, wie wenn an der Scheinbarkeit jener Ausnahme nicht zu zweifeln sei. Alle bekannten und verstandenen Beobachtungen drängen vielmehr zum Gegenteil. Es muss daher, falls dies dennoch bloss auf mangelnder Erfahrung oder unvollständiger Analyse beruht, erst dargethan werden, dass es Thatsachen giebt, die unsere bisherige Auffassung nach entgegengesetzter Seite berichtigen und ergänzen. Dazu ist es vor allem nötig, jede Hypothese fern zu halten, die mehr annimmt, als dass in dem Raume zwischen zwei gravitierenden Massen etwas geschehe, das teil an der Gravitation hat. Wegen früherer ähnlicher, doch unzureichender Behandlungen der hier erörterten Frage sei auf das der 69. Naturforscherversammlung erstattete Referat über Fernwirkungen von Drude verwiesen.

Zwei gravitierende Massen geben sich als solche durch den Widerstand zu erkennen, den sie einer Vergrösserung ihres Abstandes entgegensetzen. Damit müssen also, während sie selbst in Ruhe oder in Bewegung sein können, die etwa vorhandenen Vorgänge in dem Raume zwischen ihnen zusammenhängen. Offenbar ist mit der Lage oder mit ihr und dem momentanen Bewegungszustande der Massen, soweit äussere Einflüsse ausgeschlossen sind, nicht nur der eine, örtliche Widerstand, sondern auch die Reihe aller bis ins Unendliche folgenden Widerstände bestimmt. Die zu ihrer Überwindung notwendige Arbeit ist also ebenso wie der einzelne Widerstand selbst eine die Gravitation

charakterisierende Grösse. Bloss sie kann hier, wo es darauf ankommt, ob mit der Gravitation sich im Raume unter Zeitverlust ausbreitende Veränderungen verbunden sind, als Grundgrösse angesehen werden. Denn es hat dem Begriffe nach keinen Sinn, von der räumlichen Fortpflanzung des Widerstandes oder der Anziehung zu reden, da Widerstand und Anziehung als solche nur an den Orten vorhanden sind, wo sich die Massen befinden. Aber wenn von einem Vorgange ausgesagt wird, er brauche Zeit, um von einem nach einem anderen Ort zu gelangen, so heisst dies, er hört an dem ersten Orte zu existieren auf, ohne in demselben Augenblick sogleich an dem zweiten Orte zu sein; daher würde die in dem Vorgange enthaltene Energie zeitweise verschwinden, wenn sie nicht durch die zwischen den beiden Orten gelegenen Punkte hindurchginge. Sie ist gleich der genannten Arbeit, sobald der Vorgang zur Gravitation zweier in den Orten befindlichen Massen gehört, da er dann ebenfalls von deren Lage und momentanem Bewegungszustande abhängt und diese nicht zwei verschiedene Energiegrössen bedingen können.

Nun werde, indem zur Unterscheidung die eine Masse die anziehende, die andere die angezogene heisse, unter dem Potential V der anziehenden Masse auf die angezogene m der auf die Einheit der zweiten Masse entfallende Teil der Arbeit verstanden, die zu leisten ist, damit sich die Massen bis ins Unendliche von einander entfernen, die mithin insgesamt Vm betrage. Für den Punkt, in dem sich die festgehalten gedachte Masse m befindet, und dessen Koordinaten, bezogen auf die ebenfalls festgehaltene anziehende Masse, x, y, z seien, kann man nach der in Machs Prinzipien der Wärmelehre beschriebenen Methode V berechnen, indem man es gleich dem Mittelwert aller in nächster Umgebung des Punktes herrschenden Potentiale setzt. V ist ja keine gerichtete Grösse und für eine gegebene Lage unveränderlich in der Zeit. Es sei in m gleich $f(x, y, z)$ und für einen Nachbarpunkt gleich

$$f(x+h, \ y+k, \ z+l).$$

Ferner bedeute

$$\varphi(\sqrt{h^2+k^2+l^2})$$

das Gewicht des Nachbarpunktes im Mittelwert, das bei Nahwirkungen mit wachsender Entfernung schnell abnimmt. Dann findet man

$$V = \frac{\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+h, y+k, z+l)\, \varphi(\sqrt{h^2+k^2+l^2})\, dh\, dk\, dl}{\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\sqrt{h^2+k^2+l^2})\, dh\, dk\, dl}.$$

Entwickelt man f nach der Taylorschen Reihe bis zur zweiten Potenz, und integriert man um den Punkt x, y, z herum, so wird

$$\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{df}{dx}h+\frac{df}{dy}k+\frac{df}{dz}l\right)\varphi\left(\sqrt{h^2+k^2+l^2}\right)dh\,dk\,dl=0,$$

$$\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{df}{dx}\frac{df}{dy}hk+\frac{df}{dx}\frac{df}{dz}hl+\frac{df}{dy}\frac{df}{dz}kl\right)\varphi\left(\sqrt{h^2+k^2+l^2}\right)dh\,dk\,dl=0,$$

$$\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\sqrt{h^2+k^2+l^2}\right)h^2\,dh\,dk\,dl=\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\sqrt{h^2+k^2+l^2}\right)k^2\,dh\,dk\,dl$$

$$=\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\sqrt{h^2+k^2+l^2}\right)l^2\,dh\,dk\,dl.$$

Es bleibt, wenn man

$$\frac{\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\sqrt{h^2+k^2+l^2}\right)h^2\,dh\,dk\,dl}{\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\sqrt{h^2+k^2+l^2}\right)dh\,dk\,dl}=n$$

setzt,

$$V=V+\frac{n}{2}\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right),$$

also

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0.$$

Aus dieser Gleichung folgt auf bekannte Weise, wenn μ eine Konstante bezeichnet und r der Abstand der Massen ist,

$$V=\frac{\mu}{r}.$$

Hieraus ergiebt sich das Newtonsche Gravitationsgesetz. Denn $V=\frac{\mu}{r}$ gilt auch noch in dem Augenblick, da man die Massen loslässt. Die Zunahme von Vm stimmt mit der erscheinenden lebendigen Kraft dT überein, und darum enthält T in jenem Augenblick ebenso wenig wie V die Änderung von r in der Zeit. Folglich hat man nach den allgemeinen Lagrangeschen Bewegungsgleichungen, indem man an Stelle der äusseren auf die Masse m wirkenden Kraft den negativen Wert der von ihr ausgeübten Kraft setzt, für die Beschleunigung von m

$$\frac{1}{m}\frac{dT}{dr}=\frac{dV}{dr}=-\frac{\mu}{r^2}.$$

Das Newtonsche Gesetz schreibt die Potentiale vor, die die Massen in jeder Lage erreichen, wenn ihnen die zu deren Zustandekommen erforderliche Zeit zur Verfügung steht. Diese Bedingung ist immer erfüllt, sobald die Massen in ihrer gegenseitigen Entfernung festgehalten werden. Sie hört auf bei eingetretener freier, einander entgegen gerichteter Bewegung, falls jene Zeit eine endlich bemessene Grösse hat. Zwei Umstände sind dabei von Einfluss. Erstens muss

zwar im Abstande $r - \Delta r$ der Massen, wo Δr bei wachsendem r positiv, bei abnehmendem negativ ist, das Potential sich in der im umgekehrten Verhältnis zu $r - \Delta r$ stehenden Grösse zu bilden anfangen, weil sonst nicht einzusehen wäre, wie sich dieses Verhältnis bei der Ruhe der Massen zu erfüllen vermöchte. Aber es gelangt nicht sogleich zur Wirkung an m, da der es bedingende Vorgang von der anziehenden Masse ausgeht und Zeit braucht, um bis zur angezogenen Masse fortzuschreiten. Selbstverständlich findet ein Fortschreiten der gedachten Art auch von der angezogenen zur anziehenden Masse statt, ähnlich wie zu jeder Wärmeausstrahlung zwischen zwei Körpern eine Gegenstrahlung gehört. Das bei dem Abstande $r - \Delta r$ von der anziehenden Masse ausgehende Potential bethätigt sich also in m erst zu einer um Δt späteren Zeit, nachdem der Abstand gleich r geworden ist. Zweitens würde das Potential wohl bei Fernwirkung unmittelbar in seinem vollen Betrage erscheinen; sind jedoch Raum und Zeit in der vorausgesetzten Art mit im Spiel, so hat es auch eine gewisse Dauer nötig, damit es, bei m angelangt, dieser Masse sich mitteile, d. h. den ihm entsprechenden Bewegungszustand von m hervorrufe. Denn nur die Annahme von Fernwirkungen lässt Unstetigkeit in den Erscheinungen zu; ihre Ersetzung durch die Annahme von Nahwirkungen hat vor allem den Zweck, die sich an den übrigen physikalischen und chemischen Veränderungen bewährende Stetigkeit auch in die Auffassung der Gravitation einzuführen. Wie sich daher beim Stosse die Stosskraft aus succ. Elementarstössen zusammensetzt, so geschieht die Übertragung des als Potential anlangenden Vorganges auf m durch schnell aufeinander folgende Differentialpotentiale. Wenn die Massen ruhen, geht die Bewegung des Potentials mit ihrer eigenen Geschwindigkeit an m vorüber; dann bemisst sich sein auf m übertragener Wert nach dem umgekehrten Verhältnis zum Abstande. Wenn die Massen aufeinander zueilen, verringert sich die Zeit der Übertragung, mithin der übertragene Potentialwert im Verhältnis der eigenen Geschwindigkeit des Potentials zu der aus ihr und der Geschwindigkeit der Massen bestehenden Summe, da das Potential in Bezug auf m diese Gesamtgeschwindigkeit hat.

Das Potential bewegt sich ausser mit seiner Geschwindigkeit c noch mit der Geschwindigkeit der anziehenden Masse, von der es ausgeht. Der Weg $r - \Delta r$, den die beiden sich entgegenkommenden Bewegungen, die des Potentials und die der angezogenen Masse, in der Zeit Δt zurücklegen, beträgt daher

$$\Delta t \left(c - \frac{\Delta r}{\Delta t}\right);$$

während $r = c \Delta t$ ist. Also erhält man für den Abstand, bei dem sich das Potential zu bilden anfängt, und dem es umgekehrt proportional ist,

$$r - \Delta r = r\left(1 - \frac{1}{c}\,\frac{\Delta r}{\Delta t}\right).$$

Weil ferner die Geschwindigkeit, mit der die Bewegungen an einander vorbeigehen, den Wert

$$c - \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

hat, fällt das Potential wegen des Zeitverbrauches zu seiner Mitteilung an m auch proportional

$$\frac{c}{c - \frac{\Delta r}{\Delta t}}$$

aus. Man findet so

$$V = \frac{\mu}{r\left(1 - \frac{1}{c}\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)^2}.$$

Solange der Weg Δr kurz und deshalb $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ gegen c klein ist, darf man dafür $\frac{dr}{dt}$ setzen. Dadurch wird

$$V = \frac{\mu}{r\left(1 - \frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right)^2},$$

woraus mit Hülfe des binomischen Satzes bis zur zweiten Potenz folgt

$$V = \frac{\mu}{r}\left[1 + \frac{2}{c}\frac{dr}{dt} + \frac{3}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

Hier ist in dem Ausdruck für V nicht bloss r, sondern auch die Ableitung von r nach der Zeit enthalten. Darum ergiebt sich vermöge der allgemeinen Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für die Beschleunigung von m, wenn $\frac{dr}{dt}$ mit r' bezeichnet wird,

$$\frac{1}{m}\frac{dT}{dr} - \frac{1}{m}\frac{d}{dt}\frac{dT}{dr'} = \frac{dV}{dr} - \frac{d}{dt}\frac{dV}{dr'} = -\frac{\mu}{r^2}\left[1 - \frac{3}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{6r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

Die Annahme, dass $\frac{dr}{dt}$ im Vergleich mit c klein ist, trifft im Gebiet der gewöhnlichen Gravitationserscheinungen zu; sonst könnte das Newtonsche Gesetz sich nicht an bewegten Massen in dem Maße bewahrheiten, wie es dies thut. Aber unter besonderen Bedingungen, z. B. durch eine den Massen von aussen erteilte Anfangsgeschwindigkeit, kann $\frac{dr}{dt}$ so gross werden, dass weder $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ ihm gleich gesetzt werden darf, noch die Entwickelung der binomischen Reihe bis zur zweiten Potenz genügt. Die abgeleitete Formel hat daher nur Gültigkeit, wenn die gravitierenden Massen ein freies, nach aussen hin unabhängiges System bilden. In diesem, übrigens vor der Hand wichtigsten Falle bestimmt sie die Veränderung, die das Newtonsche Gesetz dadurch erleidet, dass sich die Potentiale zwischen den Massen nicht momentan, sondern mit Zeitverlust ausbreiten.

2. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Je nachdem die Beobachtungen für die in die vorige Rechnung eingeführte Grösse c einen endlichen oder einen unendlich grossen Wert liefern, findet man mehr oder weniger sicher, dass die Potentiale gravitierender Massen Zeit brauchen, um die zwischen diesen liegenden Abstände zu durchschreiten, oder dass eine solche zeitliche Ausbreitung nicht existiert, mithin die Gravitation auf wahrer Fernwirkung beruht. Besonders bedarf es der Erfüllung zweier Forderungen. Erstens sind wegen des Übergewichtes von c über $\frac{dr}{dt}$ die c enthaltenden Glieder des Ausdruckes für die Beschleunigung der Masse m von dem ganzen Ausdrucke abzusondern und mit den Thatsachen vergleichbar zu machen; zweitens ist die Grössenart zu ermitteln, durch die das Vorhandensein eines endlichen Wertes von c zu erkennen sein muss, und daraufhin dann die Erfahrung zu prüfen. Da der Schauplatz der Thatsachen nur das Planetensystem sein kann, stelle man sich als die anziehende Masse die Sonne, als die angezogene einen Planeten vor. Zur Vereinfachung werde dessen Bewegung auf die Sonne als Anfangspunkt der Koordinaten bezogen, sodass die Konstante μ im Verhältnis der Summe der Massen zur anziehenden Masse vergrössert gedacht werden muss.

Man setze
$$\frac{3}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{6r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2} = F.$$

Also ist
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}(1-F),$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}(1-F),$$

woraus durch Multiplikation der einen Gleichung mit y und der anderen mit x und durch Subtraktion folgt
$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Dies ist die auch bei der Ableitung der Eigenschaften und der Bahn der Planetenbewegung aus dem Newtonschen Gesetze entstehende Gleichung, die durch Integration und Einführung von Polarkoordinaten, wenn ϑ der Winkel zwischen dem Radiusvektor und der positiven Abscissenaxe ist und L eine Konstante bedeutet, ergiebt
$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = L.$$

Setzt man den hierin enthaltenen Wert
$$dt = \frac{r^2 d\vartheta}{L},$$

ferner

$$\frac{x}{r} = \cos\vartheta \quad \text{und} \quad \frac{y}{r} = \sin\vartheta$$

in die Gleichungen für

$$\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dt^2}$$

ein, so lauten diese

$$d\frac{dx}{dt} = -\frac{\mu}{L}(1-F)\cos\vartheta\, d\vartheta,$$

$$d\frac{dy}{dt} = -\frac{\mu}{L}(1-F)\sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Mit den Konstanten M und N wird durch Integration

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\mu}{L}\sin\vartheta + \left(M + \int\frac{\mu}{L}F\cos\vartheta\, d\vartheta\right),$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\mu}{L}\cos\vartheta + \left(N + \int\frac{\mu}{L}F\sin\vartheta\, d\vartheta\right).$$

Da $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = L$ ist, findet man aus den beiden letzten Gleichungen

$$r = \frac{L}{\frac{\mu}{L} - \left(M + \int\frac{\mu}{L}F\cos\vartheta\, d\vartheta\right)\sin\vartheta + \left(N + \int\frac{\mu}{L}F\sin\vartheta\, d\vartheta\right)\cos\vartheta}.$$

Die Integrale im Nenner nehmen nach und nach andere und andere Werte an, falls F nicht verschwindet. Setzt man voraus, man wisse ihren Wert zu einer bestimmten Zeit, so kann man sagen, dass der Planet sich zu dieser Zeit auf einer durch jene Gleichung beschriebenen Ellipse befinde. Ist deren halbe grosse Axe a, ihre halbe kleine Axe b, die numerische Exzentricität ε und der Winkel von a mit der positiven Abscissenaxe ω, und löst man die Gleichungen für

$$r = a(1-\varepsilon), \quad r = a(1+\varepsilon)$$

und $r = \frac{b^2}{a}$ nach

$$L,\ M + \int\frac{\mu}{L}F\cos\vartheta\, d\vartheta \quad \text{und} \quad N + \int\frac{\mu}{L}F\sin\vartheta\, d\vartheta$$

auf, so erhält man

$$L = b\sqrt{\frac{\mu}{a}},$$

$$M + \int\frac{\mu}{L}F\cos\vartheta\, d\vartheta = -\frac{\varepsilon}{b}\sqrt{a}\,\mu\sin\omega,$$

$$N + \int\frac{\mu}{L}F\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{\varepsilon}{b}\sqrt{a}\,\mu\cos\omega.$$

Man sieht, indem man die Unveränderlichkeit von $\frac{b}{\sqrt{a}}$ beachtet, dass sich die Bewegung des Planeten so deuten lässt, wie wenn er

auf einer Ellipse einhergehe, deren ε und ω sich stetig verändern. Nur für den Fall, dass $F = 0$ ist, hört diese Veränderung auf. Sie ist es also, wodurch das Vorhandensein eines endlichen Wertes von c in Wirkung kommt. Man erhält für F, sobald man die beiden letzten Gleichungen nach ϑ differenziert, den Wert von L einsetzt und die eine durch

$$\cos\vartheta \cdot \frac{\sqrt{a\mu}}{b},$$

die andere durch

$$\sin\vartheta \cdot \frac{\sqrt{a\mu}}{b}$$

dividiert,

$$F = -\frac{\sin\omega}{\cos\vartheta}\frac{d\varepsilon}{dt}\frac{dt}{d\vartheta} - \frac{\varepsilon\cos\omega}{\cos\vartheta}\frac{d\omega}{dt}\frac{dt}{d\vartheta},$$

$$F = \frac{\cos\omega}{\sin\vartheta}\frac{d\varepsilon}{dt}\frac{dt}{d\vartheta} - \frac{\varepsilon\sin\omega}{\sin\vartheta}\frac{d\omega}{dt}\frac{dt}{d\vartheta}.$$

Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke ergiebt sich mit $\alpha = \vartheta - \omega$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\varepsilon \operatorname{tang}\alpha \frac{d\omega}{dt},$$

woraus rückwärts folgt

$$F = -\frac{\varepsilon}{\cos\alpha}\frac{dt}{d\vartheta}\frac{d\omega}{dt}.$$

Um mittelst dieses Wertes eine nur Beobachtungsgrössen enthaltende Gleichung für $\frac{d\omega}{dt}$ zu gewinnen, stelle man F durch die Ableitungen von r nach t dar. Man hat, wieder mit Berücksichtigung der Unveränderlichkeit von $\frac{b}{\sqrt{a}}$, ausserdem mit Benutzung der Formeln

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\varepsilon \operatorname{tang}\alpha \frac{d\omega}{dt},$$

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = L \quad \text{und} \quad L = b\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a}}:$$

$$r = \frac{\frac{b^2}{a}}{1+\varepsilon\cos\alpha},$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{ar^2}{b^2}\left(\cos\alpha\frac{d\varepsilon}{dt} - \varepsilon\sin\alpha\frac{d\vartheta}{dt} + \varepsilon\sin\alpha\frac{d\omega}{dt}\right)$$

$$= -\frac{ar^2}{b^2}\left(-\varepsilon\cos\alpha\operatorname{tang}\alpha\frac{d\omega}{dt} - \varepsilon\sin\alpha\frac{d\vartheta}{dt} + \varepsilon\sin\alpha\frac{d\omega}{dt}\right)$$

$$= \frac{a\varepsilon r^2}{b^2}\sin\alpha\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$= \frac{\varepsilon\sqrt{a\mu}}{b}\sin\alpha,$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\sqrt{a\mu}}{b}\sin\alpha\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\varepsilon\sqrt{a\mu}}{b}\cos\alpha\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{\varepsilon\sqrt{a\mu}}{b}\cos\alpha\frac{d\omega}{dt}$$

$$= -\frac{\varepsilon\sqrt{a\mu}}{b}\sin\alpha\operatorname{tang}\alpha\frac{d\omega}{dt} + \frac{\varepsilon\sqrt{a\mu}}{b}\cos\alpha\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{\varepsilon\sqrt{a\mu}}{b}\cos\alpha\frac{d\omega}{dt}$$

$$= -\frac{\varepsilon\sqrt{a\mu}}{b}\sin\alpha\operatorname{tang}\alpha\frac{d\omega}{dt} + \frac{\varepsilon\mu}{r^2}\cos\alpha - \frac{\varepsilon\sqrt{a\mu}}{b}\cos\alpha\frac{d\omega}{dt}$$

$$= -\frac{\varepsilon\sqrt{a\mu}}{b\cos\alpha}\frac{d\omega}{dt} + \frac{\varepsilon\mu}{r^2}\cos\alpha.$$

Also ist

$$F = \frac{3\varepsilon^2 a\mu}{b^2c^2}\sin^2\alpha + \frac{6\varepsilon r\sqrt{a\mu}}{bc^2\cos\alpha}\frac{d\omega}{dt} - \frac{6\varepsilon\mu}{r}\cos\alpha.$$

Daher lautet die gesuchte Gleichung für $\frac{d\omega}{dt}$

$$\frac{\varepsilon r^2\sqrt{a}}{b\sqrt{\mu}\cos\alpha}\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3\varepsilon^2 a\mu}{b^2c^2}\sin^2\alpha - \frac{6\varepsilon r\sqrt{a\mu}}{bc^2\cos\alpha}\frac{d\omega}{dt} + \frac{6\varepsilon\mu}{r}\cos\alpha$$

oder nach Einsetzung von $r = \frac{b^2}{a(1+\varepsilon\cos\alpha)}$ und $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ und nach Division durch $\frac{\varepsilon r^2\sqrt{a}}{b\sqrt{\mu}\cos\alpha}$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{6\mu}{a(1-\varepsilon^2)c^2}(1+\varepsilon\cos\alpha)\frac{d\omega}{dt} - \frac{3\varepsilon\mu^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}c^2}(1+\varepsilon\cos\alpha)^2\sin^2\alpha\cos\alpha$$

$$+ \frac{6\mu^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}c^2}(1+\varepsilon\cos\alpha)^3\cos^2\alpha.$$

Wenn man den so berechneten Wert der Geschwindigkeit $\frac{d\omega}{dt}$ mit den Beobachtungen vergleichen will, hat man zu berücksichtigen, dass die Rechnung nur einen einzigen Planeten voraussetzt. Daher können allein Perihelbewegungen in Betracht kommen, die nicht aus Störungen entstehen. Solche sind bloss beim Merkur bekannt, in einem Betrage von etwa 41″ in einem Jahrhundert. Diese Kleinheit schliesst von vornherein jede erfahrungsmässige Feststellung der stetigen Veränderlichkeit von $\frac{d\omega}{dt}$ aus. Also ist über eine längere Zeit hin zu integrieren. In der letzten Gleichung kommt nur ε, nicht auch $\frac{d\varepsilon}{dt}$ vor; und sofern die Änderungen von ε gegen ε selbst verschwinden, kann man dieses als konstant ansehen. Es genügt danach als Grenzen der Integration $\alpha = 0$ und $\alpha = 2\pi$ zu wählen, da $\frac{d\omega}{dt}$ bei jedem folgenden Umlauf die Werte des vorigen Umlaufes sehr annäherungsweise wiederholt.

Man multipliziere die Gleichung für $\frac{d\omega}{dt}$ mit dt und setze im zweiten und im dritten Gliede der rechten Seite

$$dt = \frac{r^2}{L} d\vartheta = \frac{a^{\frac{3}{2}}(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}{\mu^{\frac{1}{2}}(1+\varepsilon\cos\alpha)^2}(d\alpha + d\omega).$$

Durch passende Ordnung und Division ergiebt sich

$$d\omega = \frac{\frac{6\mu}{a(1-\varepsilon^2)c^2}(1+\varepsilon\cos\alpha)\cos^2\alpha - \frac{3\varepsilon\mu}{a(1-\varepsilon^2)c^2}\sin^2\alpha\cos\alpha}{1+\frac{6\mu}{a(1-\varepsilon^2)c^2}(1+\varepsilon\cos\alpha) - \frac{6\mu}{a(1-\varepsilon^2)c^2}(1+\varepsilon\cos\alpha)\cos^2\alpha + \frac{3\varepsilon\mu}{a(1-\varepsilon^2)c^2}\sin^2\alpha\cos\alpha}\,d\alpha.$$

Dividiert man Zähler und Nenner durch

$$\frac{3\mu}{a(1-\varepsilon^2)c^2} = \frac{\gamma}{c^2},$$

ordnet man nach steigenden Potenzen von $\cos\alpha$, und setzt man zur Abkürzung

$$-\varepsilon\cos\alpha + 2\cos^2\alpha + 3\varepsilon\cos^3\alpha = v,$$
$$3\varepsilon\cos\alpha - 2\cos^2\alpha - 3\varepsilon\cos^3\alpha = w,$$

so wird

$$d\omega = \frac{v}{\frac{c^2}{\gamma} + 2 + w}\,d\alpha.$$

Angenähert erhält man

$$d\omega = \left[\frac{v}{\frac{c^2}{\gamma}+2} - \frac{vw}{\left(\frac{c^2}{\gamma}+2\right)^2}\right]d\alpha.$$

Für die Perihelbewegung ψ während eines Umlaufes ergiebt sich daher

$$\psi = \int_0^{2\pi}\left[\frac{v}{\frac{c^2}{\gamma}+2} - \frac{vw}{\left(\frac{c^2}{\gamma}+2\right)^2}\right]d\alpha$$

oder, weil

$$vw = -3\varepsilon^2\cos^2\alpha + 8\varepsilon\cos^3\alpha + 4(3\varepsilon^2-1)\cos^4\alpha - 12\varepsilon\cos^5\alpha - 9\varepsilon^2\cos^6\alpha,$$

$$\psi = \frac{2\pi}{\frac{c^2}{\gamma}+2} + \frac{3\pi(8-\varepsilon^2)}{8\left(\frac{c^2}{\gamma}+2\right)^2}.$$

Daraus folgt

$$\frac{c^2}{\gamma} + 2 = \frac{\pi}{\psi} + \sqrt{\frac{\pi^2}{\psi^2} + \frac{3\pi(8-\varepsilon^2)}{8\psi}}.$$

Beachtet man, dass ψ sehr klein ist, so sieht man, dass das zweite Glied unter der Wurzel gegen das erste verschwindet. Der für $d\omega$ gewählte Näherungsausdruck ist danach noch zu genau, d. h. w hätte von vornherein vernachlässigt werden dürfen. Mithin wird

$$\frac{c^2}{\gamma} + 2 = \frac{2\pi}{\psi},$$

$$c^2 = \frac{2\pi\gamma}{\psi} - 2\gamma,$$

wo aus demselben Grunde 2γ gegen $\frac{2\pi\gamma}{\psi}$ unberücksichtigt bleiben kann. Man erhält daher schliesslich

$$c^2 = \frac{6\pi\mu}{a(1-\varepsilon^2)\psi}.$$

Hierin ist

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2},$$

wenn τ die Umlaufszeit des Planeten bedeutet. Speziell für Merkur gelten folgende Werte:

$$a = 0{,}3871 \cdot 149 \cdot 10^6 \text{ km},$$

$$\varepsilon = 0{,}2056,$$

$$\tau = 88 \text{ Tage},$$

$$\psi = 4{,}789 \cdot 10^{-7}.$$

Man findet damit

$$c = 305500 \text{ km/sec}.$$

Die kleinste bisher gefundene Geschwindigkeit des Lichtes hat Foucault erhalten, gleich 298000 km/sec; die grösste ergiebt sich nach der Methode von Römer aus den neuesten Beobachtungen zu 308000 km/sec; die Geschwindigkeit der elektrischen Wellen fand Hertz in seinen Versuchen 320000 km/sec. Also stimmt die Geschwindigkeit, mit der sich das Gravitationspotential ausbreitet, mit der Geschwindigkeit des Lichtes und der elektrischen Wellen überein. Darin liegt zugleich die Bürgschaft, dass diese Geschwindigkeit existiert.

Freilich wird niemand in Abrede stellen, dass die Perihelbewegung des Merkur von 41″ in einem Jahrhundert auch durch andere, noch unbekannte Umstände bedingt sein könnte, so dass es eine endliche Geschwindigkeit des Gravitationspotentials nicht zu geben brauchte. Man hat aber zu bedenken, dass die hier hauptsächlich entscheidende, übrigens auch die Abweichung von allen früheren Ergebnissen ähnlicher Untersuchungen bedingende Formel für die Abhängigkeit des Potentials von einer solchen Geschwindigkeit auf völlig naturmässigem, nicht erst durch schwierige Hypothesen führendem Wege gewonnen ist. Es wäre daher ein sonderbarer Zufall, wenn die 41 Sekunden des Merkur gerade die Licht- und Elektrizitätsgeschwindigkeit lieferten, ohne mit einer räumlich-zeitlichen Ausbreitung der Gravitation etwas zu thun zu haben, da doch das Medium, worin diese Ausbreitung

und die Bewegung des Lichtes und der elektrischen Wellen erfolgen, derselbe zwischen den Weltkörpern sich erstreckende Raum ist. Nicht einmal die verhältnismässig grosse Perihelbewegung, die man mit dem gefundenen Werte von c für die Venus erhält, nämlich 8″ in einem Jahrhundert, kann als stichhaltiger Einwand gelten; oder eine Revision der Störungen dieses Planeten müsste die Möglichkeit jener Zahl endgültig ausschliessen. Es sei daran erinnert, dass die Berechnungen der säkulären Beschleunigung des Mondes zwischen 6″ und 12″ zu schwanken vermochten. Im übrigen ergeben sich lauter unmerklich kleine Perihelbewegungen. Sie betragen nach den aus den gebräuchlichen Tabellen leicht zu entnehmenden Beobachtungswerten bei der Erde in einem Jahrhundert 3″,6, beim Monde 0″,06, beim Mars 1″,3, beim Jupiter 0″,06, beim Saturn 0″,01, beim Uranus 0″,002 und beim Neptun 0″,0007.

Zur Ausgleichung eines durch Längenmessungen bestimmten Punktes.*

Von

E. Hammer

in Stuttgart.

Eine nur unter besondern Verhältnissen praktisch anwendbare Methode der Einschaltung eines Neupunktes in ein Netz gegebener trigonometrischer Punkte ist die der direkten Messung der Strecken zwischen dem Neupunkte und einigen gegebenen Punkten. Gleichwohl wird diese Methode der Punktbestimmung (die eigentlich nicht mehr trigonometrisch heissen sollte, weil sie keine Winkelmessung erfordert und weil auch die Rechnung selbstverständlich nicht notwendig trigonometrisch geführt werden muss) in den Lehrbüchern der Geodäsie und in einzelnen Katasteranweisungen neben den üblichen Methoden der Bestimmung durch Winkelmessung angeführt, und sie bietet in der That jedenfalls theoretisches und methodisches Interesse.

Die Bezeichnung: „Bestimmung durch Bogenschnitt", die neuerdings für diese Aufgabe aufgekommen ist, halte ich deshalb für nicht glücklich, weil auch das Rückwärtseinschneiden eine Bestimmung durch Bogenschnitt ist.

1. Einleitung.

Jede Messung zur Bestimmung eines Neupunktes, sei es beim „Einschneiden" Winkelmessung auf einem der gegebenen Punkte oder Winkelmessung auf dem zu bestimmenden Punkt, sei es bei der uns hier beschäftigenden Aufgabe die Messung der Strecke zwischen

* Die folgende methodische Notiz war, als Fortsetzung eines Aufsatzes über graphische Ausgleichung von vorwärts oder rückwärts eingeschnittenen Punkten, für die Zeitschrift für Vermessungswesen (vergleiche daselbst Jahrg. 1896, S. 611; 1897, S. 249) bestimmt. Da sie aber dort immer wieder zurückgestellt werden musste, möchte ich sie in der „Zeitschrift für Mathematik und Physik" veröffentlichen, deren neues Programm ja auch solche einfache praktische Dinge mit umfasst.

einem gegebenen und dem zu bestimmenden Punkt, hat den Zweck, einen planimetrischen „Ort" für den zu bestimmenden Punkt festzulegen: beim Vorwärtseinschneiden sind diese Örter gerade Linien, die von gegebenen Punkten ausgehen; beim Rückwärtseinschneiden (denken wir uns Winkel gemessen) Kreisbögen, die über gegebenen Strecken als Sehnen und mit den gemessenen Winkeln als Peripheriewinkeln beschrieben werden; bei der Bestimmung durch Längenmessung endlich sind es Kreisbögen, die gegebene Punkte zu Mittelpunkten und die gemessenen Strecken zu Halbmessern haben.

Wenn die Entfernungen des Punktes von zwei gegebenen Punkten gemessen sind, so ist er einfach planimetrisch bestimmt, wie man ihn z. B. als Näherungspunkt für das folgende zu berechnen hat; sind dagegen die Entfernungen nach mehr als zwei gegebenen Punkten gemessen, so handelt es sich um eine Ausgleichungsaufgabe, die rechnerisch oder graphisch gelöst werden kann. Die rechnerische Ausgleichung ist als hübsches einfaches Beispiel für vermittelnde Beobachtungen schon mehrfach behandelt worden, vergl. z. B. Jordan, Handbuch der Vermess. II, 3. Aufl., S. 198—199 („Bogenschnitt mit Ausgleichung", wobei es sich um Ausgleichung von Abstichen aus einem Plan in kleinem Maßstab handelt); Koll, Meth. der kl. Qu. 1893, S. 123 flg. („Bogenschnitt gemessener Längen"); Anweisung IX für die preussischen trig. und polyg. Arbeiten, 2. Aufl., 1894, Trig. Form. 23. („Bogenschnitt von Messungslinien", S. 335 flg.); F. G. Gauss, die trig. und polyg. Rechnungen, 2. Aufl., 1893, S. 138, 140, 143 flg. (von Koll), zusammenhängend S. 514 flg. („Bogenschnitt aus Kleinlinien"). Eine graphische Ausgleichung dagegen, die nicht auf fehlerzeigende Dreiecke sich stützen würde, ist meines Wissens bisher nicht angegeben,* und ich möchte daher diese, als hier besonders anschaulich, zur Ergänzung meines in der ersten Anmerkung zitierten Aufsatzes über graphische Ausgleichung, mitteilen. Zum Vergleich sei die rechnerische Ausgleichung nebst einigen Bemerkungen über konstante Fehler vorangesetzt, und zwar sofort mit Übergang zu einem Zahlenbeispiel (der Einfachheit halber, da es ja nur auf die Methoden ankommt, mit nur einer überschüssigen Messung).

---

* Auch z. B. von Weixler nicht, der kürzlich in den „Mitteilungen des k. k. militär-geogr. Instituts", Band XVI, Wien 1897, eine sehr ausführliche Abhandlung über graphische Ausgleichung gegeben hat, worin die uns hier beschäftigende Aufgabe einmal gestreift wird. Zur Darstellung der Fehlerquadratsummen, die einzelnen Annahmen für den vorwärts oder rückwärts eingeschnittenen Punkt erzeugen, vergl. zu Weixlers Text und Figur (Nr. 2a) auch meinen Aufsatz zur graphischen Ausgleichung in der Zeitschrift für Vermessungswesen 1896, besonders S. 623—624 mit Fig. 4. Jene Fig. 2a gewinnt ausserordentlich an Anschaulichkeit, wenn man in ihr nur einige wenige Linien gleicher $[\delta^2]$, z. B. in jenem Fall:

$$[\delta^2] = 20,\ 50,\ 100 \text{ und } 200$$

einträgt.

2. Die Aufgabe.

Es sind, auf ebenem Gelände, das auch in sonstiger Beziehung für direkte Längenmessung günstig ist (z. B. Strassen u. dergl.), die drei Punkte B, W, Z durch ihre Koordinaten gegeben:

	x	y
B	+ 23740,40	+ 4728,44
W	+ 24349,08	+ 5041,11
Z	+ 23955,13	+ 5613,97

Um den Neupunkt N zu bestimmen, sind seine Entfernungen von B, W, Z direkt gemessen und es ist als unmittelbares Ergebnis gefunden worden:

$$BN = L_1 = 522{,}60;$$
$$WN = L_2 = 367{,}59;$$
$$ZN = L_3 = 439{,}99;$$

was sind die Koordinaten von $\underline{N}$ (des ausgeglichenen Punktes)?

3. Rechnerische Ausgleichung.

Es seien $(\underline{x}, \underline{y})$ die Koordinaten des gesuchten Punktes $\underline{N}$, (x_0, y_0) die Koordinaten eines Näherungspunktes N_0 (zu berechnen mit Benutzung von zwei der gemessenen Entfernungen), so dass also mit

$$1)\quad \begin{cases} \underline{x} = x_0 + x \\ \underline{y} = y_0 + y \end{cases}$$

noch die Verbesserungen x, y der Koordinaten von N_0 auf $\underline{N}$ zu bestimmen sind.

Aus den Verbesserungsgleichungen ($\underline{L}$ sind die ausgeglichenen Längen):

$$2)\quad \begin{cases} \underline{L}_1 = L_1 + v_1 = \sqrt{(\underline{x} - x_b)^2 + (\underline{y} - y_b)^2} \\ \underline{L}_2 = L_2 + v_2 = \sqrt{(\underline{x} - x_w)^2 + (\underline{y} - y_w)^2} \\ \underline{L}_3 = L_3 + v_3 = \sqrt{(\underline{x} - x_z)_2 + (\underline{y} - y_z)^2} \end{cases}$$

sieht man sofort, dass, mit Benutzung des Näherungspunktes $(x_0 y_0)$ zur Durchführung der Rechnung, die Koeffizienten und Absolutglieder der linear gemachten Verbesserungsgleichungen zu berechnen sind aus:

$$3)\quad \begin{cases} a_k = \dfrac{x_0 - x_k}{L_{0,k}} = \cos(KN_0), \\ b_k = \dfrac{y_0 - y_k}{L_{0,k}} = \sin(KN_0), \\ l_k = L_{0,k} - L_k\,; \end{cases}$$

dabei ist je $K = B, W, Z$ zu setzen und $L_{0,k}$ bedeutet den Abstand zwischen dem Näherungspunkt $(x_0\, y_0)$ und dem fest gegebenen Punkt $K (= B, W, Z)$.

Die zweite Form für a_k und b_k ist noch angeschrieben, weil man ohnehin die $L_{0,k}$ mit Benutzung der Richtungswinkel (KN_0) rechnen wird (von ganz kleinen Abmessungen abgesehen, bei denen die Quadrattafel ausreichen würde). Nimmt man hier nach vorläufiger Näherungsrechnung an:

$$4)\qquad x_0 = +\,24007{,}70 \mid y_0 = +\,5177{,}30,$$

so erhält man nach 3), wenn die Absolutglieder nur auf 1 cm gerechnet werden, nämlich:

$$\begin{aligned} l_1 &= L_{0,1} - L_1 = 522{,}42 - 522{,}60 = -\,0{,}18,\\ l_2 &= L_{0,2} - L_2 = 367{,}54 - 367{,}59 = -\,0{,}05,\\ l_3 &= L_{0,3} - L_3 = 439{,}82 - 439{,}99 = -\,0{,}17, \end{aligned}$$

und wenn die Koeffizienten a, b auf zwei Stellen abgerundet werden, die Verbesserungsgleichungen:

$$5)\qquad \begin{cases} v_1 = +\,0{,}51\,x + 0{,}86\,y - 0{,}18,\\ v_2 = -\,0{,}93\,x + 0{,}37\,y - 0{,}05,\\ v_3 = +\,0{,}12\,x - 0{,}99\,y - 0{,}17; \end{cases}$$

dabei sind x, y und l in Metern genommen, was hier offenbar nicht zu unbequemen Zahlen führt.

Was nun die Gewichte angeht, so denken wir uns die L zunächst einmal nur mit unregelmässigen Fehlern behaftet (proportional $\sqrt{L}$ anzusetzen), also die Gewichte umgekehrt proportional L; nimmt man L in Kilometern, so wird:

$$6)\qquad \begin{cases} p_1 = \dfrac{1}{0{,}52} = 1{,}9,\\[1ex] p_2 = \dfrac{1}{0{,}37} = 2{,}7,\\[1ex] p_3 = \dfrac{1}{0{,}44} = 2{,}3 \end{cases}$$

mit absichtlich starker Abrundung und nach der Angabe so, dass $p = 1$ der Strecke 1000 m entspricht.

Mit diesen Zahlen erhält man durch Rechenschieber-Rechnung die Normalgleichungen:

$$7)\qquad \begin{cases} 2{,}88\,x - 0{,}37\,y - 0{,}10 = 0.\\ -\,0{,}37\,x + 4{,}01\,y + 0{,}03 = 0. \end{cases} \quad \Big|\ [pll] = 0{,}134\,;$$

die Auflösung giebt:

$$8)\qquad \begin{cases} y = -\,0{,}01\text{ m}\quad (P_y = 3{,}96),\\ x = +\,0{,}03\text{ m}\quad (P_x = 2{,}85),\\ [pvv] = 0{,}131,\\ \text{somit m. F. der Gewichtseinheit}\\ m = \sqrt{\dfrac{0{,}131}{3-2}} = \pm\,0{,}36\text{ m}. \end{cases}$$

Im ganzen wird also:

$$9)\qquad \underline{N}\begin{cases}\underline{x} = x_0 + x = +\,24007{,}73 \pm 0{,}21,\\ \underline{y} = y_0 + y = +\,5177{,}29 \pm 0{,}18.\end{cases}$$

4. Regelmässige Fehler.

Hier fallen vor allem die unerwartet grossen m. F. auf; $\pm\,0{,}36$ m unregelmässiger m. F. für 1000 m würde meinen Fehler von m_1 (unregelm. m. F. pro Meter) $= \pm\,1{,}16$ cm entsprechen, während unter günstigen Verhältnissen gute Lattenmessung leicht mit m_1 (unregelm. m. F. pro Meter) $= \pm\,1$ mm und noch weniger zu machen ist. Rechnen wir hier die Verbesserungen v der einzelnen Messungen aus, so geben die Verbesserungsgleichungen 5):

$$10)\qquad \begin{cases}v_1 = -\,16_5 \text{ cm},\\ v_2 = -\,8 \text{ cm},\\ v_3 = -\,16 \text{ cm},\end{cases}$$

[somit $[pvv] = 0{,}132$, genügend stimmend mit 8)], also alle v negativ und viel grösser als (bei der selbstverständlichen Festhaltung der Annahme, dass die relative Lage der gegebenen Punkte vollständig genau sei) der Fehler der Längenmessung erwarten lässt.

Ist es hier nicht gerechtfertigt an den L eine konstante Verbesserung anzubringen, z. B. die Annahme zu machen, dass ein Lattenmeter nicht mit dem Koordinatenmeter übereinstimme? Ein Lattenmeter wäre hier (relativ) zu kurz, denn die mit den Latten erhaltenen Zahlen sind zu gross. Das Verhältnis der einzelnen v zu den zugehörigen L ist der Reihe nach rund

$$\frac{1}{3200},\ \frac{1}{4600},\ \frac{1}{2800};$$

das Mittel wäre ungefähr $\frac{1}{3500}$ und mit um soviel verkürzten L könnte man die Ausgleichung wiederholen. Auch abgesehen von einer Verschiedenheit der Länge des Lattenmeters und Koordinatenmeters ist bekanntlich, bei Latten von genau richtiger Länge, bei Messung auf ebenem Boden (und noch mehr bei Absenkeln) eine kleine negative konstante Korrektion der Messungszahlen erforderlich, allerdings nicht so gross, wie oben berechnet, sondern nur

$$\frac{1}{5000} \text{ bis } \frac{1}{6000}$$

der Länge. Nimmt man oben als Reduktionszahl der Messungszahlen $-\,\frac{1}{4000}$ an, d. h. ändert die L von 522,60, 367,59 und 439,99 auf 522,47, 367,50 und 439,88 und wiederholt mit diesen Zahlen die Ausgleichung, so findet man einen Punkt $\underline{N}$, dessen Abscisse zwar nur um einige cm (etwa 3) grösser wird als oben, und dessen Ordinate etwa 1 cm kleiner ausfällt; aber die m. F. sinken selbstverständlich

sehr bedeutend. Ob man ein solches Verfahren thatsächlich schon bei drei Messungen rechtfertigen könnte, ist fraglich; wenn aber viele Strecken vorliegen und alle v dasselbe Vorzeichen bekommen, insbesondere die $\frac{v}{L}$ ungefähr auf einen gemeinsamen Wert hinweisen, so ist der Neupunkt in der That schärfer bestimmt, als aus den unmittelbaren L hervorgehen würde. In dem Beispiel von Koll (Meth. d. kl. Qu., S. 127) mit den Ergebnissen

$$v_1 = + 0{,}07,$$
$$v_2 = - 0{,}24,$$
$$v_3 = + 0{,}08,$$
$$v_4 = - 0{,}18,$$
$$v_5 = - 0{,}18$$

(die L sind der Reihe nach 332, 272, 247, 270, 417 m) wäre ein Abzug von etwa $\frac{1}{6000}$ an den L gerechtfertigt. Ganz ohne Willkür würde es bei einem solchen konstanten Koeffizienten nicht abgehen; aber man käme auf diesem Wege jedenfalls zu ebenso zutreffenden oder selbst bessern Resultaten, als wenn man nur dadurch Rücksicht auf die konstanten Fehler nimmt, dass man statt der obigen einfachen Gewichtsannahme

$$p = \frac{C}{L},$$

die also nur auf den unregelmässigen, proportional $\sqrt{L}$ sich vergrössernden Messungsfehler Rücksicht nimmt, Gewichte für die Längenmessungen ansetzt, die nach

$$m_L = \pm\, c_1 \sqrt{L} + c_2 L,$$

oder besser

11) $$m_L = \sqrt{k_1 L + k_2 L^2}$$

zugleich Rücksicht auf die konstanten Fehler der Längenmessung nehmen sollen. Es ist mit den gewöhnlichen Mitteln (ohne Komparator) z. B. Normalmeter und dem oft verwendeten Stangenzirkel, oft nicht leicht die Länge einer Latte auch nur auf $\frac{1}{2}$ mm festzustellen und die indirekte Vergleichung zweier Lattenpaare durch Messung derselben günstigen Strecke mit scharfen Endpunkten unter Anwendung der beiden Lattenpaare, wobei das eine z. B. bei zwei Messungen 119,45 und 119,46 m, das zweite aber 119,50 und 119,49 lieferte, giebt über den (relativen) regelmässigen Fehler leicht schärfer Aufschluss als direkte Vergleichung mit den oft nur vorhandenen bescheidenen Mitteln; in dem eben angeführten Beispiel wären die Längen an dem zweiten Lattenpaare um 25 mm auf 120 m kürzer (die Zahlen sind grösser) als an dem ersten und es wäre von den durch die zweiten gelieferten

Messungszahlen $\frac{1}{4800}$ abzuziehen, um sie mit Zahlen, die das erste gegeben hat, vergleichbar zu machen. Freilich ist dies nur eine relative Korrektion, über den absoluten Betrag des regelmässigen Lattenfehlers, und also nach weniger über den regelmässigen Gesamtfehler der Messung ist damit durchaus nichts entschieden. Aber man wird in der vorliegenden Ausgleichungsaufgabe mit Verwendung eines solchen konstanten, empirisch bestimmten Koeffizienten der regelmässigen Verbesserung, wo eine solche durch die v entschieden angedeutet ist, wie schon bemerkt, leicht Ergebnisse bekommen, die richtiger sind, als wenn man die L unverändert lässt und nur Gewichte ansetzt, die nach 11) zugleich auf den regelmässigen Fehler Rücksicht nehmen sollen. Nach der Preussischen Katastervorschrift würden z. B. in der obenstehenden Aufgabe (Gelände I) die Strecken Gewichtszahlen gleich 2,86, 4,71, 3,69 statt der oben angenommenen 1,9, 2,7, 2,3 erhalten; die Zahlen der ersten Gewichtsannahme verhalten sich wie 1 : 1,6 : 1,3, die der zweiten (der oben gemachten) wie 1 : 1,4 : 1,2; an den Koordinaten für $\underline{N}$ würde so auch mit den ersten Gewichten kaum etwas gegen oben geändert und jedenfalls würde an den m. F. nicht viel geändert. Insbesondere würden die m. F. von $\underline{x}$ und $\underline{y}$ entschieden zu gross ausfallen, wenn die Punkte B, W, Z als sehr gut bestimmt bekannt sind und die Messung der Strecken L z. B. sicher nicht mit einem grössern (unregelmässigen) Fehler als $\pm 2\sqrt{L}$ mm behaftet ist.

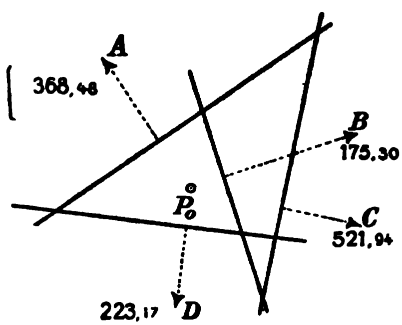
5. Graphische Ausgleichung.

Hier scheint mir nun die graphische Ausgleichung den Vorteil zu bieten, dass sie auf den ersten Blick alle wünschenswerte Auskunft auch über einen etwaigen merklichen konstanten Fehler bietet (selbstverständlich kann man auch bei rechnerischer Ausgleichung den konstanten Fehler leicht absondern; immerhin ist diese Anschaulichkeit des graphischen Verfahrens sehr willkommen).

Durch eines der gemessenen L, z. B. $L_k = KN$, ist als planimetrischer Ort des Neupunktes N ein Kreis um den gegebenen Punkt K als Mittelpunkt und mit L_k als Halbmesser festgelegt. Es sei nun wieder nahe bei N zunächst ein Punkt N_0 fest angenommen, um dessen Verbesserung es sich handelt. In der Nähe von N_0 wird man für eine kurze Strecke den Kreis um K ersetzen können durch die Richtung seiner Tangente; diese steht senkrecht auf dem Halbmesser, d. h. die Richtung der Tangente erhält man durch einen Richtungswinkel der sich von (KN_0) um 90^0 unterscheidet. Diese Richtungswinkel, (KN_0) braucht man ohnehin zur Rechnung der Entfernungen KN_0; da KN gemessen ist, hat man in $(KN_0 - KN)$ auch unmittelbar den Abstand jener Tangente von N_0 gegen K hin (wirklich gegen K hin oder, von K aus, über N_0 hinaus, je nachdem die angegebene Differenz positiv oder negativ ist). Wenn die auf solche Art er-

haltene Ausgleichungsfigur, wenn z. B. die Entfernungen AP, BP, CP, DP von den gegebenen Punkten A, B, C, D aus gemessen sind, die Form von Figur 1 hätte, so wäre an der Berechtigung einer konstanten Verbesserung der Längenmessungen (hier dann mit dem Vorzeichen +) doch kaum zu zweifeln, mag nun diese konstante Abweichung wirklich in einer Differenz zwischen Lattenmeter und Koordinatenmeter oder in irgend einer anderen Quelle regelmässiger Fehler ihren Ursprung haben.

Fig. 1.



In dem in den Abschnitten 2. und 3. behandelten Beispiel hat man folgende Daten zum Auftragen der Bestimmungslinien für N (der Tangenten an die Kreise um B, W, Z).

Näherungspunkt:	N_0	$x_0 = +24007,70$	$y_0 = +5177,30$	
Richtungswinkel:	$(KN_0) =$	$(BN_0) = 59^0,2$	$(WN_0) = 158^0,2$	$(ZN_0) = 276^0,9$
somit R.W. der Tangente	$= (KN_0) \pm 90^0 =$	$149^0,2$	$248^0,2$	$6^0,9$
Strecken zum Näherungspunkt:	$KN_0 =$	522,42	367,54	439,82
Gemessene Strecken:	$KN =$	522,60	367,59	439,99
Abstand der Tangente von N_0, gegen K hin,	=	– 0,18	– 0,05	– 0,17

Mit diesen Richtungswinkeln und Abständen werden die Tangenten in dasselbe Netz im Maßstab 1 : 10 eingetragen, wie es in dem oben zitierten Aufsatz des Verfassers, Zeitschrift für Vermess. 1896, S. 613 angegeben und verwendet ist (Randteilung in Graden, Koordinatenteilung nur nach Dezimetern, nicht nach Centimetern, also Netz mit cm-, nicht den verwirrenden mm-Linien). Man erhält damit die in Figur 2 stark ausgezogenen Linien.

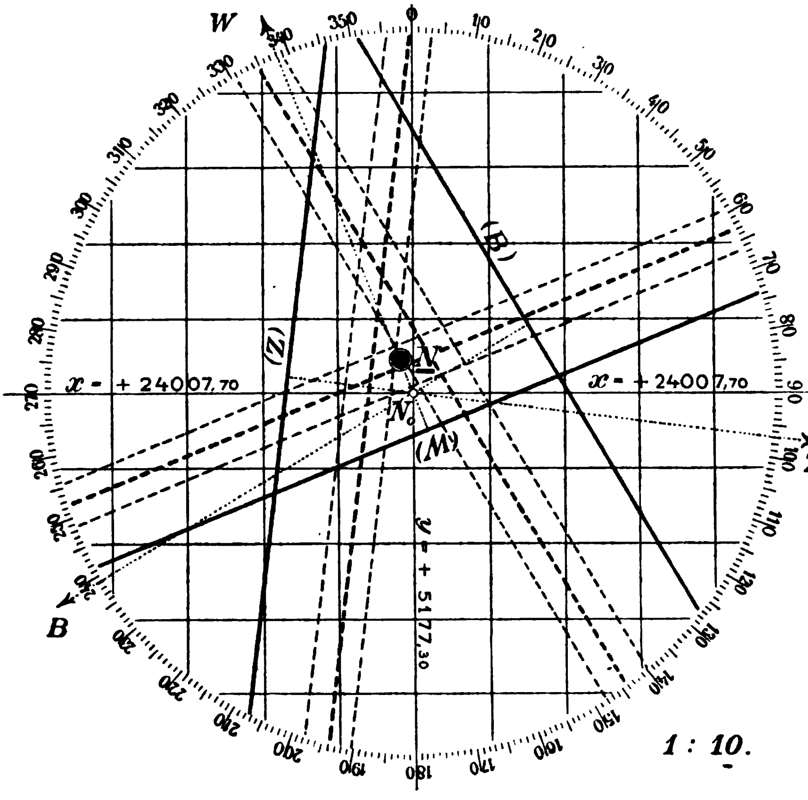
Wählt man ihnen entsprechend rasch nach Gutdünken den Punkt $\underline{N}$ aus, so ist man geneigt, ihn mit etwa

$$\underline{x} = +24007,80, \quad \underline{y} = +5177,28,$$

also mit einer gegen das Resultat 9) etwas grossen Abscisse anzusetzen.

Man hat aber, wenn man sich $[vv]$ gebildet denkt, zu beachten, dass mit Entfernung des Punktes von der Linie (W) das v_2^2 sehr rasch wächst, während gleichzeitig v_1 und v_3 nur sehr langsam abnehmen. Man wird also mit $\underline{N}$ doch möglichst nahe bei (W) bleiben und damit ein Resultat erhalten, das von 9) praktisch kaum abweicht. Eine Konstruktion des der Methode der kleinsten Quadrate entsprechenden Punktes (vergl. 3.), wie sie Bertot u. a. gegeben haben, empfiehlt

Fig. 2.



sich auch hier nicht, vernichtet vielmehr z. T. die Vorzüge der graphischen Ausgleichung.

In die Figur eingetragen sind nun hier, dem Vorstehenden entsprechend, aber auch noch starke Linien — — —; diese entstehen durch Verkürzung der L um das konstante Maß $\frac{1}{4000}$ von L, d. h. um die oben berechneten Beträge 13, 9 und 11 cm, und neben ihnen sind noch feine Linien – – –, die von mir so genannten Nebenlinien (siehe den oben angeführten Aufsatz und 6.) eingetragen. Man sieht hier auf einen Blick, dass die Verschiebung der —— auf die — — —

als Bestimmungslinien an den Koordinaten des zu wählenden Punktes $\underline{N}$ praktisch so gut wie nichts verändert, auch mit — — — liest man ab:

$$\underline{x} = + 24007,76,$$
$$\underline{y} = + 5177,28;$$

vergl. dazu die Bemerkungen zur rechnerischen Ausgleichung.

Auch bei dieser einfachen graphischen Ausgleichung ist es als Übungsaufgabe für Studierende (nicht im Sinne wirklicher Anwendung bei Ausgleichungen) ganz empfehlenswert, für eine Anzahl von Punktannahmen in der Umgebung von N_0 die v abzumessen (sei es die auf —— oder — — — sich gründenden) und je die $[pvv]$ zu bilden, endlich aus den so für jene Punkte gewonnenen Zahlen Linien gleicher $[pvv]$ empirisch zu konstruieren. Wer von mittlerer Fehlerellipse noch nichts gehört hat, wird so sehr einfach auf sie hingewiesen.

6. Nebenlinien. Schlussbemerkungen.

(Soldnersche und Gausssche Koordinaten.)

Auch hier wird zweifellos die volle Anschaulichkeit der graphischen Ausgleichung erst erreicht durch die Nebenlinien, die die verschiedene Wertigkeit der einzelnen Bestimmungslinien graphisch zum Ausdruck bringen; sei es, dass man sie auf —— bezieht und dann in ihre Abstände auch den konstanten Fehlerteil mit aufnimmt, oder auf — — — und sich hier wesentlich auf den unregelmässigen Fehler beschränkt. In der obigen Figur 2 ist dies mit der Annahme:

$$\text{unregelmässiger Fehler} = \pm 1,5\sqrt{L}\ \text{mm}$$

geschehen und zwar bezogen auf — — —, bei denen der regelmässige Fehler im wesentlichen beseitigt sein wird. Die Abstände der Nebenlinien — — — von den entsprechenden Hauptlinien werden

$$1,5\sqrt{523}, \quad 1,5\sqrt{368} \quad \text{und} \quad 1,5\sqrt{440},$$

also ± 34, ± 29 und ± 32 mm. Dass man sich hier wieder zur Eintragung von Haupt- und Nebenlinien zweckmässig eines Parallellineals bedient, das die Parallelverschiebungen direkt einstellen lässt (vergl. Zeitschrift für Vermessungsw. 1896, S. 616), braucht wohl kaum besonders hervorgehoben zu werden.

Wenn auch auf die Aufgabe der Ausgleichung überschüssiger Streckenmessungen zur Bestimmung der Lage eines Punktes praktisch nicht viel Gewicht zu legen ist, so sei doch noch daran erinnert, dass man gelegentlich solche Streckenmessung mit Vorwärts- oder Rückwärtsschnitten kombinieren kann, indem der eine oder andere der gegebenen Punkte nahe und für die Längenmessung bequem liegt. Bei graphischer Ausgleichung ist diese Kombination besonders einfach.

Zum Schluss sei auch noch besonders angeführt, dass man bei der Punktbestimmung durch Streckenmessung sehr leicht (etwas bequemer als bei der Winkelmessung) Rücksicht nehmen kann auf die

Verschiedenheit der Streckenverzerrung in verschiedenen, von einem Punkt ausgehenden Richtungen, wenn die Punkte sich auf ein System Soldnerscher Koordinaten (oder ein anderes, nicht winkeltreues System) beziehen. Wenn die Ordinate der Messungsstelle sehr gross ist, so kann ja die Verstreckung, die wie ein mit der Richtung der gemessenen Strecke veränderlicher konstanter Fehler wirkt, sogar für gewöhnliche Lattenmessung fühlbar werden; z.B. ist im Soldnerschen System mit $y = 90$ km der Maximalwert der Verstreckung des Bogendifferentials bereits rund $\frac{1}{10000}$, also neben den andern konstanten Fehlern der Längenmessung wohl fühlbar. Diese differentielle Verstreckung ist bei Soldner Null in der Richtung senkrecht zur x-Axe (Richtungswinkel 90° und 270°) und erreicht ihr Maximum, in Bruchform $\frac{y^2}{2R^2}$, in der Richtung der x-Axe (Richtungswinkel 0° und 180°); in beliebiger Richtung (Winkel α mit der x-Axe) beträgt sie endlich

$$\frac{y^2}{2R^2}\cos^2\alpha.$$

Diese, für verschiedene Richtungen verschiedene, prozentische Vergrösserung der gemessenen Strecken wäre vor ihrer Einführung in die Rechnung anzubringen, wenn man bei besonders scharfer Längenmessung und bei grosser Entfernung der Messungsstelle von der x-Axe, 80 bis 100 km z. B., überhaupt auf sie Rücksicht nehmen will; selbstverständlich gilt dies sowohl für rechnerische als für graphische Ausgleichung. Bei Gaussschen Koordinaten statt Soldnerschen ist diese Projektionsvergrösserung der gemessenen (jedenfalls kurzen, nur einige hundert Meter langen) Strecken für alle dieselbe und kann, wenn sie überhaupt berücksichtigt werden soll, mit der sonst etwa als zweckmässig sich zeigenden konstanten Veränderung dieser Strecken zusammen gemessen werden. Wäre also die Punkteinschaltung durch Längenmessung (statt der durch Winkelmessung) praktisch wichtig, so wäre hier ebensowenig oder weniger als dort die Soldnersche Abbildung im Vorteil gegen die Gausssche und es ist nicht richtig, wenn in der geodätischen Litteratur (im Anschluss an die frühere Entwickelung Jordans, vergl. z.B. Handbuch der Vermessungskunde, 2. Auflage 1878, 2. Band S. 296, 3. Auflage des 3. Bandes, 1890, S. 285—287) immer noch das Gegenteil behauptet wird.

Bemerkung über einen Satz der Differentialrechnung.

Von G. Kowalewski in Leipzig.

Gauss (vergl. Kronecker, Vorlesungen über die Theorie der einfachen und vielfachen Integrale, herausgegeben von E. Netto, 1. Vorl. S. 12) definiert einmal die Stetigkeit einer Funktion in dem folgenden Sinne:

„Geht x von x_0 bis x_1 und nimmt y für diese beiden Werte der Variablen die Werte y_0 und y_1 an, dann giebt es zwischen x_0 und x_1 jedesmal ein x', für welches die Funktion den zwischen y_0 und y_1 beliebig gewählten Wert y' erhält."

Gegenwärtig gilt bekanntlich die von Dirichlet (Crelle, Bd. 4, S. 159) gegebene Definition, welche den Begriff mehr einschränkt, sodass eine Funktion, welche die von Gauss angegebene Eigenschaft hat, nicht notwendig in dem heutigen Sinne stetig zu sein braucht. Eine grosse Klasse von solchen Funktionen bilden z. B. alle Derivierten von stetigen Funktionen.

Im folgenden soll für Funktionen, die nur der Gaussschen Forderung genügen, ein Satz bewiesen werden, der in der Differentialrechnung für stetige Funktionen bewiesen wird. Er lautet:

Hat eine Funktion $f(x)$ in dem Intervall $(a \ldots b)$ einschliesslich der Grenzen die von Gauss angegebene Eigenschaft, besitzt sie ferner an jeder Stelle im Innern des Intervalls eine bestimmte Derivierte und ist $f(a)=f(b)$, so giebt es zwischen a und b eine Stelle ξ, an welcher die Derivierte verschwindet.

Dass $f(x)$ im Innern von $(a \ldots b)$ eine bestimmte Derivierte besitzt, soll (im Anschluss an Dini, Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer reellen veränderlichen Grösse, Seite 93, § 72) bedeuten, dass für jedes x zwischen a und b der Grenzwert von $\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$ endlich oder unendlich gross, aber von bestimmtem Vorzeichen, ist; gleichviel, ob δ positiv oder negativ sich der Null nähert.

Konstruiert man um die Stelle $c = \frac{a+b}{2}$ mit einer beliebigen positiven Grösse ε $\left(\text{nur muss } \varepsilon < \frac{b-a}{2} \text{ sein}\right)$ ein Intervall $(c-\varepsilon \ldots c+\varepsilon)$ und greift aus demselben zwei Werte x', x'' heraus, so kann möglicherweise $f(x') = f(x'')$ sein. Wenn dagegen $f(x') \gtrless f(x'')$ ist, so ist eine Differenzen $f(x') - f_0$, $f(x'') - f_0$, wo $f_0 = f(a) = f(b)$ sein soll, von Null verschieden. Es sei z. B. $f(x') - f_0 \gtrless 0$. Dann kann man zwei Werte c_1, c_2 so zwischen $f(x')$ und $f(x'')$ wählen, dass $c_1 - f_0$, $c_2 - f_0$ beide von Null verschieden sind und dasselbe Vorzeichen haben. (Man braucht nur c_1, c_2 genügend nahe an $f(x')$ zu wählen.) Weil $f(x)$ die Gausssche Eigenschaft hat, giebt es zwischen x' und x'' zwei Stellen x_1, x_2, sodass $f(x_1) = c_1$, $f(x_2) = c_2$ ist. Dann sind also auch $f(x_1) - f_0$, $f(x_2) - f_0$ beide von einander und von Null verschieden und haben dasselbe Vorzeichen. Ausserdem ist

$$c - \varepsilon < x_1 < x_2 < c + \varepsilon,$$

wenn die Bezeichnung so gewählt wird, dass $x_1 < x_2$ ist. Wenn nun

$$|f(x_1)-f_0|>|f(x_2)-f_0|$$

ist, so liegt $f(x_2)$ zwischen $f_0=f(a)$ und $f(x_1)$, mithin giebt es zwischen a und x_1 eine Stelle x_2', sodass $f(x_2')=f(x_2)$ ist $(a<x_2'<x_1<x_2<c+\varepsilon)$. Im Falle $|f(x_1)-f_0|<|f(x_2)-f_0|$ liegt $f(x_1)$ zwischen $f(x_2)$ und $f_0=f(b)$, folglich giebt es zwischen x_2 und b eine Stelle x_1', so dass $f(x_1)=f(x_1)$ ist

$$(c-\varepsilon<x_1<x_2<x_1'<b).$$

Es hat sich also ergeben, dass einer der folgenden drei Fälle eintritt: Entweder ist $f(x')=f(x'')$ oder $f(x_1')=f(x_1)$ oder $f(x_2')=f(x_2')$, wobei

$$c-\varepsilon<x'<x''<c+\varepsilon,\quad c-\varepsilon<x_1<x_1'<b,\quad a<x_2'<x_2<c+\varepsilon.$$

Dies können wir so ausdrücken:

Ist $f(a)=f(b)$ und hat $f(x)$ in dem Intervall $(a\ldots b)$ mit Einschluss der Grenzen die Gausssche Eigenschaft, so giebt es zu einer beliebig gewählten positiven Grösse ε ein ganz innerhalb $(a\ldots b)$ gelegenes Intervall $(a_1\ldots b_1)$ von der Grösse $b_1-a_1<\frac{b-a}{2}+\varepsilon$ derart, dass $f(a_1)=f(b_1)$ ist.

Diesen Schluss kann man ohne Ende wiederholen. Zu einer beliebig gewählten positiven Grösse ε_1 findet man dann ein ganz innerhalb $(a_1\ldots b_1)$ liegendes Intervall $(a_2\ldots b_2)$ von der Grösse $b_2-a_2<\frac{b_1-a_1}{2}+\varepsilon_1$ derart, dass $f(a_2)=f(b_2)$ ist und so fort. Auf diese Weise gewinnt man eine unendliche Reihe von Intervallen

$$(a\ldots b),\ (a_1\ldots b_1),\ldots(a_n\ldots b_n),\ \ldots,$$

wo jedes ganz in dem vorhergehenden enthalten ist und hinsichtlich der Grösse die Ungleichungen bestehen:

$$b_n-a_n<\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}+\varepsilon_{n-1}.\qquad (n=1,2,\ldots)$$

Sind die $\varepsilon,\varepsilon_1,\ldots$ so gewählt, dass $\varepsilon_{n-1}=\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{4}$ ist, so erkennt man leicht, dass

$$b_n-a_n<\left(\frac{3}{4}\right)^n(b-a)$$

wird, dass also $\lim\limits_{n=\infty}(b_n-a_n)=0$ wird. Dann aber giebt es einen Punkt ξ, der in allen jenen Intervallen enthalten ist, sodass $a_n<\xi<b_n$ ist. Wir haben also das Resultat:

Hat $f(x)$ in dem Intervall $(a\ldots b)$ einschliesslich der Grenzen die Gausssche Eigenschaft und ist $f(a)=f(b)$, so existiert im Innern von $(a\ldots b)$ eine Stelle ξ, um welche sich Intervalle $(a_n\ldots b_n)$ von beliebiger Kleinheit konstruieren lassen derart, dass $f(a_n)=f(b_n)$ ist.

Ziehen wir jetzt unsere Voraussetzung über die Derivierte von $f(x)$ in Betracht, so ergiebt sich, da die beiden Quotienten

$$\frac{f(a_n)-f(\xi)}{a_n-\xi},\quad \frac{f(b_n)-f(\xi)}{b_n-\xi},$$

wenn sie nicht verschwinden, entgegengesetzte Zeichen haben, dass nur $f'(\xi)=0$ sein kann.

Als Beispiel einer Funktion, welche unseren Voraussetzungen genügt, ohne überall stetig zu sein, führen wir die folgende an, in welcher die Quadratwurzeln positiv sein sollen.

$$f(x) = \left(\sin\frac{\pi}{x}\right)^2 + \sqrt{x}, \quad (x > 0), \quad f(0) = 0,$$

$$-f(x) = 2x + \left(\sin\frac{\pi}{x}\right)^2 + \sqrt{-x}, \quad (x < 0).$$

Hier ist $f(1) = f(-1) = 1$). An der Stelle $x = 0$ ist eine Unstetigkeit, während die Gausssche Eigenschaft offenbar besteht und der vorwärts und rückwärts gebildete Differentialquotient gleich $+\infty$ ist.

Bemerkungen zu dem Mittelwertsatz für ein System von n Integralen.

Von **G. Kowalewski** in Leipzig.

In Heft 3 des vorigen Jahrgangs habe ich den Satz aufgestellt, dass für n Integrale $\int_a^b \varphi_i(t)\,dt$ $(i = 1, 2 \ldots n)$, wo die φ_i reelle und von a bis b stetige Funktionen sind, n Gleichungen bestehen:

$$\int_a^b \varphi_i(t)\,dt = [\lambda_1 \varphi_i(t_1) + \cdots + \lambda_n \varphi_i(t_n)](b - a).$$

Dabei sind $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ positive Grössen mit der Summe $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ und $t_1, t_2 \ldots t_n$ gewisse Werte aus dem Intervall $(a \ldots b)$. Durch eine einfache Variablenänderung kann man auch den allgemeineren Satz beweisen, dass unter denselben Voraussetzungen n Gleichungen

$$\int_a^b \varphi_i(t) F(t)\,dt = [\lambda_1 \varphi_i(t_1) + \ldots + \lambda_n \varphi_i(t_n)] \int_a^b F(t)\,dt$$

bestehen, vorausgesetzt, dass $F(t)$ von a bis b stetig ist und keinen Zeichenwechsel erleidet.

Für $n = 2$ bin ich zu diesem Satze durch ein Theorem von Weierstrass geführt worden, welches Hermite in seinem Cours von 1882 (gehalten an der Faculté des sciences) in der 7. Vorlesung (Seite 63 der Ausgabe von Andoyer) entwickelt mit Hilfe von Betrachtungen, die der Statik angehören. Setzt man $f(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ und

$$\int_a^b F(t) f(t)\,dt = \mu \int_a^b F(t)\,dt,$$

wo $F(t)$ von a bis b sein Zeichen nicht ändern soll, so sagt (nach Hermite) der Satz von Weierstrass aus, dass μ das Affix eines Punktes ist, der innerhalb jedes die sämtlichen Punkte $f(t)$ $(a \leq t \leq b)$ umschliessenden convexen Contours liegt. Will man also mit Hilfe des Weierstrassschen Satzes so viel wie möglich über die Lage des Punktes μ aussagen, so muss man den engsten convexen Contour aufsuchen, welcher die Punkte $f(t)$ enthält. Jeder convexe Bereich, der die Punkte $f(t)$ enthält, muss auch ihre Verbindungsstrecken enthalten. Wenn also die Gesamtheit aller Verbindungsstrecken von je zweien der Punkte $f(t)$ oder, wie man sich ausdrücken kann,

aller Sehnen der Kurve $f(t)$ selbst einen convexen Bereich erzeugen würde, so wäre dies offenbar der engste convexe Bereich, der die Punkte $f(t)$ enthält. Man würde in diesem Falle sagen können, der Punkt μ liege in diesem Bereich oder, was dasselbe ist, auf einer Sehne der Kurve $f(t)$. Dies wäre aber auch das Maximum von dem, was man mit Hilfe des Weierstrassschen Satzes über die Lage von μ aussagen kann. Bei einer Kurve, die sich zeichnen lässt, ist es evident, dass die Sehnen einen convexen Bereich bilden. Wenn man aber $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ nur als stetig voraussetzt, so lässt es sich nicht so leicht einsehen. Ich habe deshalb in der in Heft 3 veröffentlichten Arbeit unter Umgehung dieses Hilfssatzes, nach dessen Beweis ich mich einfach auf das Theorem von Weierstrass hätte stützen können, direkt bewiesen, dass μ ein Punkt auf einer Sehne der Kurve $f(t)$ ist, was ja unmittelbar in meinen Gleichungen

$$\int_a^b \varphi(t)F(t)dt = [\lambda_1\varphi(t_1) + \lambda_2\varphi(t_2)]\int_a^b F(t)dt,$$
$$\int_a^b \psi(t)F(t)dt = [\lambda_1\psi(t_1) + \lambda_2\psi(t_2)]\int_a^b F(t)dt$$

(die in jener Arbeit allerdings nur für $F(t) = 1$ abgeleitet werden) enthalten ist. Später bemerkte ich, dass in eben jener Arbeit auch der Beweis des Satzes implicite enthalten ist, dass die Sehnen von $f(t)$ einen convexen Bereich bilden. Sind nämlich

$$\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2, \quad \lambda_3\omega_3 + \lambda_4\omega_4$$
$$(\omega_i = f(t_i), \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 + \lambda_4 = 1, \quad a \leq t_i \leq b, \quad \lambda_1, \lambda_2 \geqq 0, \quad \lambda_3, \lambda_4 > 0)$$

irgend zwei Punkte des von den Sehnen erzeugten Bereiches, so ist ihre Verbindungsstrecke durch

$$\varkappa_1(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) + \varkappa_2(\lambda_3\omega_3 + \lambda_4\omega_4) \quad (\varkappa_1, \varkappa_2 > 0, \ \varkappa_1 + \varkappa_2 = 1)$$

dargestellt. Da hier aber $\varkappa_1\lambda_1 + \varkappa_1\lambda_2 + \varkappa_2\lambda_3 + \varkappa_2\lambda_4 = 1$ ist, so lässt sich auf Grund der Ausführungen in Heft 3 schliessen, dass diese Verbindungsstrecke nur Punkte enthält, die wieder auf einer Sehne liegen. Der durch die Sehnen von $f(t)$ erzeugte Bereich hat also die Eigenschaft, dass die Verbindungsstrecke von irgend zweien seiner Punkte ganz zu dem Bereich gehört. Dadurch ist aber ein convexer Bereich charakterisiert.

In Wirklichkeit sagt also, wenn man diesen Hilfssatz kennt, der Weierstrasssche Satz dasselbe aus wie mein Mittelwertsatz für $n = 2$. Da aber dieser Hilfssatz nirgends, soweit mir Darstellungen des Weierstrassschen Satzes bekannt sind, erwähnt wird und auch keineswegs selbstverständlich zu sein scheint, so glaube ich auch in dem Falle $n = 2$ eine kleine Ergänzung des Weierstrassschen Satzes gebracht zu haben, während die Verallgemeinerung auf $n > 2$ neu sein dürfte.

Im folgenden mache ich eine Anwendung von dem allgemeinen Mittelwertsatz auf drei Funktionen, die so gewählt werden:

$$\varphi_1(t) = \varphi(t),$$
$$\varphi_2(t) = \psi(t),$$
$$\varphi_3(t) = \varphi(t)\cdot\psi(t).$$

Es ergiebt sich:

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = [\lambda_1\varphi(t_1) + \lambda_2\varphi(t_2) + \lambda_3\varphi(t_3)](b-a),$$

$$\int_a^b \psi(t)\,dt = [\lambda_1\psi(t_1) + \lambda_2\psi(t_2) + \lambda_3\psi(t_3)](b-a),$$

$$\int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,dt = [\lambda_1\varphi(t_1)\psi(t_1) + \lambda_2\varphi(t_2)\psi(t_2) + \lambda_3\varphi(t_3)\psi(t_3)](b-a).$$

Multipliziert man die beiden ersten Gleichungen und subtrahiert davon die dritte, nachdem man sie vorher mit $b-a=(b-a)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$ multipliziert hat, so kommt nach gehöriger Reduktion:

$$\left\{\begin{aligned}&\int_a^b \varphi(t)\,dt\cdot\int_a^b \psi(t)\,dt - (b-a)\int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,dt\\ &\qquad = -(b-a)^2\sum_{i,k}^{1,2,3}\lambda_i\lambda_k(\varphi_i-\varphi_k)(\psi_i-\psi_k),\end{aligned}\right.$$

wo $\varphi_i=\varphi(t_i)$, $\varphi_k=\varphi(t_k)$ sein soll. Aus dieser Gleichung lässt sich ein bemerkenswerter Schluss ziehen. Sind $\varphi(t)$, $\psi(t)$ so beschaffen, dass sie beide fortwährend wachsen oder beide fortwährend abnehmen, wenn t das Intervall $(a\ldots b)$ von a nach b durchläuft, so haben die Differenzen $\varphi_i-\varphi_k$, $\psi_i-\psi_k$ dasselbe Vorzeichen und, da die $\lambda_i\cdot\lambda_k \geqq 0$ sind, so ist

$$\sum_{i,k}\lambda_i\lambda_k(\varphi_i-\varphi_k)(\psi_i-\psi_k)\geqq 0$$

folglich die rechte Seite der Gleichung sicher nicht positiv, mithin:

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt\cdot\int_a^b \psi(t)\,dt \leqq (b-a)\int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,dt.$$

Wenn dagegen $\varphi(t)$ fortwährend zunimmt, $\psi(t)$ aber abnimmt oder umgekehrt, so kommt die Ungleichung:

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt\cdot\int_a^b \psi(t)\,dt \geqq (a-b)\int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,dt,$$

weil dann die Differenzen $\varphi_i-\varphi_k$, $\psi_i-\psi_k$ entgegengesetzte Zeichen haben, ihr Produkt also negativ ist.

Diese wichtigen Ungleichungen, welche sich in so einfacher Weise aus dem Mittelwertsatz für $n=3$ ableiten lassen, rühren von Tschebyscheff her, wie Hermite in dem oben citierten Cours von 1882 (S. 47) mitteilt. Einen Beweis, der sich auf die Betrachtung des Doppelintegrals

$$\int_a^b\int_a^b [\varphi(x)-\varphi(y)][\psi(y)-\psi(y)]\,dx\,dy$$

stützt, findet man im American Journal of Mathematics (vol. VII, S. 377). Dort wird auch eine Reihe von interessanten Anwendungen, namentlich auf elliptische Integrale, vorgeführt.

Über die automorphe Transformation einer Summe von Quadraten mit Hilfe infinitesimaler Transformationen und höherer komplexer Zahlen.

Von

Professor Beez

in Plauen i. V.

(Fortsetzung.)

§ 2.

Die automorphe Transformation der Summe von drei Quadraten.

Um die Summe von drei Quadraten $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ in die Summe dreier anderer Quadrate $x_0'^2 + x_1'^2 + x_2'^2$ überzuführen, hat man

$$1)\quad \begin{cases} x_0' = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2, \\ x_1' = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

zu setzen und den Koeffizienten a_{ik} die Bedingung aufzuerlegen, dass

$$2)\quad \begin{cases} a_{00}^2 + a_{10}^2 + a_{20}^2 = 1, & a_{00}a_{01} + a_{10}a_{11} + a_{20}a_{21} = 0, \\ a_{01}^2 + a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, & a_{00}a_{02} + a_{10}a_{12} + a_{20}a_{22} = 0, \\ a_{02}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, & a_{01}a_{02} + a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases}$$

sei. Infolge davon ist:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1,$$

also

$$\Delta = \pm 1.$$

Wir beschränken uns auf die Betrachtung des ersten Falles $\Delta = +1$ und nehmen überdies an, dass die identische Transformation $x_0' = x_0$, $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$ für $a_{00} = a_{11} = a_{22} = 0$ und $a_{ik} = 0$, wenn k von i verschieden ist, eintritt. Die inverse Transformation, durch welche der Punkt x' wieder in den Punkt x zurückgeführt wird, ist:

$$3)\quad \begin{cases} x_0'' = a_{00}x_0' + a_{10}x_1' + a_{20}x_2', \\ x_1'' = a_{01}x_0' + a_{11}x_1' + a_{21}x_2', \\ x_2'' = a_{02}x_0' + a_{12}x_1' + a_{22}x_2' \end{cases}$$

Denn setzt man in 3) die Werte von x_0', x_1', x_2' aus 1) ein, so erhält man $x_0'' = x_0$, $x_1'' = x_1$, $x_2'' = x_2$.

Die Gleichungen 1) bilden eine dreigliedrige Gruppe, da zwischen den neuen Koeffizienten a_{ik} sechs Gleichungen stattfinden, sie also als Funktionen von drei wesentlichen oder unabhängigen Parametern angesehen werden können. Die Transformation 1), 2) lässt den Koordinatenanfang, den Abstand eines Punktes von demselben, die Entfernung zweier Punkte, die unendlich entfernte Ebene, den unendlich entfernten imaginären Kreis oder den imaginären Kegel $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ unverändert, ausserdem aber auch noch die Ebene $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = c$, wie sich später ergeben wird, wenn die drei wesentlichen Parameter λ_0, λ_1, λ_2 eingeführt worden sind. Zur geometrischen Deutung der Gleichungen 1) nehmen wir zwei rechtwinklige Axensysteme mit gemeinschaftlichem Koordinatenanfang an, von denen das eine fest das andere um den Koordinatenanfang drehbar sei. Die Koordinaten eines Punktes M mögen in dem ersten x_0', x_1', x_2', in dem zweiten x_0, x_1, x_2 sein. Dann bestehen zwischen den beiderlei Koordinaten die Gleichungen 1), welches dieselben sind wie bei der gewöhnlichen Koordinatentransformation, und den Übergang von einem rechtwinkligen System zu einem anderen mit demselben Koordinatenanfang vermitteln. Ist die Anderung in der Lage des beweglichen Systems gegen die Anfangslage nur eine unendlich geringe, so ändern sich die Koeffizienten a_{ik} unendlich wenig, während x_0, x_1, x_2 unverändert bleiben. Man hat also die Gleichungen 1) zu variiren und dabei auf die Gleichungen 2) Rücksicht zu nehmen, sodann die beiden Systeme zusammenfallen zu lassen, wobei $a_{ii} = 1$, $a_{ik} = 0$, wenn k von i verschieden ist. Wir erhalten aus 2):

$$\delta a_{00} = \delta a_{11} = \delta a_{22} = 0, \quad \delta a_{01} + \delta a_{10} = 0, \quad \delta a_{02} + \delta a_{20} = 0,$$
$$\delta a_{12} + \delta a_{21} = 0.$$

Wir können daher den infinitesimalen Transformationen folgende Gestalt geben:

$$4)\quad \begin{cases} (\delta x_0')_0 = \delta x_0 = \quad x_1 \delta a_{01} - x_0 \delta a_{20}, \\ (\delta x_1')_0 = \delta x_1 = - x_0 \delta a_{01} + x_2 \delta a_{12}, \\ (\delta x_2')_0 = \delta x_2 = \quad x_0 \delta a_{20} - x_1 \delta a_{12}. \end{cases}$$

Setzen wir die Variationen:

$$\delta a_{01}, \quad \delta a_{12}, \quad \delta a_{20},$$

die durch cyklische Vertauschung der Indices 0, 1, 2 in einander übergehen, bezüglich gleich

$$\lambda_2 \delta t, \quad \lambda_0 \delta t, \quad \lambda_1 \delta t,$$

worin δt eine unabhängige unendlich kleine, λ_0, λ_1, λ_2 beliebige endliche Grössen bedeuten, so sind die Variationen von x_0', x_1', x_2' für $t = 0$:

$$5)\quad \begin{cases} (\delta x_0')_0 = \delta x_0 = (\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)\delta t, \\ (\delta x_1')_0 = \delta x_1 = (\lambda_0 x_2 - \lambda_2 x_0)\delta t, \\ (\delta x_2')_0 = \delta x_2 = (\lambda_1 x_0 - \lambda_0 x_1)\delta t \end{cases}$$

und die Variation einer beliebigen Funktion $f(x_0, x_1, x_2, t)$:

$$\delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}\right)\delta t$$

wird

$$6)\quad \delta f = \left\{(\lambda_1 x_2 - \lambda_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_0} + (\lambda_0 x_2 - \lambda_2 x_0)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (\lambda_1 x_0 - \lambda_0 x_1)\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\}\delta t,$$

oder nach den willkürlichen Konstanten geordnet:

$$6^*)\quad \begin{cases} \delta f = \left\{\lambda_0\left(x_2\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \lambda_1\left(x_0\frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. + \lambda_2\left(x_1\frac{\partial f}{\partial x_0} - x_0\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\right\}\delta t. \end{cases}$$

Wir bestimmen nun in derselben Reihenfolge wie in § 1 die endlichen Transformationen nach den dort angegebenen drei verschiedenen Integrationsmethoden.

I. Setzen wir den Koeffizienten von δf in 6):

$$(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_0} + (\lambda_0 x_2 - \lambda_2 x_0)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (\lambda_1 x_0 - \lambda_0 x_1)\frac{\partial f}{\partial x_2} = \varphi f,$$

so finden wir die endlichen Transformationen in der Form:

$$7)\quad x_i' = x_i + t\varphi x_i + \frac{t^2}{2!}\varphi^2 x_i + \frac{t^3}{3!}\varphi^3 x_i + \cdots$$

Nun ist:

$$7^*)\quad \begin{cases} \varphi x_0 = \lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2, \\ \varphi^2 x_0 = -(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)x_0 + \lambda_0\lambda_1 x_1 + \lambda_0\lambda_1 x_2, \\ \varphi^3 x_0 = -(\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2)\varphi x_0. \end{cases}$$

Setzt man $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = h^2$, so ist also:

$$\varphi^3 x_0 = -h^2\varphi x_0,\quad \varphi^4 x_0 = -h^2\varphi^2 x_0,\quad \varphi^5 x_0 = h^4\varphi x_0,$$
$$\varphi^6 x_0 = h^4\varphi^2 x_0,\ \text{etc.}$$

und es kommt:

$$x_0' = x_0 + t\varphi x_0 + \frac{t^2}{2!}\varphi^2 x_0 - \frac{h^2 t^3}{3!}\varphi x_0 - \frac{h^2 t^4}{4!}\varphi^4 x_0 + \frac{h^4 t^5}{5!}\varphi x_0 + \frac{h^4 t^6}{6!}\varphi^2 x_0 + \cdots$$
$$= x_0 + \varphi x_0\frac{\sin ht}{h} + \varphi^2 x_0\frac{1 - \cos ht}{h^2}.$$

Durch Einführung der Werte von φx_0 und $\varphi^2 x_0$ erhält man endlich:

$$8)\quad \begin{cases} x_0' = x_0\left(1 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\frac{1 - \cos ht}{h^2}\right) + x_1\left(\lambda_0\lambda_1\frac{1 - \cos ht}{h^2} + \lambda_2\frac{\sin th}{h}\right) \\ \qquad\qquad + x_2\left(\lambda_0\lambda_2\frac{1 - \cos ht}{h^2} - \lambda_1\frac{\sin ht}{h}\right), \end{cases}$$

woraus durch cyklische Vertauschung der Indices 0, 1, 2:

$$8)\quad \begin{cases} x_1' = x_0\left(\lambda_0\lambda_1\dfrac{1-\cos ht}{h^2} - \lambda_1\dfrac{\sin ht}{h}\right) + x_1\left(1-(\lambda_0^2+\lambda_2^2)\dfrac{1-\cos ht}{h^2}\right) \\ \qquad\qquad + x_2\left(\lambda_1\lambda_2\dfrac{1-\cos ht}{h^2} + \lambda_0\dfrac{\sin ht}{h}\right) \\ x_2' = x_2\left(\lambda_0\lambda_2\dfrac{1-\cos ht}{h^2} + \lambda_1\dfrac{\sin ht}{h}\right) + x_1\left(\lambda_1\lambda_2\dfrac{1-\cos ht}{h^2} - \lambda_0\dfrac{\sin ht}{h}\right) \\ \qquad\qquad + x_2\left(1-(\lambda_0^2+\lambda_1^2)\dfrac{1-\cos ht}{h^2}\right). \end{cases}$$

Die Formeln 8) gehen, sobald man

$$\begin{aligned} &h = 1\,, && t = \varphi\,, \\ &x_0 = x\,, && x_1 = y\,, && x_2 = z\,, \\ &x_0' = x'\,, && x_1' = y'\,, && x_2' = z'\,, \\ &\lambda_0 = -x_1, && \lambda_1' = -y_1, && \lambda_1 = -z_1 \end{aligned}$$

in die Eulerschen Gleichungen über, die wir in der Vektorengleichung

$$9)\qquad \varrho' - \varrho_1\cos\vartheta = (\varrho - \varrho_1\cos\vartheta)(\cos\varphi + ki\varrho_1\sin\varphi)^*,$$

worin

$$\begin{aligned} \varrho &= x + iy + kz\,, \\ \varrho' &= x' + iy' + kz'\,, \\ \varrho_1 &= x_1 + iy_1 + kz_1\,, \\ \cos\vartheta &= xx_1 + yy_1 + zz_1 = x'x_1 + y'y_1 + z'z_1, \end{aligned}$$

zusammengefasst haben. Wenn λ_0, λ_1, λ_2 unveränderliche Werte haben und nur t sich ändern kann, so stellen die Gleichungen 8) eine eingliedrige Gruppe mit vertauschbaren Transformationen dar. Dies lässt sich am einfachsten mittelst obiger Vektorengleichung 9) nachweisen.

Man erkennt leicht, dass der Ausdruck

$$\lambda_0 x_0' + \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2',$$

sobald man für x_0', x_1', x_2' ihre Werte aus 8) einführt, in

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$

übergeht, dass also der letztere Ausdruck eine sogenannte Invariante der Transformation ist.** Dasselbe ist auch der Fall mit

$$x_1 x + y_1 y + z_1 z,$$

dem entsprechenden Eulerschen Ausdruck. Da nun derselbe gleich $\cos\vartheta$ ist, so ergiebt sich, dass, wenn x_1, y_1, z_1 als konstant angenommen werden, auch $\cos\vartheta$ unverändert bleibt. Lässt man daher auf die Transformation:

$$\varrho' = \varrho_1\cos\vartheta + (\varrho - \varrho_1\cos\vartheta)(\cos\varphi + ki\varrho_1\sin\varphi)$$

eine zweite Transformation:

$$\varrho'' = \varrho_1\cos\vartheta + (\varrho' - \varrho_1\cos\vartheta)(\cos\varphi' + ki\varrho_1\sin\varphi')$$

folgen, so erhält man eine Transformation derselben Art:

---

* l. c. S. 54, 1.

** S. diese Zeitschrift 41. Jahrg. S. 54.

$$\varrho'' = \varrho_1 \cos\vartheta + (\varrho - \varrho_1 \cos\vartheta)[\cos(\varphi + \varphi') + k i \varrho_1 \sin(\varphi + \varphi')];$$

die Gleichungen 8) stellen also eine Gruppe von Transformationen dar und zwar eine eingliedrige, da nur ein wesentlicher Parameter t vorhanden ist, eine sogenannte „eingliedrige Untergruppe".

Da t und t' vertauscht werden können, so folgt, dass zwei Transformationen der Gruppe 8) mit einander vertauscht werden können, sobald λ_0, λ_1, λ_2 ihre Werte nicht ändern. Ist letzteres jedoch nicht der Fall, so lässt sich aus Gleichung 9) die Gruppeneigenschaft der Transformation 8) nicht ablesen. Hierzu eignet sich aber in ganz vorzüglicher Weise die Quaternionenform* der Eulerschen Transformation:

10) $$u' = \frac{1}{q} u q,$$

worin

$$u = kix - ky + iz,$$
$$u' = kix' - ky' + iz',$$
$$q = d + kia - kb + ic.$$

Denn lässt man auf 10) die Transformation:

$$u'' = \frac{1}{q'} u' q'$$

folgen, so kommt:

11) $$u'' = \frac{1}{q'} \cdot \frac{1}{q} u q q'$$

Setzen wir hierin $qq' = q''$, woraus $\frac{1}{q'} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{q''}$ folgt, so lässt sich 11) auch schreiben:

12) $$u'' = \frac{1}{q''} u q'',$$

welche Gleichung eine Transformation derselben Art wie 10) darstellt. Die Transformationen 10) bilden also eine Gruppe. Zwei aufeinander folgende Transformationen sind aber nicht mit einander vertauschbar, da im allgemeinen $q'q$ nicht gleich qq' ist. Die Parametergleichung $q'' = qq'$ stellt ebenfalls eine Gruppe dar und lehrt** aus den Parametern der beiden zusammensetzenden Transformationen die Parameter der resultierenden Transformation zu finden.

Dieselben Resultate erhält man, wenn man die allgemeinen Theoreme der Lieschen Transformationstheorie*** auf den vorliegenden Fall anwendet. Es genügen zu diesem Zwecke folgende Sätze:

1. Zu jeder $r$gliedrigen Gruppe gehören r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen (S. 67).
2. Enthält eine $r$gliedrige Gruppe der Veränderlichen $x_1 x_2 \dots x_n$ die r infinitesimalen Transformationen:

---

* S. diese Zeitschrift, 41. Jahrg. S. 78.

** l. c. S. 79.

*** S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen.

$$13)\qquad \varphi_k f = \sum_1^r {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},^* \qquad k = 1, 2 \ldots r$$

so bestehen zwischen diesen infinitesimalen Transformationen Beziehungen von der Form:

$$14)\qquad \varphi_k(\varphi_\gamma f) - \varphi_\gamma(\varphi_k f) = \sum_1^r {}_s\, c_{k\gamma s}\, \varphi_s f,$$

wodie $c_{k\gamma s}$ numerische Konstante bedeuten (S. 150).

3. Das Bestehen dieser Beziehungen ist notwendig und hinreichend, damit r unabhängige infinitesimale Transformationen eine $r$gliedrige Gruppe erzeugen (S. 158).
4. Die endlichen Transformationen einer $r$gliedrigen Gruppe $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_r$ sind dann und nur dann mit einander vertauschbar, wenn alle Ausdrücke

$$15)\qquad (\varphi_i \varphi_k) = \varphi_i(\varphi_k) - \varphi_k(\varphi_i)$$

verschwinden (S. 260).

Um diese Kriterien auf die vorliegende Frage anwenden zu können, hat man zunächst zu untersuchen, wie viel unabhängige Parameter die Transformation 8) besitzt. Es scheint auf den ersten Blick, als ob deren vier vorhanden wären, nämlich λ_0, λ_1, λ_2 und t. Doch bemerkt man leicht, dass t sofort in Wegfall kommt, sobald man:

$$\lambda_0 = \frac{l_0}{t},\quad \lambda_1 = \frac{l_1}{t},\quad \lambda_2 = \frac{l_2}{t},$$

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = h^2 = \frac{H}{t^2}$$

einführt. Es geht dann beispielsweise die erste Gleichung in 8) in die folgende über:

$$16)\qquad \begin{cases} x_0' = x_0\left(1 - (l_1^2 + l_2^2)\dfrac{1-\cos H}{H^2}\right) + x_1\left(l_0 l_1 \dfrac{1-\cos H}{H^2} + l_2 \dfrac{\sin H}{H}\right) \\ \qquad\qquad + x_2\left(l_0 l_2 \dfrac{1-\cos H}{H^2} - l_1 \dfrac{\sin H}{H}\right). \end{cases}$$

Dasselbe Resultat hätte man auch erzielt, wenn man in den Formeln 8) $t = 1$ gesetzt hätte. Die identische Transformation tritt ein für $l_0 = l_1 = l_2 = 0$, wodurch auch $H = 0$ wird. Die Transformation 16) ist eine sogenannte kanonische Form der endlichen Transformation, welche nur wesentliche Parameter enthält. Für die kanonische Form der endlichen Transformation hat Lie die allgemeine Form aufgestellt:

$$17)\qquad x_i' = x_i + \sum_1^r {}_k\, \lambda_k \xi_{ki} + \sum_{k\gamma}^{1\ldots r} \frac{\lambda_k \lambda_\gamma}{1 \cdot 2} \varphi_k(\xi_{\gamma i}) + \cdots$$
$$i = 1, 2 \ldots n.$$

* $\xi_{xi}(x_1 - x_n)$ sind gegebene Funktionen von $x_1, x_2 \ldots x_n$.

Sie ergiebt sich aus der Formel 7):

$$x_i' = x_i + t\varphi x_i + \frac{t^2}{1\cdot 2}\varphi^2 x_i + \cdots$$

dadurch, dass man

$$f = 1,$$

18) $$\varphi f = \lambda_0 \varphi_0 f + \lambda_2 \varphi_1 f + \cdots + \lambda_r \varphi_r f,$$

$$\varphi_k f = \sum_1^r \zeta_{ki}(x_1 \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad k = 1, 2 \ldots r$$

setzt. In unserem Falle, wo $n = r = 3$ ist, würden wir bei der einmal gewählten Bezeichnung:

18*) $$\varphi f = \lambda_0 \varphi_0 f + \lambda_1 \varphi_1 f + \lambda_2 \varphi_2 f,$$

$$\varphi_0 f = \zeta_{00}\frac{\partial f}{\partial x_0} + \zeta_{01}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \zeta_{02}\frac{\partial f}{\partial x_2} = \quad x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$\varphi_1 f = \zeta_{10}\frac{\partial f}{\partial x_0} + \zeta_{11}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \zeta_{12}\frac{\partial f}{\partial x_2} = - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$\varphi_2 f = \zeta_{20}\frac{\partial f}{\partial x_0} + \zeta_{21}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \zeta_{22}\frac{\partial f}{\partial x_2} = \quad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial f}{\partial x_1},$$

erhalten. Die $\zeta_{\gamma i}$ haben also folgende Werte:

$$\begin{aligned} \zeta_{00} &= \ \ 0\,, & \zeta_{01} &= \ \ x_2, & \zeta_{02} &= -x_1, \\ \zeta_{10} &= -x_2, & \zeta_{11} &= \ \ 0\,, & \zeta_{12} &= \ \ x_0, \\ \zeta_{20} &= \ \ x_1, & \zeta_{21} &= -x_0, & \zeta_{22} &= \ \ 0. \end{aligned}$$

Setzt man nun in 18) die Werte von $\varphi_0 f$, $\varphi_1 f$, $\varphi_2 f$ ein, so kommt:

$$\varphi f = (\lambda_0 \zeta_{00} + \lambda_1 \zeta_{01} + \lambda_2 \zeta_{20})\frac{\partial f}{\partial x_0} + (\lambda_0 \zeta_{01} + \lambda_1 \zeta_{11} + \lambda_2 \zeta_{12})\frac{\partial f}{\partial x_2}$$
$$+ (\lambda_0 \zeta_{02} + \lambda_1 \zeta_{12} + \lambda_2 \zeta_{22})\frac{\partial f}{\partial x_2}$$

folglich:

$$\varphi x_i = \lambda_0 \zeta_{0i} + \lambda_1 \zeta_{1i} + \lambda_2 \zeta_{2i} = \sum_0^2{}_k \lambda_k \zeta_{ki}.$$

Es ist also wie oben 7*:

$$\varphi x_0 = \sum_0^2{}_k \lambda_k \zeta_{k0} = - \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1.$$

Ferner:

$$\varphi^2 x_i = (\lambda_0 \varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2)(\lambda_0 \zeta_{0i} + \lambda_1 \zeta_{1i} + \lambda_2 \zeta_{2i}),$$

worin der erste eingeklammerte Ausdruck als Operations- nicht als Multiplikationszeichen aufzufassen ist. Die Ausführung ergiebt:

$$\begin{aligned} \varphi^2 x_i = \lambda_0^2 \varphi_0 \zeta_{0i} &+ \lambda_0 \lambda_1 \varphi_0 \zeta_{0i} + \lambda_0 \lambda_2 \varphi_0 \zeta_{2i} \\ &+ \lambda_1 \lambda_0 \varphi_1 \zeta_{0i} + \lambda_1^2 \varphi_1 \zeta_{1i} + \lambda_1 \lambda_2 \varphi_2 \zeta_{2i} \\ &+ \lambda_2 \lambda_0 \varphi_2 \zeta_{0i} + \lambda_2 \lambda_1 \varphi_2 \zeta_{2i} + \lambda_2^2 \varphi_2 \zeta_{2i} \\ &= \sum \lambda_k \lambda_\gamma \varphi_k (\zeta_{\gamma i}), \end{aligned}$$

also insbesondere:

$$\varphi^2 x_0 = \sum \lambda_k \lambda_\gamma \varphi_k \zeta_{0\gamma} = -(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) x_0 + \lambda_0 \lambda_1 x_1 + \lambda_0 \lambda_2 x_2$$

wie oben 7*. Aus der kanonischen Form 16) erhält man die Euler-sche, wenn man:

$$\frac{l_0}{H} = -x_1, \quad \frac{l_1}{H} = -y_1, \quad \frac{l_2}{H} = -z_1, \quad H = \varphi$$

setzt. Um nun zu beweisen, dass die Transformationen 8) eine dreigliedrige Gruppe bilden, haben wir aus den drei infinitesimalen Transformationen:

$$\varphi_0 f = \quad x_2 \frac{\partial f}{\partial x_0} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$\varphi_1 f = -x_2 \frac{\partial f}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$\varphi_2 f = \quad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

die drei Klammerausdrücke $(\varphi_0 \varphi_1)$, $(\varphi_1 \varphi_2)$, $(\varphi_2 \varphi_0)$ zu bilden. Es ist:

$$(\varphi_0 \varphi_1) = \varphi_0(\varphi_1) - \varphi_1(\varphi_0),$$

$$\varphi_0(\varphi_1) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_0},$$

$$\varphi_1(\varphi_0) = x_0 \frac{\partial f}{\partial x_1},$$

also

$$(\varphi_0 \varphi_1) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial f}{\partial x_1} = \varphi_2.$$

Die drei numerischen Koeffizienten $c_{k\gamma s}$ haben hier die Werte:

$$c_{010} = 0, \quad c_{011} = 0, \quad c_{012} = 1.$$

Ebenso findet man:

$$(\varphi_1 \varphi_2) = \varphi_0,$$

$$c_{120} = 1, \quad c_{121} = 0, \quad c_{122} = 0,$$

$$(\varphi_2 \varphi_0) = \varphi_1,$$

$$c_{200} = 0, \quad c_{201} = 1, \quad c_{202} = 0.$$

Da nun die Ausdrücke $(\varphi_i \varphi_k)$ nach der Formel 14) gebildet sind, jedoch nicht verschwinden, so folgt, dass die Gleichungen 8) eine dreigliedrige Gruppe darstellen, deren Transformationen nicht mit einander vertauschbar sind.

II. Um die zweite Integrationsmethode in Anwendung bringen zu können, haben wir gemäss den infinitesimalen Transformationen 5) das simultane System:

$$1) \qquad \frac{d x_0'}{\lambda_2 x_1' - \lambda_1 x_2'} = \frac{d x_1'}{\lambda_0 x_2' - \lambda_2 x_0'} = \frac{d x_2'}{\lambda_1 x_0' - \lambda_0 x_1'} = dt$$

zu bilden und mit der Bedingung zu integrieren, dass für $t = 0$:

$$x_0' = x_0, \quad x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2$$

werde. Wir suchen zwei Integrale, welche t nicht enthalten. Diese beiden Integrale sind zugleich Lösungen der partiellen Differentialgleichung:

$$2)\quad (\lambda_2 x_1' - \lambda_1 x_2')\frac{\partial f}{\partial x_0'} + (\lambda_0 x_2' - \lambda_2 x_0')\frac{\partial f}{\partial x_1'} + (\lambda_1 x_0' - \lambda_0 x_1')\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0;$$

die zwei gesuchten, von t freien Integrale, zugleich Invarianten der Transformation, sind:

$$3)\qquad x_0'^2 + x_1'^2 + x_2'^2 = c,$$

$$4)\qquad \lambda_0 x_0' + \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' = c_1,$$

wo c und c_1' Konstante bedeuten. Aus 3) und 4) ergeben sich durch Differentiation:

$$3^*)\qquad x_0' dx_0' + x_1' dx_1' + x_2' dx_2' = 0,$$

$$4^*)\qquad \lambda_0 dx_0' + \lambda_1 dx_1' + \lambda_2 dx_2' = 0$$

und hieraus

$$dx_0' : dx_1' : dx_2' = \lambda_2 x_1' - \lambda_1 x_2' : \lambda_0 x_2' - \lambda_2 x_0' : \lambda_1 x_0' - \lambda_0 x_1',$$

der Gleichung 1) entsprechend. Setzt man ferner der Reihe nach:

$$5)\qquad x_0'^2 + x_1'^2 + x_2'^2 = f$$

und

$$6)\qquad \lambda_0 x_0' + \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2^2 = f,$$

so dass im ersten Falle:

$$\frac{\partial f}{\partial x_0'} = 2x_0',\quad \frac{\partial f}{\partial x_1'} = 2x_1',\quad \frac{\partial f}{\partial x_2'} = 2x_2',$$

im zweiten

$$\frac{\partial f}{\partial x_0'} = \lambda_0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_1'} = \lambda_1,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2'} = \lambda_2$$

ist, so verschwindet in beiden Fällen durch Einsetzung der vorstehenden Werte die Gleichung 2) identisch. Aus den Gleichungen 3) und 4) bestimmt man nun zunächst:

$$x_1' = \frac{\lambda_1(c_1 - \lambda_0 x_0')}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \pm \frac{\lambda_2 \sqrt{M}}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$$

und

$$x_2' = \frac{\lambda_2(c_1 - \lambda_0 x_0')}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \mp \frac{\lambda_2 \sqrt{M}}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2},$$

wo M den Wert hat:

$$M = (c - x_0'^2)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - (c_1 - \lambda_0 x_0')^2.$$

Hieraus findet man:

$$7)\qquad \lambda_2 x_1' - \lambda_1 x_2'^2 = \sqrt{M} = \sqrt{[c^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - c_1^2 - \lambda^2 x_0'^2 + 2c_1\lambda_0 x_0']}$$

wenn

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = h^2$$

gesetzt wird.

Zufolge der Gleichung 2):

$$\frac{dx_0'}{\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2} = dt$$

hat man nun:

$$\frac{dx_0'}{\sqrt{[c(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - c_1^2 - h^2 x_1'^2 + 2c_1\lambda_1 x_0']}} = dt$$

mit der Bedingung zu integrieren, dass für $t = 0$, $x_0' = x_0$, $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$ werde. Setzen wir zur Abkürzung:

$$(h^2 c - c_1^2)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = m^2,$$

so geht sie in die einfachere:

8) $$\frac{h\,dx_0'}{\sqrt{m^2 - (h^2 x_0' - c_1\lambda_0)^2}} = dt$$

über, woraus man durch Quadratur erhält:

9) $$\frac{1}{h}\arcsin\frac{h^2 x_0' - c_1\lambda_0}{m} = t + c',$$

wo c' eine weitere Konstante bedeutet. Aus Gleichung 9) folgt weiter:

10) $$h^2 x_0' - c_1\lambda_0 = m\sin h(t + c')$$

und daher:

11) $$\sqrt{m^2 - (h^2 x_0' - c_1\lambda_0)^2} = m\cos h(t + c').$$

Nun ist aber wegen 2) und 8):

$$\frac{h}{\sqrt{m^2 - (h^2 x_0' - c\lambda_0)^2}} = \frac{1}{\lambda_2 x_1' - \lambda_1 x_2'},$$

also

12) $$m\cos h(t + c') = h(\lambda_2 x_1' - \lambda_1 x_2').$$

Für $t = 0$ findet sich aus 10) und 12):

13) $$\begin{cases} m\sin hc' = h^2 x_0 - c_1\lambda_0, \\ m\cos hc' = h(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2). \end{cases}$$

Die Entwickelung des Ausdruckes $\sin h(t + c')$ ergiebt:

$$h^2 x_0' - c_1\lambda_0 = m\sin ht\cos hc' + m\cos ht\sin hc',$$

folglich mit Berücksichtigung von 13):

$$h^2 x_0' - c_1\lambda_0 = h(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)\sin ht + (h^2 x_0 - c_1\lambda_0)\cos ht,$$

woraus:

$$h^2 x_0' = h^2 x_0\cos ht + c_1\lambda_0(1 - \cos ht) + h(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)\sin ht$$

folgt. Setzt man hierin für c_1 seinen Wert aus 4), so erhält man:

$$\begin{aligned} h^2 x_0' &= h^2 x_0\cos ht + \lambda_0(\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(1 - \cos ht) + h(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)\sin ht \\ &= x_0[\lambda_0^2(1 - \cos ht) + h^2\cos ht] + x_1[\lambda_0\lambda_1(1 - \cos ht) + h\lambda_2\sin ht] \\ &\quad + x_2[\lambda_0\lambda_2(1 - \cos ht) - h\lambda_1\sin ht], \end{aligned}$$

woraus sich ohne Mühe die erste Gleichung in 8):

$$\begin{aligned} x_0' = x_0\left(1 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\frac{1 - \cos ht}{h^2}\right) &+ x_1\left(\lambda_0\lambda_1\frac{1 - \cos ht}{h^2} + \lambda_2\frac{\sin ht}{h}\right) \\ &+ x_2\left(\lambda_0\lambda_2\frac{1 - \cos ht}{h^2} - \lambda_1\frac{\sin ht}{h}\right) \end{aligned}$$

wieder ableiten lässt.

III. Um das System der Differentialgleichungen:

$$1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_0'}{dt} = \lambda_2 x_1' - \lambda_1 x_2', \\ \dfrac{dx_1'}{dt} = \lambda_0 x_2' - \lambda_2 x_0', \\ \dfrac{dx_2'}{dt} = \lambda_1 x_0' - \lambda_0 x_1' \end{cases}$$

nach der d'Alembertschen Methode zu integrieren, hat man zu setzen:

$$2)\qquad \alpha_0 x_0' + \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' = u',$$

$$3)\qquad \frac{du'}{dt} = \varrho u'$$

worin α_0, α_1, α_2, ϱ noch näher zu bestimmende Konstante sind. Integriert man die Gleichung 2) und bestimmt die Integrationskonstante so, dass für $t = 0$, $u' = u_0' = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ wird, so erhält man:

$$4)\qquad u' = u'_0 e^{\varrho t} = (\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) e^{\varrho t}.$$

Aus 2) und 3) ergiebt sich:

$$5)\qquad \alpha_0 \frac{dx_0'}{dt} + \alpha_1 \frac{dx_1'}{dt} + \alpha_2 \frac{dx'_2}{dt} = \varrho(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2),$$

welche durch Einsetzung der Werte von $\frac{dx_0'}{dt}$, $\frac{dx_1'}{dt}$, $\frac{dx_2'}{dt}$ aus 1) in

$$\begin{cases} \alpha_0(\lambda_2 x_1' - \lambda_1 x_2') + \alpha_1(\lambda_0 x_2' - \lambda_2 x_0') + \alpha_2(\lambda_1 x_0' - \lambda_0 x_1') \\ \qquad = \varrho(\alpha_0 x_0' + \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2') \end{cases}$$

übergeht. Wegen der Unabhängigkeit der Variablen x' zerfällt diese Gleichung in die drei anderen:

$$6)\qquad \begin{cases} \varrho\ \alpha_0 + \lambda_2 \alpha_1 - \lambda_1 \alpha_2 = 0, \\ -\lambda_2 \alpha_0 + \varrho\ \alpha_1 + \lambda_0 \alpha_2 = 0, \\ \lambda_1 \alpha_0 - \lambda_0 \alpha_1 + \varrho\ \alpha_2 = 0, \end{cases}$$

welche nur dann nebeneinander bestehen können, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} \varrho & \lambda_2 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \varrho & \lambda_0 \\ \lambda_1 & -\lambda_0 & \varrho \end{vmatrix} = \varrho^3 + \varrho h^2, \quad h^2 = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2$$

gleich Null ist. Die Gleichung

$$\varrho^3 + \varrho h^2 = 0$$

hat drei Wurzeln, $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = ih$, $\varrho_3 = -ih$ und es ist:

$$8)\qquad \alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 = \varrho\lambda_1 + \lambda_0\lambda_2 : \lambda_1\lambda_2 - \varrho\lambda_0 : \varrho^2 + \lambda_2^2.$$

Nun ist nach 4):

$$9)\qquad u' = (\alpha_0 x_0' + \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2') = (\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) e^{\varrho t}.$$

Setzt man hierin für x_0', x_1', x_2' ihre Werte:

$$\begin{aligned} x_0' &= a_{00} x_0 + a_{01} x_1 + a_{02} x_2, \\ x_1' &= a_{10} x_0 + a_{11} x_1 + a_{12} x_2, \\ x_2' &= a_{20} x_0 + a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{aligned}$$

und berücksichtigt, dass die x von einander unabhängig sind, so erhält man:

$$10)\quad \begin{cases} \alpha_0 a_{00} + \alpha_1 a_{10} + \alpha_2 a_{20} = \alpha_0 e^{\varrho t}, \\ \alpha_0 a_{01} + \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} = \alpha_1 e^{\varrho t}, \\ \alpha_0 a_{02} + \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} = \alpha_2 e^{\varrho t}. \end{cases}$$

Da nun ϱ drei verschiedene Werte hat, so haben wir im ganzen neun Gleichungen zur Bestimmung der 9 Koeffizienten a_{ik}. Man findet z. B. a_{00}, a_{10}, a_{20} aus der ersten Gleichung in 10) mit Beachtung der Gleichungen 4), wodurch sie in:

$$(\varrho\lambda_1 + \lambda_0\lambda_2)(a_{00} - e^{\varrho t}) + (\lambda_1\lambda_2 - \varrho\lambda_0)a_{10} + (\varrho^2 + \lambda_2^2)a_{20} = 0$$

übergeht, wenn man für ϱ nacheinander 0, ih, $-ih$ einsetzt:

$$\lambda_0(a_{00} - 1) + \lambda_1 a_{10} + \lambda_2 a_{20} = 0,$$

$$(ih\lambda_1 + \lambda_0\lambda_2)(a_{00} - e^{iht}) + (\lambda_1\lambda_2 + ih\lambda_0)a_{10} + (h^2 + \lambda_2^2)a_{20} = 0,$$

$$(-ih\lambda_1 + \lambda_0\lambda_2)(a_{00} - e^{-iht}) + (\lambda_1\lambda_2 + ih\lambda_0)a_{10} + (-h^2 + \lambda_2^2)a_{20} = 0.$$

Nach Beseitigung der imaginären Ausdrücke findet man die drei reellen Gleichungen:

$$\lambda_0 a_{00} + \lambda_1 a_{10} + \lambda_2 a_{20} = \lambda_0,$$

$$\lambda_0\lambda_2 a_{00} + \lambda_1\lambda_2 a_{10} - (h^2 - \lambda_2^2)a_{20} = \lambda_0\lambda_2 \cos ht - h\lambda_1 \sin ht,$$

$$h\lambda_1 a_{00} - h\lambda_0 a_{10} = h\lambda_1 \cos ht + \lambda_0\lambda_2 \sin ht.$$

Die Auflösung dieser drei Gleichungen ergiebt:

$$a_{00} = \cos ht + \lambda_0^2 \frac{1 - \cos ht}{h^2},$$

$$a_{10} = \lambda_0\lambda_1 \frac{1 - \cos ht}{h^2} - \lambda_2 \frac{\sin ht}{h},$$

$$a_{20} = \lambda_0\lambda_2 \frac{1 - \cos ht}{h^2} + \lambda_1 \frac{\sin ht}{h}$$

übereinstimmend mit den in I. und II. gefundenen Resultaten. Auf dieselbe Weise findet man aus der zweiten und dritten Gleichung in 10 die richtigen Werte von a_{01}, a_{11}, a_{21}; a_{02}, a_{12}, a_{22}.

(Fortsetzung folgt.)

Theoretische und experimentelle Untersuchungen über die Kreiselbewegungen der rotierenden Langgeschosse während ihres Fluges.

Von

Prof. Dr. Carl Cranz

in Stuttgart.

A. Einleitung.

Die von Magnus* auf Grund der Kreiseltheorie aufgestellte und durch zahlreiche Versuche unterstützte Erklärung für die nicht unbeträchtliche regelmässige Rechts- bezw. Linksabweichung von Langgeschossen, die aus Gewehren oder Geschützen mit rechts- bezw. linksgewundenen Zügen verfeuert werden, ist nahezu** allgemein angenommen. Darüber jedoch, nach welchen Gesetzen die mitunter mit dem blossen Auge wahrzunehmenden Kreiselbewegungen der Geschossaxe vor sich gehen, welcher Art diese Bewegungen sind, welche Wirkungen sie zur Folge haben, herrscht eine grosse Meinungsverschiedenheit.

a) Magnus selbst, sowie später Kummer*** — Letzterer aus Anlass seiner grundlegenden Untersuchungen über die Komponenten des Luftwiderstands und die Lage des Angriffspunkts auf der Geschoss-

* Magnus, „Über die Abweichung der Geschosse". Abh. d. Berl. Akad. 1852 u. Pogg. Annal. LXXXVIII, 1; auch bes. ersch., Verlag von Dümmler, Berlin 1860. Die Erklärung von Magnus ist kurz die folgende: Da das Langgeschoss rasch rotiert und die Resultante der Luftwiderstände bei der üblichen Form der Geschosse nicht im Schwerpunkt, sondern vor demselben auf der Axe angreift, so st Anlass zu einer Präzessionsbewegung der Axe um den Schwerpunkt gegeben; die Axe beschreibt einen Kegel um die Richtung des Luftwiderstandes herum; also hebt sich anfangs die Geschossspitze und wendet sich nach rechts. Folglich wirkt der Luftwiderstand mehr gegen die linke Seite des Geschosses, wie gegen ein schiefgehaltenes Brett oder ein Segel und drückt das Geschoss aus der anfänglichen Schussebene nach rechts heraus.

** Betreffs abweichender Meinungsäusserungen vergl.: a) Hilken und Zwenger, „Die Erziehung der Einjährig-Freiwilligen". Verlag von Liebel 1894, S. 79, Nr. 3. — b) A. Dähne, „Neue Theorie der Flugbahnen von Langgeschossen". Berlin 1888 bei Eisenschmidt. — c) J. Altmann, österr. Artill.-Lieutenant, „Erklärung und Berechnung der Seitenabweichung rotierender Geschosse". Wien 1897 bei Seidel. Darüber siehe weiter unten.

*** Abh. d. Berl. Akad. Mai 1875; Nachtrag 1876.

axe —, sprechen die Vermutung aus, selbst bei grossen Flugzeiten gehe die Präzessionsbewegung der Geschossaxe so langsam vor sich, dass höchstens eine halbe Pendelung möglich sei, dass also die Geschossspitze nur Zeit habe, sich zu heben, rechts zu wenden und etwa noch zu senken, bevor das Geschoss am Boden aufschlägt. Eine grosse Zahl militärischer Schriftsteller äusserten sich in ähnlicher Weise. In einer neueren und besonders viel benützten „Waffenlehre"* findet sich die Bemerkung: „. . . die Geschwindigkeit dieser kegelförmigen Pendelung ist so gering, dass die Geschossaxe auch bei den grössten Schussweiten bezw. Flugzeiten keine volle Umdrehung, sondern in der Regel nur eine Schwingung von weniger als 90 bis höchstens 180 Grad macht. Die Geschossspitze bleibt stets auf der rechten Seite der Schussebene und durchläuft bei grossen Schussweiten oder kleinen Erhöhungen eine oder mehrere Kurven cykloidischer Art um die Berührende der Flugbahn, bei kleinen Schussweiten oder grossen Erhöhungen dagegen nur einen Bruchteil einer Cykloide. (Anmerkung: „Die Vorgänge, Ursachen und Wirkungen der kegelförmigen Geschosspendelung sind so verwickelt und überdies grossenteils noch so wenig aufgeklärt, dass hier nur diese allgemeine Andeutung derselben gegeben werden kann. Es ist zu hoffen, dass die photographischen Augenblicks-Aufnahmen fliegender Geschosse und der Luftbewegungen in ihrer nächsten Umgebung — Mach, Salcher, Boys —, sowie die Herstellung von Lichtbildern in der inneren Höhlung fliegender Geschosse — Neesen — zur Klärung der noch ungelösten Fragen wesentlich beitragen werden.). . ." Diese Angaben sind in Übereinstimmung mit den Resultaten analytischer Berechnungen, wie sie u. a. von zwei hervorragenden Ballistikern, Oberst Ritter von Wuich** und Hauptmann Haupt*** ausgeführt wurden. von Wuich erhält als Resultat: „Bei Rechts-(Links-)Rotation und Luftwiderstandsmittelpunkt vor (hinter) dem Schwerpunkt, bezw. Rechts-(Links-)Rotation und Luftwiderstandsmittelpunkt hinter (vor) dem Schwerpunkt befindet sich die Geschossspitze stets rechts (bezw. links) von der durch die Bahntangente gelegten Vertikalebene."

Stellt nämlich (Fig. 1) S den Schwerpunkt des Geschosses und die Ebene durch S und $T_0 T_1 T_2 \ldots$ die Vertikalebene dar, welche bei festgedachtem Schwerpunkt S durch die aufeinander folgenden Flugbahn-

---

* R. Wille, General z. D., „Waffenlehre", Berlin 1896 bei Eisenschmidt, S. 256.

** N. v. Wuich, „Lehrbuch der äusseren Ballistik", Wien 1886 bei Seidel", S. 360 flg.; bes. vergl. S. 418.

*** P. Haupt, Hauptmann à l. s. des Generalstabs d. deutschen Armee, „Mathematische Theorie der Flugbahnen gezogener Geschosse", Berlin 1876, Vossische Buchhandlung, vergl. besonders S. 97. Über die weitere Litteratur des Gegenstandes vergl. Cranz, „Kompendium der theoretischen äusseren Ballistik", Leipzig 1896 bei B. G. Teubner, S. 456 bis 458.

Tangenten ST_0, $ST_1 \ldots$ gelegt ist, so sind die aufeinander folgenden Lagen der Geschosslängsaxe durch ST_0, SA_1, SA_2, $SA_3 \ldots$ repräsentiert, so dass die Geschossspitze die Raumkurve $T_0 A_1 A_2 A_3 \ldots$ beschreibt; oder, was dasselbe ist, denkt man sich (Fig. 2) eine Zeichnungsebene senkrecht zur Tangente ST der Flugbahn gelegt und die Bahn der Geschossspitze auf diese im Raum veränderliche Zeichnungsebene projiziert, so beschreibt bei Rechtsrotation die Spitze (für einen Beobachter, der dem Geschoss folgen würde) die Kurve 1234...; der Beobachter würde somit die Geschossspitze in Spirallinien sich immer weiter von der Vertikalebene durch die Tangente entfernen sehen.

Zu einem etwas andern Ergebnis wird Haupt geführt, der dasselbe wie folgt zusammenfasst: „Die Geschossspitze, welche zuerst

Fig 1.

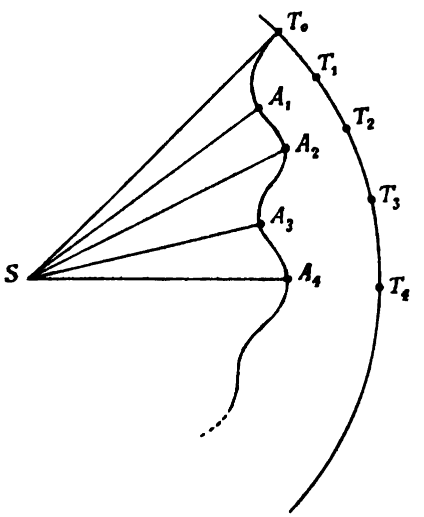
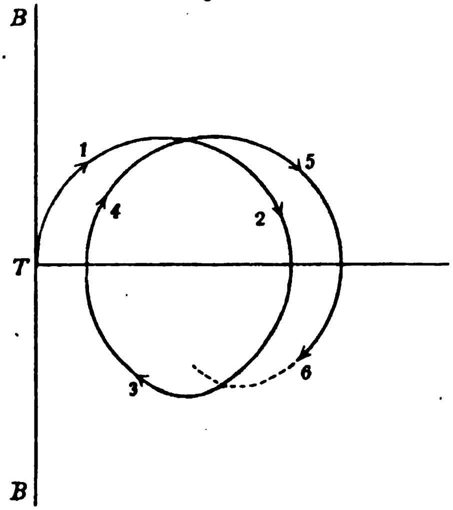


Fig. 2.

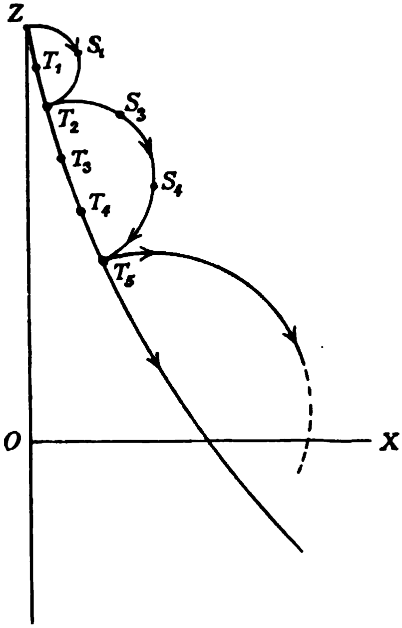


in der Tangente der Flugbahn lag, weicht, nachdem letztere angefangen hat sich zu senken, nach rechts aus und beschreibt, immer rechts bleibend, eine oder mehrere Kurven von cykloidischer Form um dieselbe, bei geringen Entfernungen aber oder hohen Elevationen der Mörser nur einen Bruchteil einer solchen Kurve. Am Ende einer jeden Cykloide treffen Geschossspitze und Tangente der Flugbahn wieder zusammen. Je grösser die Geschwindigkeit der Hauptaxe ist, desto schneller durchläuft sie natürlich diese Cykloiden und desto geringer ist ihr mittlerer Ausschlag. Abgesehen von dieser Bewegung in grossen cykloidenförmigen Bogen vibriert die Geschossspitze in fast unendlich kleinen Cykloiden auf und nieder.“ Durch die Figur 3, welche dem Hauptschen Werke mit geringen Abänderungen entnommen ist, wird das Ergebnis weiterhin erläutert; XOZ ist eine vertikale Zeichnungsebene, senkrecht zu der Vertikalebene durch die Anfangstangente der

Flugbahn gelegt; OX nach rechts, OZ nach oben gerichtet; der Beobachter ist hinter dem Geschütz zu denken; von der Vorwärtsbewegung des Geschossschwerpunkts ist abstrahiert. Die Tangente neigt sich mehr und mehr, zugleich weicht der Geschossschwerpunkt nach der rechten Seite ab; beides ist durch die Kurve $ZT_1T_2T_3\ldots$ angedeutet; die Linie $ZS_1T_2S_3S_4T_5$ etc. stellt dann die Bahn der Geschossspitze dar. In den Punkten T_2 und T_5 etc. fallen Tangente und Geschossaxe zusammen.

Sind die vorstehend geschilderten Anschauungen richtig, findet die Geschossspitze niemals Zeit, einen vollen Umlauf zu vollenden (Magnus, Kummer) oder bleibt die Geschossspitze überhaupt stets auf der rechten Seite der Flugbahnvertikalebene (Mayevski, Haupt, v. Wuich), so versteht man leicht die Thatsache, dass später nicht wieder Linksabweichung eintritt.

Fig. 3.



Berechnet man aber anderseits mit dem bekannten Ausdruck der Kreiseltheorie, der in anderer Form auch von jenen Ballistikern gegeben wird, die Periode einer Geschosspendelung, so findet man, dass in vielen Fällen, z. B. denen der schweren und der leichten Feldkanone, auf dieselbe Flugbahn zahlreiche Pendelungen kommen müssen.

Auch mit den vorhandenen Beobachtungen scheinen jene Anschauungen keineswegs übereinzustimmen:

b) Von veröffentlichten Beobachtungen über Geschosspendelungen liegen jetzt mehrere vor.

Schon aus dem Jahre 1861 führt Rutzky* folgendes an: „... Bei den Schiessversuchen hat es sich ferner noch gezeigt, dass die als Brandgeschosse hergerichteten und der Form nach den andern ganz gleichen Spitzgeschosse mit der Spitze während des Flugs eine desto grössere Spirale beschrieben, je näher sie dem Ende der Flugbahn kommen, was durch den Feuerstrahl, welcher aus den gegen die Spitze befindlichen Öffnungen hervorbrach, und durch den dadurch verursachten Rauch deutlich zu sehen war“.

* Rutzky, „Bewegung und Abweichung der Spitzgeschosse“, 1861, S. 10. Eine ähnliche Bemerkung siehe z. B. bei Hentsch, Ballistik der Handfeuerwaffen, 1873, S. 25.

An der Granate des 21 cm-Mörsers sind die vollen Pendelungen sicherlich öfters mit dem blossen oder dem bewaffneten Auge gesehen worden.

Die einzige exakte Bestimmung der konischen Geschosspendelung, die bisher mit Erfolg durchgeführt worden ist — durch Professor Dr. Neesen* an der Artillerieschule in Berlin-Charlottenburg —, deutet ebenfalls auf mehrere volle konische Pendelungen während desselben Flugs hin. Danach besteht der Weg der Geschossspitze bezüglich des Schwerpunktes im allgemeinen darin, dass anfangs die Spitze sich hebt, dann rechts und abwärts wendet, später wieder sich links wendet und hebt etc. Es wäre nur zu wünschen, dass diese Versuche fortgesetzt und die Kaliber, Geschosslängen, Anfangsgeschwindigkeiten variiert würden.

In neuester Zeit hat Hauptmann Heydenreich** ein umfangreiches und wertvolles Beobachtungsmaterial über den Einfluss der Geschossrotation (ohne mathematische Theorie) gegeben. Speziell über die Geschosspendelungen sagt er hierbei u. a. folgendes:

S. 95: „Die Spitze des Geschosses weicht zunächst nach derjenigen Seite ab, nach welcher die Drehung um die Längsaxe erfolgt, also bei Rechtsdrall nach rechts, bei Linksdrall nach links. In der beständigen Fortsetzung dieses Vorgangs beschreibt sie schliesslich eine schraubenförmige Linie um die Flugbahn des Schwerpunkts herum. Diese schraubenförmigen Drehungen, welche noch von einer Reihe von Nebenschwingungen der Geschossaxe begleitet sind, nennt man konische Pendelungen des Geschosses. Nach Schluss einer jeden Pendelung kehrt dabei die Geschossspitze in eine Lage oberhalb der Flugrichtung des Schwerpunkts zurück. Diese Pendelungen beginnen in der Regel klein und rasch und werden schliesslich grösser und langsamer. Unter sonst gleichen Verhältnissen sind sie um so stärker, je grösser die Geschwindigkeit des Geschosses und die Entfernung des Schwerpunkts von der Angriffsrichtung des vereinigten Luftwiderstandes ist; um so kleiner, je grösser der Drall des Geschützes ist ...; grössere Pendelungen ergeben geringere Trefffähigkeit.“ S. 98 (Anmerkung) wird ein Versuch mit 4 bis 5 Kaliber langen Geschossen z. B. aus einer Kanone mit 500 m Anfangsgeschwindigkeit beschrieben: „...Die Pendelungen waren überaus stark und schnell, etwa 4 bis 5 in der Sekunde; das

* Neesen, „Photographische Aufzeichnung und Theorie der Geschosspendelung“, Archiv für die Artillerie- und Ingenieur-Offiziere 1889, S. 68; 1892, S. 476 und 1894. Diese höchst sinnreiche Methode besteht darin, dass in dem Geschoss selbst eine photographische Platte angebracht ist, auf welcher durch eine Öffnung im Geschossmantel hindurch das Sonnenlicht zeichnet.

** Heydenreich, Hauptmann à l. s. d. kgl. sächs. 1. Feld-Art. Reg. 12, kommand. als Mitglied zur Artillerie-Prüfungskommission. „Die Lehre vom Schuss und Schusstafeln“, auf dienstliche Veranlassung bearbeitet. I. und II. Berlin 1898. Verlag von E. S. Mittler & Sohn.

Geschoss glich von hinten gesehen einer rasch sich drehenden Scheibe von wechselndem Durchmesser. Ein Geschoss überschlug sich sogar etwa 1000 m vor der Mündung..." S. 104 und 105 wird sodann beschrieben, wie „die" Pendelungen das Geschoss aus der Schussebene seitlich ablenken. „Die Ablenkungswerte nehmen im allgemeinen mit einer Verlängerung des Geschosses ab und mit einer Verstärkung des Dralls zu."

Hier scheinen ebenfalls Widersprüche vorzuliegen:

Die Pendelungen sollen um die Flugbahn herum erfolgen, gehen dabei unter Umständen sehr schnell vor sich, so dass das Geschoss wie eine Scheibe erscheinen kann. Wie sind dann Seitenabweichungen des ganzen Geschosses etwa nur nach rechts möglich?

Ferner, die Pendelungen sind „um so stärker, je grösser die Geschwindigkeit; um so kleiner, je grösser der Drall ist"; anderseits sind die Abweichungen „um so grösser, je stärker der Drall" (und je grösser die Geschwindigkeit) ist. Man müsste also schliessen: je kleiner die Pendelungen sind, um so grösser sind die Abweichungen? Also je kleiner die Ursache, um so grösser die Wirkung? Wie können dann die Pendelungen die Abweichungen verursachen?

Mit den folgenden Versuchen und Berechnungen hoffe ich diese Widersprüche als nur scheinbar entwirrt und gezeigt zu haben, dass und wie die erwähnten verschiedenartigen Anschauungen unter sich und mit der Theorie in Einklang gebracht werden können.

Die Lösung der Widersprüche liegt darin, dass bisher mannigfach verschiedene Wirkungen derselben Ursache zugeschrieben wurden.*

Man hat zweierlei Arten von Geschosspendelungen zu unterscheiden, welche beide ganz verschiedenen Gesetzen unterworfen sind und zwei verschiedene Gruppen von Wirkungen zur Folge haben; die Präzessionsbewegungen und die Nutationsbewegungen.

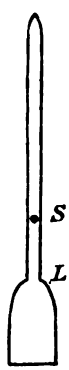
B. Versuche.

1. Zunächst lag mir daran, die Geschosspendelungen, welche bei Artilleriegeschossen nur selten und nur unter bestimmten Umständen genau, bei Infanteriegeschossen wohl niemals beobachtet wurden, für das blosse Auge wahrnehmbar zu machen. Ich versuchte dies vor-

* z. B. die (zweifellos richtigen) Heydenreichschen Beobachtungsergebnisse sind folgendermassen richtig zu deuten: Die auf S. 95 erwähnten Pendelungen, welche die Trefffähigkeit beeinflussen, sind nicht identisch mit den S. 104 erwähnten, welche die Seitenabweichung bewirken. Die von S. 95 können, wenn man will, als „Nebenschwingungen" von denjenigen S. 104 angesehen werden, schwerlich aber kommen zu denen S. 95 weitere Nebenschwingungen hinzu. Diejenigen von S. 95 erfolgen meistens nicht um die Tangente herum, vielmehr diejenigen von S. 104.

erst durch Verlängerung des 11 mm Geschosses, welches dem früheren deutschen Infanteriegewehr M./71 zugehörte; es lassen sich ja bekanntlich bei günstiger Abend- oder Morgenbeleuchtung selbst die Infanteriegeschosse in ihrem ganzen Flug mitunter mit dem blossen Auge verfolgen. Da bei dem normalen Geschoss die Pendelungen mutmasslich sehr schnell vor sich gehen, so suchte ich die Pendelungen zu verlangsamen; es wurden kräftige Messingstäbe von 6 mm Kaliber und von 3, 5, 7 bis 21 cm Länge in die Bleigeschosse eingelötet (Fig. 4) und diese verlängerten Geschosse verfeuert. Trotzdem, dass drei Beobachter* von verschiedenen Standpunkten aus aufmerksam den Flug der Geschosse verfolgten, war nur wenig von denselben zu sehen; die Gesichtswinkel wurden in zu kurzer Zeit ungünstig klein. Dagegen vermochte ich von einer Verdeckung aus, über welche die Geschosse wegflogen, sehr deutlich die Pendelungen mit dem Gehör wahrzunehmen; dieselben hörten sich etwa wie scharfe kräftige Flügelschläge eines vorüberfliegenden Vogels an. Je länger die Geschosse gewählt wurden, um so langsamer erfolgten die regelmässigen Stösse, deren Anzahl pro Sekunde mit der Uhr geschätzt werden konnte und besser mit der aus der Theorie sich ergebenden Formel für die Periode T_1 der Nutationsbewegungen, als mit derjenigen für die Periode T der Präzessionsbewegungen übereinstimmte. (Obgleich die Züge des Infanteriegewehres M./71 rechtsgewunden sind, zeigte sich dabei starke Linksabweichung; es lässt sich dieser Umstand leicht damit erklären, dass der Angriffspunkt der Luftwiderstandsresultanten wegen der besonderen Form dieser verlängerten Geschosse hinter dem Schwerpunkt S in L liegen musste.)

Fig. 4.



War nun bei diesen Pendelungen, die gehört wurden, der Sinn linksläufig, so handelte es sich der Kreiseltheorie gemäss um Präzessionsbewegungen, also um diejenigen konischen Pendelungen, welche den bekannten langsamen Bewegungen des Kreisels, sowie dem sehr langsamen Umlauf der Erdaxe um die Normale zur Ekliptik in rund 26000 Jahren entsprechen; war dagegen der Sinn rechtsläufig, so waren es ohne Zweifel Nutationsbewegungen; und da bezüglich aller Geschosspendelungen, über deren Beobachtung ich Zahlenangaben erhalten konnte, insbesondere auch bezüglich der Neesenschen Versuche die Rechnung zeigte, dass die beobachtete Anzahl von Pendelungen pro Sekunde weit besser der Formel für T_1 als der für T entspricht, so lag die Vermutung nahe, dass dies bei kleinen Geschwindigkeiten allgemein zutreffe, dass diejenigen Geschosspendelungen, welche sich der Beobachtung durch das Auge zunächst darbieten und

* Den Herren Prof. Lachenmaier und Dr. Vogt bin ich für ihre Mithilfe bei diesen Versuchen (Nr. 1 u. 2) zu Dank verpflichtet.

welche auch Herr Neesen beobachtet hat, meist Nutationsbewegungen, nicht Präzessionsbewegungen sind. Es war deshalb von Wert, die Pendelungen wirklich zu sehen.

2. Es wurde bei Nacht geschossen; die erwähnten verlängerten Geschosse des Infanteriegewehrs M./71 waren an ihrem vorderen Ende mit einem Feuerwerkskörper (Schwärmer), oder aber — dem Ratschlag eines Bekannten zufolge — mit einem Drahtnetzchen versehen, das ein Stück Phosphor enthielt; die Schwärmer wurden entzündet und sodann die Geschosse abgefeuert, der Phosphor entzündete sich beim Flug von selbst. Die Pendelungen traten zwar deutlich hervor, und es sind beide Methoden für die Gewinnung erster allgemeiner Anhaltspunkte bei der Beurteilung von Geschosspendelungen oder für die Demonstration einer Flugbahn zu empfehlen; allein, da nur die Geschossspitze sichtbar war, so lag keine Gewissheit darüber vor, ob und wann das Geschoss sich nach hinten überschlagen habe. Aus diesem Grunde kehrte ich zur Beobachtung bei Tage zurück.

3. Auf Grund der Formel für T_1 konstruierte ich ein kleines gezogenes Mörsermodell der Art, dass bei einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 der Translationsbewegung von 20 bis 30 m/sec 1 bis 2 Pendelungen pro Sek. wahrnehmbar sein mussten, falls sich überhaupt Pendelungen zeigten. Länge des Mörsers 30 cm; äusserer Durchmesser 5 cm; die Drall-Länge musste sehr klein gewählt werden — 7 cm — um genügende Rotationsgeschwindigkeit r um die Längsaxe des Geschosses zu erzielen, dagegen die Geschosslänge sehr bedeutend, damit das Verhältnis $A:C$ genügend gross war (C Trägheitsmoment um die Längsaxe, A dasselbe um eine Senkrechte zur Axe durch den Schwerpunkt); das Geschoss, das stets wieder von neuem benutzt wurde, bestand in seinem hinteren Teil aus der zum Muttergewinde des Laufs gehörigen Schraubenspindel und war vorn „ogival“ zugespitzt; es wurden verschiedene Geschosslängen verwendet, bis zu 17 Kalibern (Näheres siehe Beispiele w. u.). Die Ladung bestand aus Schiessbaumwolle,

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \cdots \text{ bis } 2 \text{ g}.$$

Die Züge waren links gewunden.

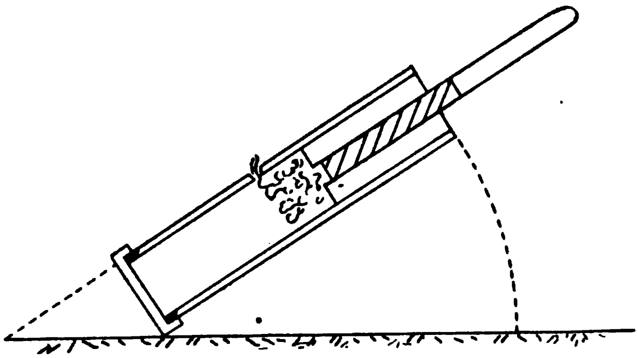
Schon die ersten Schüsse ergaben, dass die Geschosspendelungen wegen der kleinen Translationsgeschwindigkeit aufs deutlichste mit dem Auge wahrnehmbar und zu verfolgen und ihre Zahl pro Sek. mit Hilfe eines mit Hemmungsvorrichtung versehenen Chronometers, der noch $\frac{1}{5}$ Sek. anzeigte, leicht annähernd zu bestimmen war; die Zeit einer vollen Pendelung änderte sich nämlich im Verlauf derselben Flugbahn nicht wahrnehmbar, wegen der kleinen Schussweite von höchstens 50 m und der kleinen Anfangsgeschwindigkeit.

Mit diesem Mörsermodell wurden ca. 100 Schiessversuche ausgeführt und Beobachtungen angestellt, die zum Teil im Folgenden auf-

geführt sind; jede einzelne Nummer ist ein Beweis dafür, dass diejenigen Geschosspendelungen, welche bei grossem Drallwinkel und kleiner Anfangsgeschwindigkeit zunächst in die Erscheinung treten, nichts anderes sind als die Nutationen.

Da naturgemäss ohne weitere Hilfsmittel an dem fliegenden Geschoss keine exakten absoluten Messungen ausgeführt werden können,

Fig. 5.



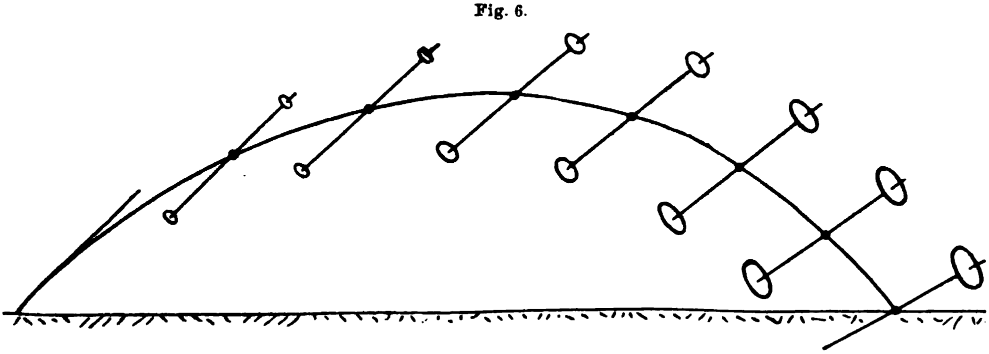
so stellte ich, stets paarweise, Vergleichsversuche an auf Grund der Formeln (s. w. u.) für die Periode T und Amplitude A der Präzessionsbewegungen:

$$\text{I)}\quad T = \frac{2\pi \cdot Cr}{M}; \qquad \text{II)}\quad A = \sqrt{f^2 + (\vartheta_0 - \omega)^2},$$

wo $f = \frac{Cr}{M} \cdot \frac{g}{v_x}$ und für die Periode T_1 und Amplitude A_1 der Nutationsbewegungen:

$$\text{III)}\quad T_1 = \frac{2\pi \cdot A}{\sqrt{C^2 r^2 - 4AM}}; \quad \text{IV)}\quad A_1 = \frac{2 \cdot s_0}{\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}};$$

Fig. 6.



Hier ist M das Luftwiderstandsmoment bezüglich des Schwerpunkts $= W \cdot h_1$, wo h_1 den Abstand zwischen Schwerpunkt und Angriffspunkt L der Luftwiderstandsresultanten auf der Geschossaxe darstellt, v_x die horizontale Geschwindigkeit des Schwerpunkts, s_0 ein seitlicher

Anfangsstoss, der auf die Axe an der Mündung ausgeübt wird, $\vartheta_0 - \omega$ der Winkel zwischen der Anfangsrichtung der Flugbahntangente und deren Richtung zur Zeit t.

Es wurden verschiedene Versuchsanordnungen getroffen, bei denen die Grössen A, C, r etc. verändert wurden; solche Versuchspaare wurden bevorzugt, welche bei derselben Änderung einer Grösse entgegengesetzte Änderung von T und T_1 bezw. von A und A_1 geben und damit eine Entscheidung über die Frage „Nutation oder Präzession?“ herbeiführen mussten.

a) Schüsse unter Abgangswinkel 45°; Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 21$ m. Die Geschossbahn wurde sowohl von hinten als von der Seite betrachtet. Es zeigte sich, dass die Geschossaxe durchschnittlich sich selbst parallel weiterging, nur gegen das Ende der Flugbahn sich die Axe mehr nach dem Horizont zuneigte. Hierbei beschrieb um den Schwerpunkt als Spitze die Geschossaxe Doppelkegel im Sinne des Dralls, also linksläufig; die Geschossspitze bewegte sich in zahlreichen kreisähnlichen Bogen (in der Fig. 6 angedeutet). Die Amplituden dieser Bogen zur selben Zeit wechselten von Schuss zu Schuss nicht wenig, zwischen ca. 5° und 30°; im Verlauf derselben Flugbahn nahm stets die Amplitude der Pendelungen zu. Die Geschossspitze blieb bei diesen Pendelungen durchweg über der Flugbahntangente; stets schlug deshalb das Geschoss zuerst mit dem hinteren Ende auf dem Boden auf; einmal blieb das Geschoss sogar in dieser Lage im Boden stecken, die Geschossspitze schief nach oben gerichtet.

Die Dauer einer Präzessionspendelung ist berechnet $T = 22$ Sek., die Dauer einer Nutationspendelung berechnet $T_1 = 0{,}65$ Sek., beobachtete Dauer 0,5 bis 0,75 Sek. Es handelt sich somit um Nutationen; die sehr langsame Präzession äusserte sich offenbar nur darin, dass die Mittellage der Geschossaxe im Verlauf des Flugs sich etwas, um ca. 15°, nach dem Horizont zu neigte, die Spitze des Geschosses sich senkte.

Bei Schüssen unter anderen Abgangswinkeln dieselbe sekundliche Zahl von Pendelungen.

b) Auch bei Schuss vertikal aufwärts, wo zur Präzessionsbewegung kein Anlass gegeben war, blieb die Zahl und Amplitude der Nutationen dieselbe.

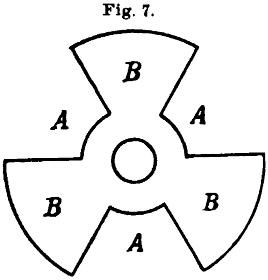
c) Schüsse mit zwei gleich schweren, aber verschieden langen Geschossen gleicher Anfangsgeschwindigkeit (Ansatz an dem Geschoss einerseits von Eisen, anderseits von Holz, gleichen Kalibers). Die Verlängerung des Geschosses erzeugt nach Formel I grösseres h_1 in M, also kleineres T; nach III, wo im Nenner das erste Glied sehr überwiegt, wird durch die Verlängerung kleineres $C:A$, also grösseres T_1 erzeugt. Die Beobachtung ergab beim kürzeren Geschoss die Pendelungsperiode $\frac{5}{9}$ Sek., beim längeren $\frac{5}{7}$ Sek., entsprechend Formel III.

d) Der Geschossschwerpunkt wurde variiert. Erster Schuss mit Schwerpunkt in der Geschossmitte (ebenda eine verschiebbare Bleimasse), an der Geschossspitze eine kleine Korkscheibe, damit sicher der Luftwiderstand an der Spitze angreift; zweiter Schuss, Bleimasse und Korkscheibe vertauscht. Dadurch war beide mal h_1 nahezu gleich gross, aber von entgegengesetztem Vorzeichen; ferner das zweite Mal A grösser als das erste Mal, die andern Grössen unverändert. Waren also die Pendelungen Präzessionen, so musste nach I deren sekundliche Zahl unverändert bleiben, aber der Umlaufssinn wurde umgekehrt; waren es dagegen Nutationen, so blieb der Sinn unverändert, dagegen wurde die Umlaufszeit grösser.

Beobachtet wurde das letztere.

e) Trägheitsmoment C variiert. An der Geschossspitze wurden der Reihe nach drei gleich schwere Korkscheiben von immer grösserem Durchmesser senkrecht angebracht und je mit gleicher Ladung unter 45° geschossen; in I) wächst dann sowohl C als M proportional dem Quadrat des Radius, also bleibt T konstant; in III) wird C grösser, also T_1 successiv kleiner; beobachtet wurde letzteres; die Pendelungen erfolgten immer schneller, waren bei der breitesten Scheibe von 6 cm Durchmesser kaum mehr zu zählen. Dasselbe bei vertikalem Schuss.

Fig. 7.



f) Nur M variiert. Um einen besonders überzeugenden Vergleichsversuch zu erzielen, bei welchem die Formeln I) und II) entgegengesetzte Resultate liefern mussten und nur eine einzige Grösse, der Luftwiderstand in M, sich ändert, wurden an der Spitze des Geschosses senkrecht zur Axe zugleich zwei Metallscheiben von der Form der Figur 7 aufgesteckt. Erstens wurde die eine so gestellt, dass bei beiden Scheiben die Flügel B übereinanderstanden, und geschossen; das zweite Mal die eine so gedreht, dass die Flügel B der einen über den Ausschnitten A der andern standen, folglich die volle Scheibe sich dem Luftwiderstand entgegensetzte. Nach I) wurde im zweiten Fall der Nenner M gegenüber dem ersten Fall vergrössert (im Verhältnis 3:2), also T im selben Verhältnis verkleinert. Nach III) wurde der Nenner ein wenig verkleinert, T_1 vergrössert. Thatsächlich zeigte sich das letztere (15 Pendelungen in 5 Sek., gegen vorher 17). Dasselbe bei schiefem und vertikalem Schuss.

g) Es wurde der Reihe nach mit $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \cdots$ 2 g Ladung geschossen (schief und vertikal), die Zahl der Pendelungen pro Sekunde nahm zu, aber auch die Amplitude; nach der Formel II) für Präzessionsbewegung würde die Amplitude A abnehmen, nach IV) nimmt A_1 mit s_0 zu; es fand sich bei vertikalem Schuss:

bei $\frac{1}{2}$ g Ladung, Amplit. i. höchst. Punkt ca. 5^0, b. Aufschl. am Boden ca. 10^0,
„ $\frac{3}{4}$ „ „ „ . „ „ 20^0, „ „ „ 35^0,
„ $\frac{5}{4}$ „ „ „ „ über 90^0, „ „ grosse Ampl.,
„ 2 „ „ Überschlagen des Geschosses bald nach Verlassen des Laufs, Herabfallen unter vollen Rotationen um den Schwerpunkt in nahezu vertikaler Ebene.

h) In einem hohen Saal, der oben eine Öffnung besitzt, wurde vertikal aufwärts geschossen, und von der Öffnung aus die Geschossbewegung, speziell die Bahnen der Geschossspitze, während der einzelnen Pendelungen von oben betrachtet. Es zeigten sich Kurven ähnlich der in Figur 42 (siehe Heft 4 d. Zeitschr.).

C. Theorie.

Eine analytische Theorie der Kreiselbewegungen rotierender Langgeschosse hat der Verfasser früher (l. c. § 28) unter Voraussetzung des quadratischen Luftwiderstandsgesetzes gegeben. Dieselbe soll im Folgenden unter weniger beschränkenden Annahmen von neuem durchgeführt werden: erstens gilt die folgende Theorie für jedes beliebige Luftwiderstandsgesetz, zweitens ist angenommen, dass die Geschossaxe im Anfang der Flugbahn einen seitlichen Stoss erleide, der speziell auch Null sein kann; ferner, dass anfangs die Tangente und die Geschossaxe nicht zusammenfallen.

Die Bewegung des Geschosses kann, wie bekannt, zerlegt gedacht werden in eine Translationsbewegung des Schwerpunkts, die so vor sich geht, wie wenn im Schwerpunkt alle äusseren Kräfte, parallel versetzt, angreifen würden, und in eine Drehung des Geschosses um den Schwerpunkt, wobei diese Drehung in derselben Weise erfolgt, wie wenn der Schwerpunkt im Raume relativ fest wäre. Beide Bewegungen sind von einander abhängig, worin der Grund für die Kompliziertheit des Problems und für die Unmöglichkeit liegt, dasselbe in aller Strenge zu lösen. Diese gegenseitige Abhängigkeit leuchtet auch ohne Rechnung sofort ein: Je grösser die Schwankungen bezüglich der Bahntangente sind, welche die Geschossaxe periodisch um den Schwerpunkt vollführt, um so grösser werden die Unterschiede des Luftwiderstands gegenüber dem Geschoss, welches mehr seine Langseite diesem Widerstande darbietet, um so mehr also wird die Flugbahn des Schwerpunkts abgeändert; andererseits, je grösser die Krümmung der Flugbahn ist, um so mehr ändert sich der Winkel zwischen der Richtung der Bahntangente in einem beliebigen Punkt und zwischen der Richtung der Anfangstangente, um so grösser also werden die Amplituden bei den Kreiselbewegungen der Geschossaxe sein müssen.

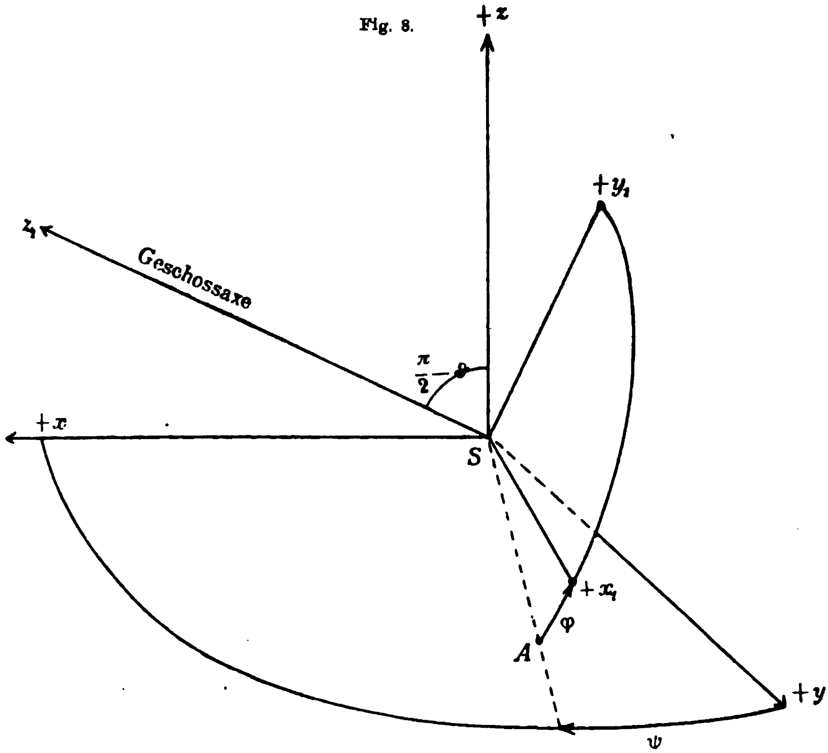
Diese wechselseitige Abhängigkeit der beiden Bewegungen nötigt dazu, ein passendes Näherungsverfahren einzuschlagen; lässt doch schon die (für die Praxis wichtigste) Aufgabe, welche gewöhnlich als das „ballistische Problem“ im engeren Sinne bezeichnet wird, diejenige nämlich, bei welcher von der Rotation des Geschosses um den Schwerpunkt abstrahiert und das Geschoss als Massenpunkt betrachtet wird, bekanntermassen keine strenge Lösung zu. Das im Folgenden, wie in der früheren Arbeit, angewendete Verfahren besteht nun darin, dass die Gleichungen der Translationsbewegung zunächst ohne Rücksicht auf die Rotationsbewegung näherungsweise gelöst, sodann die betreffenden Ausdrücke in die Gleichungen der Rotationsbewegung eingesetzt und diese integriert werden. Die so gewonnenen Integrale werden dann — falls dazu fortgeschritten werden soll, die Geschossabweichungen infolge der Rotationsbewegungen zu berechnen — rückwärts wieder dazu verwendet, die Gleichungen der Translationsbewegung nachträglich mit gewissen Korrektionsgliedern zu versehen. Es ist dies ein Verfahren, wie es in ähnlicher Weise bei Störungsrechnungen der Astronomie Anwendung findet.

Durch die Mitte O der Geschütz- oder Gewehrmündung seien drei feste Koordinatenaxen Ox, Oy, Oz gelegt; die Axe Ox horizontal und positiv in der Schussrichtung; Oy ebenfalls horizontal und positiv nach links (die Ausdrücke rechts, links, oben, unten durchweg bezüglich des Schützen gebraucht); die z-Axe vertikal, positiv nach oben. Der Geschossschwerpunkt S habe nach t Sekunden, vom Verlassen der Mündung an gerechnet, die Koordinaten xyz; durch S denke man sich drei Axen Sx, Sy, Sz parallel und gleichsinnig mit Ox, Oy, Oz gelegt, sowie drei andere Axen Sx_1, Sy_1, Sz_1, welch letztere mit dem Geschoss fest verbunden sind und Hauptträgheitsaxen vorstellen (die Figur 8 ist gezeichnet für einen Beobachter, welcher von der linken Seite der Flugbahn aus nach dem Geschoss sieht, also geht für diesen Sx nach links, Sy nach vorn, Sz nach oben). Die Axe Sz_1 sei die Längsaxe des Geschosses, das als Kreiscylinder mit aufgesetzter Spitze zu denken ist; ihre Neigung gegen die Horizontalebene Sx, Sy möge ϑ sein; positiv, falls die Geschossaxe sich oberhalb dieser Ebene xSy befindet, negativ, wenn unterhalb, somit $\sphericalangle zSz_1 = \frac{\pi}{2} - \vartheta$. Die beiden anderen, im Geschoss festen Axen Sx_1, Sy_1 seien auf Sz_1 senkrecht; die Ebene x_1Sy_1 schneide die Horizontalebene xSy nach SA und $\sphericalangle ySA$ sei mit ψ bezeichnet, ψ gezählt von der $+y$-Axe zur $+x$-Axe; endlich sei $\sphericalangle ASx_1 = \varphi$, und zwar sei der positive Drehungssinn von φ dadurch festgelegt, dass bei wachsendem φ einem Beobachter, der von S aus in der Richtung der Geschossaxe Sz_1 sieht, das Geschoss und mit ihm die Ebene x_1Sy_1 rechtsläufig, im Sinn der Uhrzeigerbewegung sich dreht, also in der Weise, wie es bei den deutschen Geschützen mit ihren rechtsläufig gewundenen Zügen der Fall ist. Durch

die Angabe von ϑ, φ, ψ ist in jedem Augenblick die Lage des Geschosses bezüglich des Schwerpunkts S festgelegt; anfangs liege die Geschossaxe in der Schussebene xSz und sei gegen den Horizont um den wahren Abgangswinkel ϑ_0 geneigt, auch falle anfangs Sx_1 mit SA zusammen, so dass für $t = 0 : \psi = 0$, $\varphi = 0$, $\vartheta = \vartheta_0$.

p, q, r seien wie üblich die Komponenten der variablen Drehgeschwindigkeit um die beweglichen Axen Sx_1, Sy_1, Sz_1; dabei p positiv für eine Drehung um Sx_1 von Sy_1 nach Sz_1, q für eine Drehung

Fig. 8.



um Sy_1 von Sz_1 nach Sx_1, r für eine Drehung um Sz_1 von Sx_1 nach Sy_1.

Weiterhin sei m die Geschossmasse; X, Y, Z die Komponentensummen aller auf das Geschoss wirkenden äusseren Kräfte mit Ausnahme der Schwerkraft bezüglich Sx, Sy, Sz; X_1, Y_1, Z_1 dasselbe bezüglich der beweglichen Axen Sx_1, Sy_1, Sz_1 und L, M, N die entsprechenden Momentensummen; A, B, C die Trägheitsmomente um Sx_1, Sy_1, Sz_1. Dann sind die Gleichungen für die Translationsbewegung des Schwerpunkts:

$$1)\qquad m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z - mg$$

und diejenigen für die Rotation um den Schwerpunkt nach Euler:

$$2)\quad \begin{cases} A\frac{dp}{dt} = (B-C)qr + L, \quad B\cdot\frac{dq}{dt} = (C-A)rp + M, \\ C\frac{dr}{dt} = (A-B)\cdot pq + N; \end{cases}$$

dabei ist

$$3)\quad \begin{cases} p = -\cos\vartheta\cdot\sin\varphi\cdot\frac{d\psi}{dt} - \cos\varphi\cdot\frac{d\vartheta}{dt}, \\ q = -\cos\vartheta\cdot\cos\varphi\cdot\frac{d\psi}{dt} + \sin\varphi\cdot\frac{d\vartheta}{dt}, \\ r = \frac{d\varphi}{dt} - \sin\vartheta\cdot\frac{d\psi}{dt}, \end{cases}$$

woraus auch folgt:

$$3\text{a})\quad \cos\vartheta\cdot\frac{d\psi}{dt} = -p\cdot\sin\varphi - q\cdot\cos\varphi, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = -p\cos\varphi + q\sin\varphi.$$

Die Kosinus $a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 c_1 c_2 c_3$ der Winkel zwischen den beweglichen Axen der $x_1 y_1 z_1$ und den festen xyz (vergl. das Schema) hängen mit den Winkeln φ, ψ, ϑ durch die Eulerschen Formeln zusammen:

	x_1	y_1	z_1
x	a_1	b_1	c_1
y	a_2	b_2	c_2
z	a_3	b_3	c_3

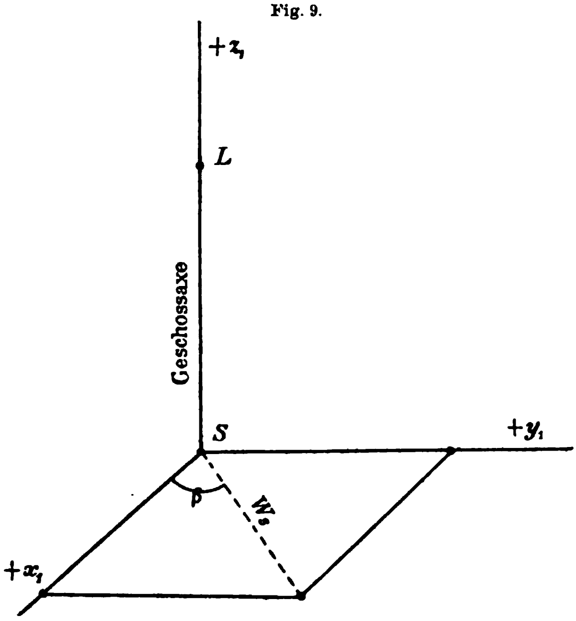
$$4)\quad \begin{cases} a_1 = -\sin\vartheta\cdot\cos\psi\cdot\sin\varphi + \sin\psi\cdot\cos\varphi \\ b_1 = -\sin\vartheta\cdot\cos\psi\cdot\cos\varphi - \sin\psi\cdot\sin\varphi \\ c_1 = \cos\vartheta\cdot\cos\psi \\ a_2 = \sin\vartheta\cdot\sin\psi\cdot\sin\varphi + \cos\psi\cdot\cos\varphi \\ b_2 = \sin\vartheta\cdot\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\cdot\sin\varphi \\ c_2 = -\cos\vartheta\cdot\sin\psi \\ a_3 = \cos\vartheta\cdot\sin\varphi \\ b_3 = \cos\vartheta\cdot\cos\varphi \\ c_3 = \sin\vartheta. \end{cases}$$

Die Kräfte, welche auf das Geschoss wirken, sind die Schwerkraft, der normale Luftwiderstand, die Luftreibung oder der tangentielle Widerstand (Poissonscher Effekt), und die Wirkung der an dem Geschoss adhärierenden Luft gegenüber der Luft, in welcher sich dasselbe bewegt (Magnus-Effekt). Die Schwerkraft kommt in den Gleichungen 2) nicht vor, da die Resultante der Schwerkräfte durch S geht.

Die normalen Luftwiderstände gegen die einzelnen Teile der Geschossoberfläche setzen sich zu einer Resultante zusammen, welche in einem variablen Punkt L der Geschossaxe, $SL = h_1$, angreift; diese Resultante sei in ihre Komponenten, W_p und W_s, parallel und senkrecht zur Geschossaxe Sz_1 zerlegt gedacht; der Winkel zwischen W_s und Sx_1 sei β. Die Grössen W_p, W_s und h_1 variieren in wenig einfacher Weise mit dem Winkel α zwischen Geschossaxe Sz_1 und Flugbahntangente ST, die Tabellen I, II und IV (siehe Heft 4 dieser Zeitschr.) geben für verschiedene Winkel α und verschiedene Geschosslängen diese Werte, wie sie nach den Formeln von Kummer berechnet

sind. Bezüglich des tangentiellen Luftwiderstandes haben Poisson und Heim für Kugeln rechnerisch nachgewiesen, dass er ein nur minimaler sein könne; die oben angeführten Versuche haben weiterhin bewiesen, dass auch für die jetzigen Langgeschosse die Wirkung der Luftreibung zum mindesten erheblich kleiner ist, als diejenige des normalen Widerstands; es ist deshalb im folgenden von der Wirkung der Luftreibung abstrahiert; es könnte dieselbe auch erst dann in Rechnung gezogen werden, wenn Versuche über die eventuelle zeitliche Abnahme der Rotationsgeschwindigkeit um die Längsaxe vorlägen.

Fig. 9.



Der Effekt von Magnus endlich kommt für Langgeschosse wohl nur bezüglich der Translationsbewegung und überhaupt nur dann in Betracht, wenn die Geschossaxe gegen die Bahntangente beträchtlich geneigt ist. So soll im Folgenden — wie dies von den Ballistikern, die sich bisher rechnerisch mit den Geschosspendelungen befassten, stets geschehen ist — ausser der Schwerkraft nur der normale Luftwiderstand in die Rechnung einbezogen werden. Es ist danach:

$$X_1 = W_s \cdot \cos\beta, \quad Y_1 = W_s \cdot \sin\beta, \quad Z_1 = W_p;$$

ferner ist, da der Angriffspunkt $x_1 y_1 z_1$ der Luftwiderstandsresultante auf der Axe Sz_1 liegt:

$$5) \quad \begin{cases} L = z_1 Y_1 - y_1 Z_1 = \quad z_1 Y_1 = \quad h_1 \cdot W_s \cdot \sin\beta \\ M = x_1 Z_1 - z_1 X_1 = -z_1 X_1 = -h_1 \cdot W_s \cdot \cos\beta \\ N = y_1 X_1 - x_1 Y_1 = 0. \end{cases}$$

Deshalb und wegen $A = B$ giebt die dritte Gleichung 2) $\frac{dr}{dt} = 0$; die Komponente der Rotationsgeschwindigkeit um die Geschossaxe ist also konstant.

Es ist nun $\cos\beta$, $\sin\beta$, X, Y, Z zu bilden. Die Kosinus der Winkel zwischen der Bahntangente und den festen Axen sind:

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds};$$

die Ebene durch die Tangente ST und die Geschossaxe Sz_1 soll den Winkel β mit der Sx_1-Axe bilden, somit erhält man aus dem rechtwinkligen Dreikant Sx_1, ST, SW_s (wo $SW_s \parallel W_s$ durch S):

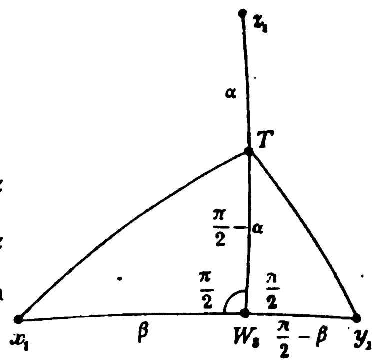
$$\begin{cases} \cos(ST^\wedge Sx_1) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \\ \qquad = a_1 \frac{dx}{ds} + a_2 \frac{dy}{ds} + a_3 \frac{dz}{ds}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(ST^\wedge Sy_1) = \sin\alpha \cdot \sin\beta \\ \qquad = b_1 \frac{dx}{ds} + b_2 \frac{dy}{ds} + b_3 \frac{dz}{ds}, \end{cases}$$

oder

$$6) \quad \begin{cases} \cos\beta = \left(a_1 \frac{dx}{ds} + a_2 \frac{dy}{ds} + a_3 \frac{dz}{ds}\right) : \sin\alpha \\ \sin\beta = \left(b_1 \frac{dx}{ds} + b_2 \frac{dy}{ds} + b_3 \frac{dz}{ds}\right) : \sin\alpha \end{cases}$$

Fig. 10.



ferner ist für den Winkel α zwischen ST und Sz_1:

$$7) \qquad \cos\alpha = c_1 \frac{dx}{ds} + c_2 \frac{dy}{ds} + c_3 \frac{dx}{ds}$$

und endlich ist:

$$8) \quad \begin{cases} X = a_1 X_1 + b_1 Y_1 + c_1 Z_1, \quad Y = a_2 X_1 + b_2 Y_1 + c_2 Z_1, \\ Z = a_3 X_1 + b_3 Y_1 + c_3 Z_1. \end{cases}$$

Damit erhalten die sechs Gleichungen 1) und 2) für die Translation und Rotation die folgende Form:

$$9) \quad \begin{cases} m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = a_1 \cdot W_s \cdot \cos\beta + b_1 \cdot W_s \cdot \sin\beta + c_1 \cdot W_p \\ m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = a_2 \cdot W_s \cdot \cos\beta + b_2 \cdot W_s \cdot \sin\beta + c_2 \cdot W_p \\ m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = a_3 \cdot W_s \cdot \cos\beta + b_3 \cdot W_s \cdot \sin\beta + c_3 \cdot W_p - mg \end{cases}$$

(dabei der Luftwiderstand negativ zu rechnen).

$$10) \quad \begin{cases} A \cdot \frac{dp}{dt} + (C - A) \cdot rq = \quad h_1 \cdot W_s \cdot \left(b_1 \frac{dx}{ds} + b_2 \frac{dy}{ds} + b_3 \frac{dz}{ds}\right) : \sin\alpha \\ A \cdot \frac{dq}{dt} - (C - A) \cdot rp = -h_1 \cdot W_s \cdot \left(a_1 \frac{dx}{ds} + a_2 \frac{dy}{ds} + a_3 \frac{dz}{ds}\right) : \sin\alpha. \end{cases}$$

In der That hängen, wie oben bemerkt, die beiden Bewegungen wechselseitig von einander ab, denn die Gleichungen 9) enthalten $a_1 a_2 \ldots$, also wegen 4) die Winkel ϑ, ψ; und die Gleichungen 10) enthalten $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$.

Dem angeführten Plan zufolge werden zunächst die Gleichungen 9) für die Translationsbewegung des Schwerpunkts ohne Rücksicht auf die Rotation gelöst; eine solche Lösung ist z. B. in dem Siacci-Kruppschen System von Gleichungen gegeben:

$$z = x(\operatorname{tg}\vartheta_0 + \varkappa F_{v_0}) - \varkappa^2(Y_{v_x} - Y_{v_0}), \quad \operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\vartheta_0 - \varkappa(F_{v_e} - F_{v_0})$$
$$t = \varkappa(T_{v_e} - T_{v_0}), \quad x = \varkappa(X_{v_e} - X_{v_0}).$$

Hier bedeutet ω den Horizontalneigungswinkel der Tangente in dem Punkt (xz), der nach t Sekunden erreicht ist; die Werte X, F, T, Y sind aus Tabellen zu entnehmen; $\varkappa = \frac{P \cdot 1{,}206}{R^2\pi \cdot \delta \cdot \lambda}$, P Geschossgewicht in kg, $R^2\pi$ der Querschnitt des Geschosses in qcm, δ das Gewicht von 1 cbm Luft, λ ein Faktor, der von der Spitzenform abhängt und für normale Kruppsche Geschosse $= 1$ ist. Man kann auf diese Weise für irgend eine Zeit t die Lage (x, z) des Geschosses berechnen; y ist dabei $= 0$.

Noch einfacher ist es, nach der graphischen Methode des Verfassers* die Flugbahn zu konstruieren; es lassen sich dann die zusammengehörigen Zeiten t, Abscissen x, Ordinaten z, Tangentenwinkel ω, Bahngeschwindigkeiten v leicht entnehmen.

Es sei vorausgesetzt, dass dies geschehen sei, dass man also für eine grössere Anzahl. von Flugbahnpunkten, zunächst ohne Rücksicht auf die Rotation, die Werte t, x, z, ω, v, also auch $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ kenne, während vorerst $y = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$ genommen wird.

Ferner soll die folgende Berechnung nur Giltigkeit haben, wenn die Beobachtung (an Scheibendurchschlägen etc.) aufgezeigt hat, dass die Winkel ϑ und ψ klein sind, und zwar sei vorausgesetzt, dass die Winkel ϑ und ψ so klein seien, dass die Quadrate gegenüber der Einheit vernachlässigt werden können, dann ist

$$a_1 = -\vartheta \cdot \sin rt + \psi \cos rt; \quad b_1 = -\vartheta \cdot \cos rt - \psi \sin rt;$$
$$c_1 = +1; \quad a_2 = \cos rt, \quad b_2 = -\sin rt,$$
$$c_2 = -\psi, \quad a_3 = \sin rt, \quad b_3 = \cos rt, \quad c_3 = +\vartheta;$$

damit werden die Gleichungen 6):

$$\begin{cases} \cos\beta = \left[\frac{dx}{ds}(-\vartheta \cdot \sin rt + \psi \cos rt) + \frac{dy}{ds} \cdot \cos rt + \frac{dz}{ds} \sin rt\right] : \sin\alpha \\ \sin\beta = \left[\frac{dx}{ds}(-\vartheta \cdot \cos rt - \psi \sin rt) - \frac{dy}{ds} \cdot \sin rt + \frac{dz}{ds} \cos rt\right] : \sin\alpha. \end{cases}$$

---

* Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrgang 1897, S. 197. (S. 200 Z. 16 lies $15\frac{14}{16}°$ statt 24° 52′. Ferner ist hinzuzufügen, dass Hr. A. Indra gegenüber Hr. Ökinghaus die Priorität dafür in Anspruch nimmt, zuerst die Hyperbel als ballistische Kurve systematisch behandelt zu haben. In der That hat schon 1876 Hr. Indra das betr. Gleichungssystem aufgestellt, dasselbe übrigens in einer weit allgemeineren, auf synthetisch-geometrische Betrachtungen gegründeten Weise abgeleitet: Alois Indra, jetzt Oberst und Präses im technischen Militärkomité in Wien, „Graphische Ballistik, synthetische Behandlung der Bewegung im materiell erfüllten Raum, Anwendung auf die Geschossbewegung". Wien 1876, bei Seidel. Seitdem hat Hr. Ökinghaus die Hyperbeltheorie auf zahlreiche Einzelprobleme der Ballistik angewendet und erheblich erweitert.)

Denkt man sich hier den Zähler und Nenner je mit der Bahngeschwindigkeit $\frac{ds}{dt} = v$ multipliziert, setzt nach dem Obigen vorerst $\frac{dy}{dt} = 0$, und bezeichnet $\frac{dx}{dt} = v \cdot \cos\omega$, $\frac{dz}{dt} = v \cdot \sin\omega$, wo ω der Horizontalneigungswinkel der Tangente ist, so wird:

$$\cos\beta = [v \cdot \cos\omega\,(-\vartheta \cdot \sin rt + \psi \cos rt) + v \cdot \sin\omega \cdot \sin rt] : v \cdot \sin\alpha,$$

oder:

$$12)\quad \begin{cases} \cos\beta = \frac{\cos\omega}{\sin\alpha} \cdot [-\vartheta \cdot \sin rt + \psi \cos rt + \sin rt \cdot \operatorname{tg}\omega] \\ \sin\beta = \frac{\cos\omega}{\sin\alpha} \cdot [-\vartheta \cdot \cos rt - \psi \sin rt + \cos rt \cdot \operatorname{tg}\omega]. \end{cases}$$

Hierbei ist:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} - \psi \cdot \frac{dy}{ds} - \vartheta \cdot \frac{dz}{ds} = \left[\frac{dx}{dt} - \psi \cdot \frac{dy}{dt} - \vartheta \cdot \frac{dz}{dt}\right] : \frac{ds}{dt},$$

oder jetzt:

$$13)\qquad \cos\alpha = \cos\omega - \vartheta \cdot \sin\omega.$$

Dass es in der That gestattet ist, $\psi \cdot \frac{dy}{dt}$ gegen $\frac{dx}{dt}$ zu vernachlässigen, ergiebt sich aus dem Beispiel der schweren Feldkanone; für diese ist z. B.:

nach $t =$	$x =$	$y =$	$z =$	$\frac{dx}{dt} =$	$\frac{dy}{dt} =$	$\frac{dz}{dt} =$
sec	m	m	m	m/sec		
0	0	0	0	425	0	115
1,26	491	0,25	126	358	0,2	80
2,79	1002	1	239	316	0,6	64
4,48	1512	1,5	329	287	0,9	44

Da n. V. $|\psi| < 1$, leuchtet die Berechtigung des Gesagten ein. Ferner ist in 3) und 3a); $\cos\vartheta = 1$; $\sin\vartheta \cdot \frac{d\psi}{dt}$ ist klein gegen $\frac{d\varphi}{dt}$, da $\frac{d\psi}{dt}$ (s. u.) und ϑ klein sind.

Mit den Ausdrücken 12) werden, unter Berücksichtigung von 5) die Gleichungen 2) resp. 10) der Rotation des Geschosses um den Schwerpunkt nunmehr die folgenden:

$$14)\quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} - \frac{A-C}{A} \cdot rq = \frac{M}{A} \cdot (-\vartheta \cdot \cos rt - \psi \cdot \sin rt + \cos rt \cdot \operatorname{tg}\omega) \\ \frac{dq}{dt} + \frac{A-C}{A} \cdot rp = -\frac{M}{A} \cdot (-\vartheta \cdot \sin rt + \psi \cdot \cos rt + \sin rt \cdot \operatorname{tg}\omega), \end{cases}$$

wobei:

$$M = \frac{W_s \cdot h_1 \cdot \cos\omega}{\sin\alpha}$$

ist. Dazu kommen die Gleichungen:

$$15)\quad \begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = -p \sin rt - q \cdot \cos rt \\ \frac{d\vartheta}{dt} = -p \cdot \cos rt + q \sin rt. \end{cases}$$

Die Bewegung des Geschosses denken wir uns in genügend kleine Intervalle zerlegt, so dass bei der Berechnung innerhalb jedes einzelnen Intervalls ein anderer konstanter Mittelwert von $W_s \cdot h_1 \cos\omega : \sin\alpha$ angenommen werden kann; die Tabelle III resp. IV giebt die Werte von $W_s : \sin\alpha$ und von h_1, die graphische Darstellung der Translationsbewegung lieferte in jedem Augenblick ω, so dass der Ausdruck M als gegeben zu betrachten ist; die Tabelle III und das weiter unten durchgeführte Beispiel zeigt, dass M wenig rasch sich ändert.

Das Gleichungssystem 14) und 15) lässt sich dann nach Poissons Vorgang wie folgt integrieren. Man versucht, für p, q, ϑ, ψ Integrale in der Form zu finden:

$$p = f_1 \cdot \cos rt + f_2 \cdot \sin rt + p_1, \qquad \vartheta = f_3 \cdot \cos rt + f_4 \cdot \sin rt + \vartheta_1$$
$$q = f_2 \cdot \cos rt - f_1 \cdot \sin rt + q_1, \qquad \psi = f_4 \cdot \cos rt - f_3 \cdot \sin rt + \psi_1,$$

wobei $f_1 f_2 f_3 f_4 p_1 q_1 \vartheta_1 \psi_1$ 8 Funktionen der Zeit darstellen, welche noch zu berechnen sind. Dies geschieht, indem die eben angeschriebenen Werte für $p q \vartheta \psi$ in 14) und 15) eingesetzt und die Koeffizienten von $\cos rt$ und $\sin rt$, sowie die von den periodischen Gliedern freien Terme beiderseits einander gleichgesetzt werden. Man erhält so 8 Gleichungen zur Bestimmung der Funktionen $f_1 f_2$ etc.; in 4 dieser Gleichungen kommen $df_1|dt$ neben $f_2 \cdot r$, $df_2|dt$ neben $f_1 \cdot r$, $df_3|dt$ neben $f_4 \cdot r$, $df_4|dt$ neben $f_3 \cdot r$ vor; vernachlässigt man diese Ableitungen der Funktionen gegen die Produkte dieser Funktionen mit dem meist grossen r — unter dem Vorbehalt, dass später durch die Analogie der Kreiseltheorie etwaige Korrektionen in den entstehenden Ausdrücken eintreten sollen —, so lassen sich $f_1 f_2 f_3 f_4$ sofort bestimmen; für $p_1 q_1 \vartheta_1 \psi_1$ bleiben einfache Differentialgleichungen erster Ordnung, welche leicht integriert werden können. Damit hat man:

$$f_1 = M \cdot \psi_1 : Cr \qquad p_1 = C' \sin\beta_1 + D' \cos\beta_1$$
$$f_2 = M \cdot (\vartheta_1 + \operatorname{tg}\omega) : Cr \qquad q_1 = C' \cos\beta_1 - D' \sin\beta_1$$
$$f_3 = -q_1 : r \qquad \vartheta_1 = -A' \sin\beta_2 - B' \cos\beta_2$$
$$f_4 = -p_1 : r \qquad \psi_1 = A' \cos\beta_2 - B' \sin\beta_2,$$

wobei:

$$\beta_1 = \frac{A-C}{A} \cdot rt + \frac{M}{Ar} \cdot t$$
$$\beta_2 = \frac{M}{Cr} \cdot t$$

und A', B' Funktionen von t sind, nämlich:

$$A' = A_1 - \int \frac{M}{Cr} \cdot \operatorname{tg}\omega \cdot \cos\beta_2 \cdot dt, \quad B' = B_1 + \int \frac{M}{Cr} \cdot \operatorname{tg}\omega \cdot \sin\beta_2 \cdot dt.$$

$A_1 B_1 C' D'$ sind Integrationskonstanten, die sich aus dem Anfangszustand ergeben; über die Berechnungen der letzteren Integrale siehe w. u.

Damit erhält man:

$$p = \frac{M}{Cr}\cdot\left\{\cos\beta_2\left(A_1 - \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\cos\beta_2\cdot dt\right)\right.$$
$$\left. - \sin\beta_2\left(B_1 + \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\sin\beta_2\cdot dt\right)\right\}\cdot\cos rt$$
$$+ \frac{M}{Cr}\cdot\left\{\sin\beta_2\left(A_1 - \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\cos\beta_2\cdot dt\right)\right.$$
$$\left. + \cos\beta_2\left(B_1 + \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\sin\beta_2\cdot dt\right) + \operatorname{tg}\omega\right\}\sin rt$$
$$+ C'\sin\beta_1 + D'\cos\beta_1,$$

oder

$$16)\left\{\begin{aligned} p = C'\sin\beta_1 + D'\cos\beta_1 &+ \frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\sin rt \\ &+ \frac{M}{Cr}\left\{\cos(rt-\beta_2)\cdot\left(A_1 - \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\cos\beta_2\cdot dt\right)\right. \\ &\left. + \sin(rt-\beta_2)\cdot\left(B_1 + \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\sin\beta_2\cdot dt\right)\right\}, \end{aligned}\right.$$

ebenso

$$17)\left\{\begin{aligned} q = C'\cos\beta_1 - D'\sin\beta_1 &+ \frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\cos rt \\ &+ \frac{M}{Cr}\cdot\left\{-\sin(rt-\beta_2)\cdot\left(A_1 - \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\cos\beta_2\cdot dt\right)\right. \\ &\left. + \cos(rt-\beta_2)\cdot\left(B_1 + \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\sin\beta_2\cdot dt\right)\right\}. \end{aligned}\right.$$

$$18)\left\{\begin{aligned} -\vartheta = \frac{C'}{r}\cdot\cos(rt-\beta_1) &+ \frac{D'}{r}\cdot\sin(rt-\beta_1) \\ &+ \sin\beta_2\cdot\left(A_1 - \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\cos\beta_2\cdot dt\right) \\ &+ \cos\beta_2\cdot\left(B_1 + \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\sin\beta_2\cdot dt\right). \end{aligned}\right.$$

$$19)\left\{\begin{aligned} \psi = -\frac{C'}{r}\cdot\sin(rt-\beta_1) &+ \frac{D'}{r}\cdot\cos(rt-\beta_1) \\ &+ \cos\beta_2\cdot\left(A_1 - \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\cos\beta_1\cdot dt\right) \\ &- \sin\beta_2\cdot\left(B_1 - \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\sin\beta_2\cdot dt\right). \end{aligned}\right.$$

Im Anfang der Bewegung, die wir von der Mündung des Gewehrs oder Geschützes abrechnen, falle zunächst die Geschossaxe in die Richtung der Anfangstangente, so dass für $(t=0)$:

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \psi = 0$$

ist. Zugleich aber erhalte die Geschossaxe einen seitlichen Stoss, der ihr die Winkelgeschwindigkeiten p_0 und q_0 erteile;

$$(t=0): p = p_0, \quad q = q_0.$$

Damit wird:

$$
20)\begin{cases}
p_0 = D' + \frac{M}{Cr}\cdot A_1 & A_1 = p_0 : \left(\frac{M}{Cr} - r\right) \\
q_0 = C' + \frac{M}{Cr}(\operatorname{tg}\vartheta_0 + B_1) & B_1 = \left(q_0 + r\,\vartheta_0 - \frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\vartheta_0\right) : \left(\frac{M}{Cr} - r\right) \\
-\vartheta_0 = \frac{C'}{r} + B_1 & C' = -r\operatorname{tg}\vartheta_0 - r\,B_1 \\
0 = \frac{D'}{r} + A_1 & D' = -r\,A_1.
\end{cases}
$$

Ferner sind die beiden in 16) bis 19) vorkommenden Integrale:

$$F = \frac{1}{Cr}\cdot\int M\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\cos\beta_2\cdot dt \quad \text{und} \quad F_1 = \frac{1}{Cr}\cdot\int M\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\sin\beta_2\cdot dt$$

zu ermitteln.

Es sei im Folgenden die Abkürzung $M : Cr = N$ eingeführt und daran erinnert, dass wir einen Mittelwert von N in den einzelnen Intervallen annahmen; in β_2 und β_1 wurden die Integrationskonstanten so bestimmt, dass für $t = 0$, $\beta_1 = 0$ und $\beta_2 = 0$ ist, weil nur im Anfang $\psi = 0$ und $\vartheta = \vartheta_0$ sein soll; also muss auch in den beiden Integralen von 0 bis t integriert werden. Es lässt sich nun wiederholt die teilweise Integration anwenden; hierbei treten jedoch immer höhere Potenzen des Faktors $(g\cdot Cr):(v\cdot\cos\omega\cdot M)$ auf, von welchem sich später zeigen wird, dass er von der Grössenordnung von ψ ist, und von welchem daher die höheren Potenzen nach der ersten weggelassen werden (z. B. bei der Granate der deutschen Feldkanone, Schussweite 4500 m, nimmt dieser Faktor vom Abgangspunkt bis zum Auffallpunkt zu von 0,00256 bis 0,00304); man hat damit:

$$F = \int N\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\cos\beta_2\cdot dt = \int\operatorname{tg}\omega\cdot\cos\beta_2\cdot d\beta_2 = \operatorname{tg}\omega\cdot\sin\beta_2 + \frac{1}{\cos^2\omega}\cdot\frac{d\omega}{d\beta_2}\cdot(\cos\beta_2 - 1);$$

nun ist $dx = -\frac{v^2}{g}\cdot d\omega$, eine Gleichung, die für jedes Luftwiderstandsgesetz allgemein giltig ist (vergl. Kompendium S. 81); somit ist:

$$\frac{d\operatorname{tg}\omega}{dt} \text{ oder } \frac{1}{\cos^2\omega}\cdot\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\cos^2\omega}\cdot\frac{d\omega}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\cos^2\omega}\cdot\frac{g}{v^2}\cdot\frac{dx}{dt} = -\frac{g}{v_x},$$

wenn v_x die Horizontalkomponente $v\cdot\cos\omega$ der Bahngeschwindigkeit des Schwerpunktes darstellt; somit hat man:

$$\frac{1}{\cos^2\omega}\cdot\frac{d\omega}{d\beta_2} = -\frac{g}{v_x}:\frac{d\beta_2}{dt} = -\frac{g\cdot Cr}{v_x\cdot M};$$

(in 4 Beispielen der Praxis nahm $Cr:M$ numerische Werte zwischen 0,1 und 2 an, während v_x zwischen 180 und 400 lag). Man hat danach oder nach dem Mittelwertsatz:

$$21)\qquad F = \sin\beta_2\cdot\operatorname{tg}\omega + f\cdot(1 - \cos\beta_2),$$

wobei $f = (g\cdot Cr):(v_x\cdot M)$ ist.

Analog ist:

$$F_1 = \int N \operatorname{tg} \omega \cdot \sin \beta_2 \cdot dt = \int \operatorname{tg} \omega \cdot \sin \beta_2 \cdot d\beta_2$$

$$= - \operatorname{tg} \omega \cdot \Big|_0^t \cos \beta_2 + \int_0^t d(\operatorname{tg} \omega) \cos \beta_2,$$

oder bei demselben Verfahren:

$$22)\qquad F_1 = - \cos \beta_2 \cdot \operatorname{tg} \omega + \operatorname{tg} \omega - f \cdot \sin \beta_2.$$

Diese Werte 20), 21), 22) sind noch in den Ausdrücken 16) bis 19) zu verwenden; so kennt man in jedem Moment die Lage der momentanen Drehaxe und diejenige der Geschossaxe. Letzere ist für die Ballistik von der grösseren Bedeutung; daher beschäftigen wir uns nur mit den Ausdrücken ϑ und ψ und deren geometrischer Deutung. Es wird:

$$\left\{\begin{aligned} \vartheta = {} & (\vartheta_0 + B_1) \cos (rt - \beta_1) + A_1 \cdot \sin (rt - \beta_1) - A_1 \sin \beta_2 - B_1 \cos \beta_2 \\ & + \sin \beta_2 \cdot [\sin \beta_2 \cdot \operatorname{tg} \omega + f \cdot (1 - \cos \beta_2)] \\ & - \cos \beta_2 \cdot (\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \omega \cdot \cos \beta_2 - f \cdot \sin \beta_2) \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \psi = {} & (\vartheta_0 + B_1) \sin (rt - \beta_1) - A_1 \cdot \cos (rt - \beta_1) + A_1 \cos \beta_2 - B_1 \sin \beta_2 \\ & - \cos \beta_2 \cdot [\sin \beta_2 \cdot \operatorname{tg} \omega + f \cdot (1 - \cos \beta_2)] \\ & - \sin \beta_2 \cdot (\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \omega \cdot \cos \beta_2 - f \cdot \sin \beta_2), \end{aligned}\right.$$

oder:

$$23)\qquad \vartheta = \vartheta_r + \vartheta_n,$$

wobei:

$$\vartheta_r = \operatorname{tg} \omega + f \cdot \sin \beta_2 + \cos \beta_2 \cdot (\operatorname{tg} \vartheta_0 - \operatorname{tg} \omega)$$

$$\vartheta_n = \{p_0 \cdot [\sin \beta_2 - \sin (rt - \beta_1)] + q_0 [\cos \beta_2 - \cos (rt - \beta_1)]\} : (r - N).$$

$$24)\qquad \psi = \psi_r + \psi_n,$$

wobei:

$$\psi_r = f - f \cdot \cos \beta_2 + \sin \beta_2 \cdot (\operatorname{tg} \vartheta_0 - \operatorname{tg} \omega)$$

$$\psi_n = \{q_0 \cdot [\sin \beta_2 - \sin (rt - \beta_1)] - p_0 \cdot [\cos \beta_2 - \cos (rt - \beta_1)]\} : (r - N)$$

mit den Abkürzungen:

$$25)\left\{\begin{aligned} & \beta_1 = \frac{A-C}{A} \cdot rt + \frac{M}{Ar} \cdot t; \quad \beta_2 = \frac{M}{Cr} \cdot t; \\ & N = \frac{M}{Cr}; \quad f = \frac{g \cdot Cr}{v_x \, M}. \end{aligned}\right.$$

Diese Ausdrücke 23) und 24) lassen eine verhältnismässig einfache geometrische Deutung zu.

Wir legen durch den festgedachten Schwerpunkt S des Geschosses eine horizontale Äquatorebene, ferner durch S und die Flugbahntangente ST eine vertikale Anfangs-Meridianebene; beschreiben weiter um S mit der Längeneinheit $SS_1 = ST = 1$ m eine Kugelfläche, welche von S aus be-

trachtet und dementsprechend gezeichnet sei. Der Äquator und der Anfangsmeridian, welche sich in S_1 schneiden, werden als sphärische Koordinatenaxen $S_1 \psi$ und $S_1 \vartheta$ benützt. In Beziehung auf dieses sphärische Koordinatensystem auf der Kugel stellen dann ψ resp. ϑ die Länge resp. Breite desjenigen Punktes P vor, welcher sich auf der Verlängerung der Geschossaxe in der Entfernung $SP = 1$ m befindet. Die Figur 11 ist für einen Beobachter gezeichnet, welcher von hinten das Geschoss betrachtet; der Geschossschwerpunkt ist also vor dem Papier zu denken.

Wir suchen die Kurve, welche der Punkt P der Geschossaxe im Lauf der Zeit beschreibt, von seiner Anfangslage O aus (Winkel $OSS_1 = \vartheta_0$). Der Punkt T der Tangente fällt anfangs in O, rückt von da auf der ϑ-Axe abwärts; zur Zeit t ist Winkel $TSS_1 = \omega$; im Flugbahnscheitel

Fig. 11.

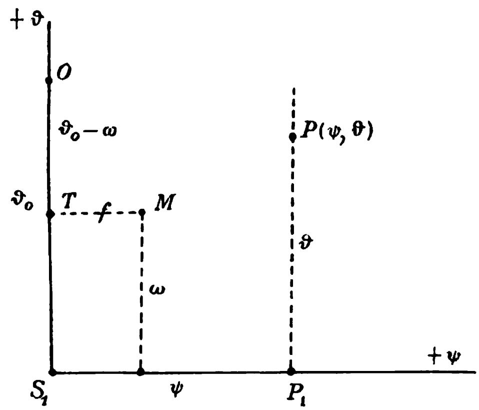
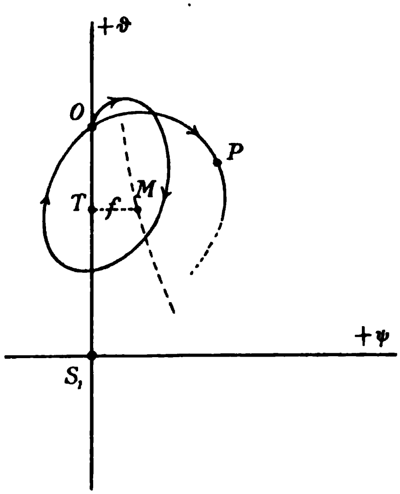


Fig. 12.



ist T in S_1 angelangt etc.; die Bewegung von T auf der Ordinatenaxe, also die Änderung von ω mit der Zeit, ist hierbei durch die vorhergehende (graphische) Lösung der Translationsbewegung gegeben zu denken; ebenso ist die Bahngeschwindigkeit v des Schwerpunkts und ihre horizontale Komponente $v_x = v \cdot \cos \omega$ zu jeder Zeit bekannt.

Nun lassen sich die Ausdrücke ϑ und ψ in zwei wesentlich verschiedene Teile und lässt sich demgemäss die Bewegung der Geschossaxe in zweierlei Bewegungen spalten, wovon die eine als die reguläre Präzession (ϑ_r, ψ_r), die andere als die Nutation infolge eines Anfangsstosses (ϑ_n, ψ_n) zu bezeichnen ist.

a) Sieht man nämlich von einem Anfangsstoss $p_0 q_0$ ab, so reduzieren sich ϑ und ψ auf die Ausdrücke:

$$26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vartheta = \vartheta_r = \omega + f \cdot \sin \beta_2 + \cos \beta_2 \cdot (\vartheta_0 - \omega) \\ \psi = \psi_r = f \quad - f \cdot \cos \beta_2 + \sin \beta_2 \cdot (\vartheta_0 - \omega) \end{array} \right\} \quad \text{(reguläre Präzession);}$$

hieraus:

$$27)\qquad (\vartheta - \omega)^2 + (\psi - f)^2 = f^2 + (\vartheta_0 - \omega)^2;$$

d. h. wenn kein Anfangsstoss stattfindet, beschreibt Punkt P der Geschossaxe eine spiralenförmig sich erweiternde Kurve (Fig. 12), die stets wieder durch die Anfangslage O geht und die aufgefasst werden kann als ein veränderlicher Kreis durch den festen Punkt O; der Mittelpunkt M dieses Kreises, mit den Koordinaten ω und f, rückt hierbei von O aus (mehr oder weniger) nach rechts und abwärts (in derselben Weise wie der Endpunkt T der Flugbahntangente auf der Ordinatenaxe $S_1 O$ abwärts rückt), vorausgesetzt, dass erstens das Gewehr oder Geschütz Rechtsdrall besitzt, das Geschoss rechtsläufig um die Geschossaxe rotiert (r positiv), und dass zweitens die Resultante der Luftwiderstände vor dem Schwerpunkt auf der Geschoss-

Fig. 13.

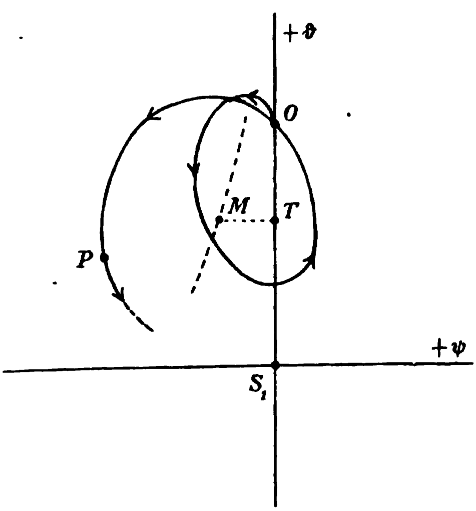
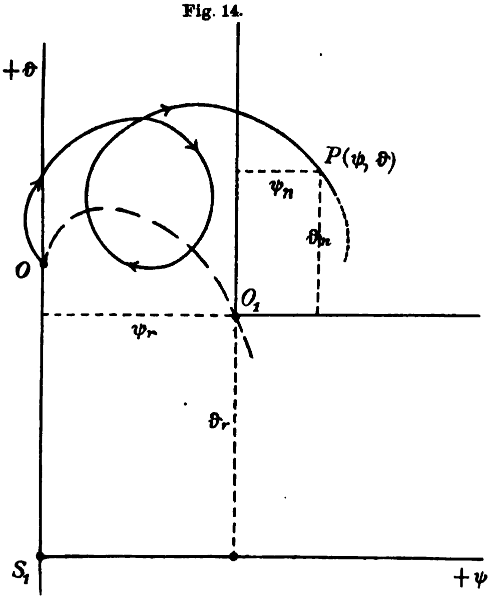


Fig. 14.



axe angreift (Moment M positiv). Dasselbe ist der Fall, wenn r und M negativ sind. Wenn dagegen bei Rechtsdrall die Resultante zwischen Schwerpunkt und Geschossboden angreift oder umgekehrt bei Linksdrall dieselbe ihren Angriffspunkt zwischen Schwerpunkt und Geschossspitze hat, so wird die Präzessionsbewegung der Geschossspitze linksläufig erfolgen (Fig. 13), der Mittelpunkt M des veränderlichen Kreises liegt in diesem Fall links und rückt abwärts.

Der Radius $OM = \sqrt{f^2 + (\vartheta_0 - \omega)^2}$ des veränderlichen Kreises vergrössert sich stetig, weil der Winkel $\vartheta_0 - \omega$ zwischen Anfangstangente der Flugbahn und Tangente in einem variablen Punkt mit der Zeit stetig wächst und ebenso meistens der Ausdruck

$$f = g \cdot \frac{C \cdot r}{M \cdot v_x};$$

denn das Drehmoment M des Luftwiderstands wird zwar in den meisten Fällen zunehmen; aber es nimmt v_x ab (während von r angenommen wird, dass es konstant bleibt, was freilich nur angenähert richtig sein dürfte); jedenfalls ergiebt die Rechnung, dass f meistens zunimmt und die Bahn des Punktes P der Geschossspitze in immer weiteren Windungen verläuft.

Wie man sieht, ist der veränderliche Kreis unsymmetrisch bezüglich der Flugbahnvertikalebene OSS_1; da die Rechnung nicht bis zur Ermittelung der Seitenabweichung y des Geschossschwerpunkts hier durchgeführt wird, so sei schon an dieser Stelle bemerkt, dass eben diese Unsymmetrie der Grund für diese Derivation ist; in der That wird die Seitenabweichung wesentlich durch die Grösse

$$f = g \cdot \frac{C \cdot r}{M \cdot v_x}$$

nach Grösse und Vorzeichen bedingt; sind r und M beide positiv oder beide negativ, so ergiebt sich Rechtsabweichung; ist nur eine der beiden Grössen negativ, Linksabweichung.

Die Zeit T eines vollen Umlaufs der Geschossspitze, also die Periode der regulären Präzession, ergiebt sich nach 25) aus $\beta_2 = 2\pi$ zu:

28) $$T = \frac{2\pi \cdot C \cdot r}{M},$$

auch diese Zeit ist variabel, und zwar nimmt T im allgemeinen ab.

b) Wir gehen über zur Beschreibung der Nutationsbewegung, also zur Deutung der Terme ϑ_n und ψ_n, welche nur bei einem Anfangsstoss auftreten:

29) $$\begin{cases} \vartheta_n = \{p_0[\sin\beta_2 - \sin(rt - \beta_1)] + q_0[\cos\beta_2 - \cos(rt - \beta_1)]\} : (r - N) \\ \psi_n = \{q_0[\sin\beta_2 - \sin(rt - \beta_1)] - p_0[\cos\beta_2 - \cos(rt - \beta_1)]\} : (r - N). \end{cases}$$

(Nutation infolge eines Anfangsstosses.)

Da diese sich zu den vorhergehenden ϑ_r und ψ_r einfach addieren, so können sie betrachtet werden als die sekundären sphärischen Koordinaten ϑ_n, ψ_n eines Koordinatensystems, dessen Ursprung O_1 (Fig. 14) mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{M}{Cr}$ auf der (ausgezogenen) Präzessionskurve wandert und den variablen Punkt P von Figur 12 und 13 ersetzt. Durch Quadrieren und Addieren wird aus 29):

$$(r - N)^2 \cdot (\vartheta_n^2 + \psi_n^2) = 2 \cdot (p_0^2 + q_0^2) \cdot [1 - \sin\beta_2 \cdot \sin(rt - \beta_1) - \cos\beta_2 \cdot \cos(rt - \beta_1)]$$

oder

30) $$O_1P = \sqrt{\vartheta_n^2 + \psi_n^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{p_0^2 + q_0^2}}{r - N} \cdot \sin\frac{rt - \beta_1 - \beta_2}{2}.$$

Die bezüglich O_1 betrachtete Bewegung des Punkts P der Geschossaxe kann somit ebenfalls wieder als ein veränderlicher Kreis auf-

gefasst werden, dessen Mittelpunkt in O_1 liegt und dessen Radius periodisch sich ändert, zuerst $= 0$ ist, dann die Maximalgrösse

$$2 \cdot \sqrt{p_0^2 + q_0^2} : (r - N)$$

annimmt, wieder Null wird etc.

Derselbe Wert von $O_1 P$ wird wieder erreicht nach der Zeit T_1, die sich ergiebt aus:

$$\frac{rt - \beta_1 - \beta_2}{2} = \pi;$$

also ist:

$$r T_1 - \frac{A - C}{A} \cdot r T_1 - \frac{M}{Cr} \cdot T_1 - \frac{M \cdot T_1}{A \cdot r} = 2\pi,$$

oder:

31) $$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr} - \frac{M}{Ar}}.$$

Da im Nennerausdruck das Glied $Cr : A$ im allgemeinen bei weitem überwiegt, so ist erstens diese Nutationsperiode T_1 im allgemeinen eine schnellere als die Präzessionsperiode; und zweitens wechselt der Sinn, in welchem die Nutationsbögen beschrieben werden, nur mit r; diese Bögen werden also bei Rechtsdrall rechtsläufig, bei Linksdrall linksläufig beschrieben, mag Rechts- oder Linksabweichung des Schwerpunkts erfolgen, mag also die Präzessionsspirale rechts- oder linksläufig beschrieben werden.

Im ganzen führt somit die Geschossspitze P bezüglich des Schwerpunkts die folgende Doppelbewegung aus: Falls kein Anfangsstoss vorhanden war, beschreibt die Geschossspitze von ihrer Anfangslage O aus mit der langsamen Periode T die spiralförmige ausgezogene Kurve Fig. 12 resp. 13, deren Windungen sich allmählich erweitern, die aber immer wieder durch O geht; bei positivem r (Rechtsdrall) und positivem Drehmoment M, ebenso bei negativem r und negativem M wird diese Spirale rechtsläufig beschrieben; wenn dagegen nur eine der beiden Grössen r, M negativ ist, linksläufig. Im allgemeinen jedoch ist diese Präzessionskurve nur die Leitkurve für die (gestrichelt gezeichneten) Nutationsbögen (Fig. 14), die von der Geschossspitze beschrieben werden, mit der schnelleren Periode T_1 und mit Amplituden, die von dem Anfangsstoss und von den Grössen r, C, A, M abhängen.

Spezieller Fall einer geradlinigen Bewegung des Schwerpunkts.

a) Die Geschossaxe falle anfangs mit der Bewegungsrichtung des Schwerpunkts zusammen.

Dieser Fall ist bei einem sehr rasanten, auf kurze Entfernung abgegebenen horizontalen Schuss aus einem kleinkalibrigen Gewehr nahezu verwirklicht; vollkommen bei einem vertikalem Schuss. Im ersteren Fall ist jederzeit $\omega = \vartheta_0 = 0$ (dasselbe ist bei vertikalem Schuss der Fall, wenn man die x-Axe, welche bisher horizontal angenommen war, mit der vertikalen zusammenfallen lässt).

In den Gleichungen 16) bis 19) ist $\omega = 0$, $\vartheta_0 = 0$ zu nehmen und es wird:

$$\begin{cases} p = C' \sin\beta_1 + D' \cos\beta_1 + N \cdot [A_1 \cos(rt - \beta_2) + B_1 \sin(rt - \beta_2)] \\ q = C' \cos\beta_1 - D' \sin\beta_1 + N \cdot [-A_1 \sin(rt - \beta_2) + B_1 \cos(rt - \beta_2)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\vartheta = \frac{C'}{r} \cos(rt - \beta_1) + \frac{D'}{r} \sin(rt - \beta_1) + A_1 \sin\beta_2 + B_1 \cos\beta_2 \\ \psi = -\frac{C'}{r} \sin(rt - \beta_1) + \frac{D'}{r} \cos(rt - \beta_1) + A_1 \cos\beta_2 - B_1 \sin\beta_2. \end{cases}$$

Für $t = 0$ ist $p = p_0$, $q = q_0$, $\vartheta = 0$, $\psi = 0$, somit:

$$A_1 = p_0 : (N - r), \quad B_1 = q_0 : (N - r); \quad C' = -r q_0 : (N - r);$$
$$D' = -r p_0 : (N - r);$$

damit erhält man genau wieder die Ausdrücke ϑ_n, ψ_n für die Nutationsbewegung infolge eines Anfangsstosses 29), nämlich:

$$32) \begin{cases} \vartheta = \{p_0 \cdot [\sin\beta_2 - \sin(rt - \beta_1)] + q_0 \cdot [\cos\beta_2 - \cos(rt - \beta_1)]\} : (r - N) \\ \psi = \{q_0 \cdot [\sin\beta_2 - \sin(rt - \beta_1)] - p_0 \cdot [\cos\beta_2 - \cos(rt - \beta_1)]\} : (r - N). \end{cases}$$

Es hat sich also in diesem Fall die frühere spiralenförmige Präzessionskurve auf den Punkt S_1 reduziert. Fig. 15 giebt die hypocykloidische Bahn der Geschossspitze in diesem Fall. Die Amplitude jedes einzelnen Teilbogens, also der Radius des umhüllenden Kreises ist wiederum:

$$2 \cdot \sqrt{p_0^2 + q_0^2} : (r - N);$$

die Periode wieder:

$$T_1 = 2\pi : \left(\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr} - \frac{M}{Ar}\right).$$

b) **Die Geschossaxe bilde anfangs den Winkel ϑ_0 mit der geradlinigen Bewegungsrichtung des Schwerpunkts.**

Die Anfangsbedingungen sind jetzt:

$$\text{für } t = 0 : \vartheta = \vartheta_0, \quad \psi = 0, \quad p = p_0, \quad q = q_0,$$

ferner: anfangs und weiterhin $\omega = 0$. Damit erhält man aus den Gleichungen 17) bis 19):

$$p_0 = D' + N \cdot A_1, \qquad -\vartheta_0 = \frac{C'}{r} + B_1,$$
$$q_0 = C' + N B_1, \qquad 0 = \frac{D'}{r} + A_1.$$

Berechnet man daraus A_1, B_1, C', D' und setzt die Werte in die Gleichungen 18) und 19) ein, so wird:

$$33) \begin{cases} \vartheta = \frac{\vartheta_0}{r - N} \cdot [r \cdot \cos\beta_2 - N \cdot \cos(rt - \beta_1)] + \vartheta_n \\ \psi = \frac{\vartheta_0}{r - N} \cdot [r \cdot \sin\beta_2 - N \cdot \sin(rt - \beta_1)] + \psi_n, \end{cases}$$

wobei ϑ_n und ψ_n wieder die früheren Werte für die Stossnutationen vorstellen.

Ist der Anfangsstoss $p_0 q_0$ Null, so fallen die Glieder ϑ_n und ψ_n weg und die Kurve 33) hat eine Gestalt ähnlich der in den Figuren 19, 20, 23, je nach Grösse und Vorzeichen von r, N etc. Es überwiegen nämlich die ersten Glieder mit $r \cdot \cos \beta_2$ und $r \cdot \sin \beta_2$ (z. B. für die schwere Feldkanone ist in nicht zu grosser Entfernung von der Mündung $r = 632$, $N = 9$); die Glieder mit $rt - \beta_1$ variieren mit wachsendem t sehr rasch zwischen -1 und $+1$, dagegen die mit β_2 langsam. Daher besteht die Bahn der Geschossspitze aus Bögen,

Fig. 15.

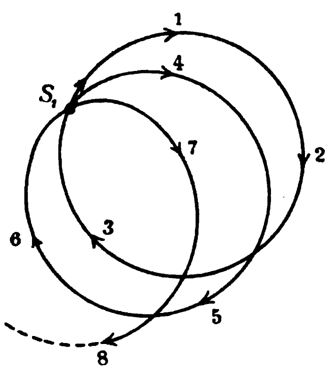
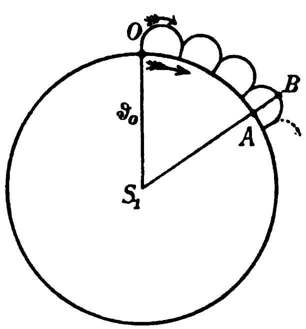


Fig. 16.



welche auf dem festen Kreis um S_1 mit Radius ϑ_0 aufsitzen. Man hat nämlich in diesem Fall durch Quadrieren und Addieren:

$$\vartheta^2 + \psi^2 = \left(\frac{\vartheta_0}{r - N}\right)^2 \cdot [r^2 + N^2 - 2Nr \cdot \cos(rt - \beta_1 - \beta_2)].$$

Anfangs und so oft wieder $rt - \beta_1 - \beta_2$ um 2π gewachsen ist, ist der Abstand der Geschossspitze von S_1 gleich ϑ_0, dabei hat zugleich der Kosinus seinen grössten, jener Abstand seinen kleinsten Wert; der grösste Wert $S_1 B$ wird erreicht, wenn der Kosinus gleich -1 ist, dann ist $S_1 B = \vartheta_0 \cdot \frac{r+N}{r-N}$; somit ist die Amplitude AB gleich:

$$\vartheta_0 \cdot \frac{r+N}{r-N} - \vartheta_0;$$

hierfür lässt sich leicht ein einfacher Näherungswert berechnen; bringt man auf eine Benennung, dividiert Nenner und Zähler mit r, entwickelt nach Potenzen des kleinen Bruchs $\frac{N}{r}$ und behält davon nur die erste Potenz bei, so wird die Amplitude

$$34) \qquad AB = 2 \cdot \vartheta_0 \cdot \frac{N}{r}.$$

Die Periode dieser stossfreien Nutationen ist wieder:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr} - \frac{M}{Ar}}.$$

Ist unter den sonst gleichen speziellen Voraussetzungen der Anfangsstoss $p_0 q_0$ nicht Null, so treten die Glieder ϑ_n und ψ_n hinzu, so dass man, je nach Grösse und Richtung von p_0 und q_0 Figuren wie in 27, 29, 34, 36 erhält.

Anmerkung. Stossfreie Nutationen erhält man übrigens auch in dem allgemeinen Fall 23) und 24), falls vorausgesetzt wird, dass schon an der Mündung die Geschossaxe und die Tangente einen kleinen endlichen Winkel α_0 mit einander bilden, also wenn für

$$t = 0; \quad \vartheta = \vartheta_0 + \varepsilon; \quad \psi = \psi_0, \quad p = p_0, \quad q = q_0$$

ist. Die Gleichungen 20) zur Bestimmung der Konstanten werden dann ein wenig andere und man erhält schliesslich:

$$\vartheta = \vartheta_r + \vartheta_n + \vartheta'_n,$$

wo ϑ_r und ϑ_n die Werte von 23) sind und

$$\left\{\begin{aligned} \vartheta'_n = & -\frac{\psi_0}{r-N}[r \cdot \sin\beta_2 - N \cdot \sin(rt - \beta_1)] \\ & + \frac{\varepsilon}{r-N}[r \cdot \cos\beta_2 - N \cdot \cos(rt - \beta_1)]. \end{aligned}\right.$$

$$\psi = \psi_r + \psi_n + \psi_n':$$

ψ_r und ψ_n siehe 24)

$$\left\{\begin{aligned} \psi'_n = & -\frac{\psi_0}{r-N}[-r \cdot \cos\beta_2 + N \cdot \cos(rt - \beta_1)] \\ & + \frac{\varepsilon}{r-N}[r \cdot \sin\beta_2 - N \cdot \sin(rt - \beta_1)]. \end{aligned}\right.$$

Eben diese Glieder ϑ'_n und ψ'_n liefern die stossfreien Nutationen.

(Schluss folgt.)

Perspektiv-Reisser.

Von

E. Brauer
in Karlsruhe.

Hierzu Tafel V und VI, Fig 1—4.

Der Perspektivreisser ist ein Zeichenapparat zur Erleichterung der Anfertigung eines perspektivischen Bildes auf Grund von zwei Parallelprojektionen eines räumlichen Objektes.

In der Darstellung Figur 1 (Taf. V) ist angenommen, dass von dem Gegenstand Grundriss und Aufriss gegeben sind. Zur Erläuterung der Arbeitsweise wurde die Spitze des Obelisk benützt, welche im Grundriss mit O_1, im Aufriss mit O_2 bezeichnet ist. Beide Punkte werden durch bewegliche Lineale berührt, O_1 durch das Grundrisslineal PO_1, welches um P drehbar ist, O_2 durch das Aufrisslineal KO_2, welches durch Schlitz und Zapfen gezwungen ist, mit der unteren Kante die Richtung durch den Zapfenmittelpunkt K einzuhalten.

Durch mechanische Verbindungen sind zwei andere Lineale gezwungen, den Bewegungen von PO_1 und KO_2 zu folgen, die senkrechte Parallelschiene M_3O_3 und die Fluchtpunktschiene FO_3. Die Lage der ersteren wird allein vom Grundriss vermittelst PO_1, die Lage der letzteren vom Aufriss vermittelst KO_2 bedingt. Der Schnittpunkt der beiden Schienenkanten M_3O_3 und FO_3, nämlich O_3 ist der gesuchte Ort des Punktes O in der Perspektive, zu dessen Darstellung nur erforderlich ist, die Lineale mit O_1 und O_2 in Berührung zu bringen und den Kreuzungspunkt der beiden Schienen mit Nadel oder Bleistiftspitze zu markieren.

Der geometrische Zusammenhang der Bewegungen stützt sich auf eine Beziehung, welche Professor G. Hauck zum ersten Male in den Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft in Berlin 1883 Nr. 8 veröffentlichte. In Figur 2 (Taf. VI) sei I ein abgegrenzter Teil der Grundrissebene, genannt Grundrisstafel, entsprechend II die Aufrisstafel, III die Perspektivtafel. A sei das Auge eines Beschauers (Projektionscentrum), P dessen Grundriss, der Fusspunkt, K dessen Aufriss, der Kernpunkt (nach Hauck). Der Strahl AK schneidet die Perspektivtafel in F, dem sogenannten Fluchtpunkte der zu II nor-

malen Geraden, während der Sehstrahl AO die Perspektivtafel im Punkte O_3, dem perspektivischen Bilde von O durchbricht.

Legt man durch AO eine zu I normale und eine zu II normale Ebene — dieselben sind in Figur 2 durch Schraffierung hervorgehoben — so ergiebt erstere in I und III die Schnitte PMO_1 und MO_3; letztere in II und III die Schnitte KLO_2 und FLO_3. Diese Geraden sind geometrisch gleichbedeutend mit den in Figur 1 (Taf. V) mit denselben Buchstaben bezeichneten Lineal- und Schienenkanten, und man erkennt, dass der Punkt M es ist, welcher PMO_1 mit MO_3 verknüpft, während der Punkt L die gleiche Rolle in Bezug auf KLO_2 und FLO_3 spielt.

Offenbar genügen diese beiden Verknüpfungen, um aus den Richtstrahlen PO_1 und KO_2 in Grundriss und Aufriss die Strahlen MO_3 und FO_3, also auch ihren Schnittpunkt O_3 geometrisch abzuleiten, ohne dabei den wirklichen Sehstrahl AO zu benutzen. Es ist also nur die Aufgabe zu lösen, diese geometrische Beziehung in einen zwangläufigen Mechanismus zu übersetzen.

Die räumliche Anordnung der drei Tafeln kann dabei nicht wohl festgehalten werden. Wir bringen sie vielmehr zur Erleichterung des Zeichnens in parallele Lage, ohne doch die Verknüpfungspunkte M und L aus dem Auge zu verlieren.

Zunächst werde die Perspektivtafel III so weit gedreht, bis III mit II parallel wird, die Grundrissspur $III\,III$ in Figur 3 also übergegangen ist in $III'\,III'$ in Figur 4 (Taf. VI). Hierbei löst sich der Verknüpfungspunkt M auf in M_1, den Punkt des Strahles PO_1, welcher am gleichen Ort bleibt und in M_3, den Fusspunkt des Lotes M_3O_3. M_1 und M_3 sind nun durch die Beziehung verknüpft, dass sie auf den Geraden $III\,III$ und $III'\,III'$ in Figur 4 (Taf. VI) liegen, und dass der Winkel M_1PM_3 stets gleich ist dem Winkel γ, um welchen III gegen II gedreht werden musste.

Auch der Punkt L ist durch diese Drehung in zwei Punkte zerfallen. L_2, dem Strahle KO_2 angehörig, deckt sich zunächst noch mit L, während L_3, an der Drehung von III teilnehmend, zunächst in eine neue Lage gelangt ist, deren Grundriss mit L' bezeichnet ist.

Dreht man nun weiter die Aufrisstafel II um ihre untere, die Perspektivtafel aus der Lage $III'\,III'$ um ihre obere Kante in gleichem Drehungssinne soweit, bis sie mit I parallel liegen, so entsteht die in Figur 4 (Taf. VI) dargestellte Lage, und zwar liegen I und II nun in gleicher Höhe, III dagegen darüber. Wie leicht einzusehen, bleiben die Punkte L_2 und L_3 an zwei senkrechte Gerade gebunden, auf denen sie sich, verschiedenen Punkten O_2 entsprechend, so verschieben, dass ihre Höhe sich stets um gleichviel beiderseits verändert, die Strecke L_2L_3 also konstant bleibt. Ersetzt man daher die Strahlen KL_2 und FL_3 durch Linealkanten, so kann zwischen L_2 und L_3 eine Verbindungs-

stange von konstanter Länge als mechanische Verknüpfung angebracht werden.

Wird ferner aus zwei Linealen PM_1 und PM_3 ein fester Winkel γ hergestellt, welcher um P drehbar ist, so kann der Arm PM_3 zur Bewegung eines in der Linie $III'III'$ laufenden Schiebers dienen, welcher mit der Parallelschiene M_3O_3 zu einem Stück vereinigt ist. Die erhöhte Lage der Perspektivtafel gewährt den freien Raum zur unbehinderten Bewegung des Grundrisswinkels M_1PM_3, doch braucht der Höhenunterschied nur einige Centimeter zu betragen.

Wie aus Figur 1 (Taf. V) ersichtlich, besitzt der Grundrisswinkel noch ein drittes zu PM_1 rechtwinkliges Lineal. Dasselbe kann dazu dienen, einen Grundriss anzuvisieren, welcher auf der rechten Seite vom Perspektivbrett liegt, und welcher gegen den links liegenden um 90^0 gedreht ist. Ein zu diesem passender Aufriss würde als Seitenriss zu bezeichnen sein. Das Aufrisswerk ist so eingerichtet, dass eine symmetrische Umstellung mit einigen einfachen Handgriffen ausführbar ist, so dass auch der Seitenriss als Grundlage für die Ausführung der Perspektive dienen kann.

Bei der technischen Durchbildung der Einzelheiten ist besonders Gewicht auf die Erzielung leichten aber doch spielfreien Ganges gelegt. Zu diesem Zweck sind alle vorkommenden Führungen so eingerichtet, dass nur eine Kante als genaue Führungskante dient, während die zweite etwas federt und nur dazu dient, die sichere Anlage des geführten Stiftes oder Schlittens an der Hauptkante zu erzwingen.

Mit Rücksicht auf körperliche Bequemlichkeit sind für die Richtlineale die unteren Kanten als Richtkanten benützt, weil sie dem Auge leichter erreichbar sind. Als Zeichenkanten der Schienen M_3O_3 und FL_3O_3 dienen jedoch die Kanten links und oben, was für Licht von links vorteilhaft ist.

Für die in Fig. 1 (Taf. V) dargestellte Anordnung ist auf die Möglichkeit verzichtet, den Winkel γ zu variieren, derselbe ist 45^0. Wird auch hierdurch die Vielseitigkeit der Benützung beschränkt, so hat anderseits der Apparat an Einfachheit gewonnen, und es ist eine besondere Einstellung entbehrlich geworden. Trotzdem ist das Bild keineswegs auf einen einzigen Fall beschränkt, da man den Grundriss in seinem Felde nicht nur verschieben, sondern auch drehen kann. Letzteres bedingt allerdings, wie das in Fig. 1 (Taf. V) gewählte Beispiel zeigt, als Aufriss eine schiefe Projektion.

Im Vergleich mit dem Hauckschen Perspektiv-Apparat und meiner früheren Ausarbeitung* desselben bleibt der Perspektiv-Reisser insofern zurück, als eine mechanische Verknüpfung zwischen zusammengehörigen Punkten O_1 und O_3 fehlt. Dieser Mangel ist jedoch

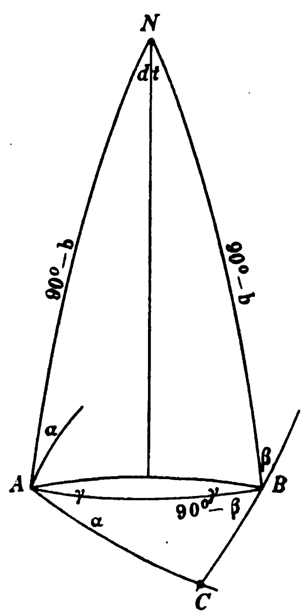
* Hauck-Brauers Perspektiv-Zeichenapparat. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure Band 35, S. 782.

weniger erheblich, als es zunächst scheinen mag, da er nur bei Kurven fühlbar wird, indem er hier eine vorhergehende Markierung zugeordneter Punkte mit der Reissschiene nötig macht. Demgegenüber ist hervorzuheben, dass der Apparat keinen besonderen Raum beansprucht, da ein gewöhnliches Reissbrett als Grundlage dient, dass die erforderlichen Handgriffe sich von denen des gewöhnlichen gebundenen Zeichnens fast gar nicht unterscheiden, ferner dass der Apparat sich auch auf schräger oder senkrechter Fläche anordnen lässt, was besonders für grosse Zeichnungen von Vorteil sein würde, endlich dass der Preis nur ein kleiner Bruchteil von dem meines früheren Apparates ist.

Über das Foucaultsche Pendel.

Von **K. Th. Vahlen** in Königsberg i. Pr.

Die Theorie des Foucaultschen Pendels wird entweder mit den Hilfsmitteln der analytischen Mechanik in voller Strenge oder in elementarer aber ganz unbefriedigender Weise gegeben, indem man von der falschen Voraussetzung ausgeht: die Schwingungsebenen in aufeinander folgenden Zeitmomenten seien parallel; während sie sich doch im Erdmittelpunkte schneiden.



Bei der fundamentalen Bedeutung des Gegenstandes wird eine hinreichend strenge und doch einfache Behandlung nicht unerwünscht sein.

Es werde zunächst ganz allgemein ein unter dem Einfluss einer Centralkraft frei schwingendes ebenes Pendel betrachtet. Eine beliebige Ortsänderung des Aufhängepunktes P ist zusammenzusetzen aus einer Bewegung des P innerhalb der Schwingungsebene E und einer Bewegung des P auf einem um das Kraftcentrum M zu E senkrecht konstruierten Kreisbogen. Bei der ersten Bewegung wird eine Veränderung der Schwingungsebene nicht eintreten; bei der zweiten wird die neue Schwingungsebene, wie die alte, auf dem Kreisbogen senkrecht stehen.

Sei nun die Centralkraft die Anziehungskraft der Erde, das Pendel nahe der Erdoberfläche über dem Punkte A aufgehängt; die Bewegung des Aufhängepunktes die aus der Erddrehung folgende. Die Breite von A sei b, die Poldistanz AN.

Es komme im Zeitmoment dt der Punkt A nach B. Die Schwingungsebene mache in A den Winkel α, in B den Winkel $\beta = \alpha + d\alpha$ mit dem

betreffenden Meridian. Der Winkel ANB in Zeitmaß ($360^0 = 24$ Stunden) ist dt; der Winkel zwischen dem Hauptkreisbogen AB und dem Parallelkreisbogen AB sei γ.

Die Bewegung des Pendels von A nach B werde zerlegt in die Bewegung von A nach C längs des Hauptkreisbogens AC, senkrecht zur Schwingungsebene in A; und in die Bewegung von C nach B längs des Hauptkreisbogens CB, senkrecht zu AC. Am Ende der ersten Bewegung wird, nach Obigem, die Schwingungsebene durch CB angegeben; bei der zweiten bleibt sie unverändert. Daraus folgt, dass CB mit dem Parallelkreisbogen BA den Winkel Kompl. β bildet. Zerlegt man das gleichschenklige Dreieck NAB in zwei rechtwinklige, so folgt aus einem derselben:

$$\operatorname{tg} \gamma = \sin b \cdot \operatorname{tg} \frac{dt}{2},$$

oder, wegen der Kleinheit der Winkel:

$$\text{I)} \qquad 2\gamma = dt \cdot \sin b.$$

Das kleine rechtwinklige Dreieck ACB kann als eben betrachtet werden und giebt:

$$\text{II)} \quad \text{Kompl.}(\alpha + \gamma) = \gamma + \text{Kompl.}\beta, \quad \text{also} \quad \beta - \alpha, \quad \text{oder} \quad d\alpha = 2\gamma.$$

Aus I) und II) folgt schliesslich:

$$\text{III)} \qquad d\alpha = dt \cdot \sin b,$$

d. h. die Pendelebene dreht sich proportional der Zeit; der Proportionalitätsfaktor ist gleich dem Sinus der Breite.

Über die kubischen und biquadratischen Gleichungen, von denen eine Wurzel durch rational ausführbare Wurzelausziehungen gefunden werden kann.

Von **K. Th. Vahlen** in Königsberg i. Pr.

Diese Gleichungen lassen sich in einfacherer Weise finden als Kummer* gezeigt hat.

Soll die kubische Gleichung $z^3 - az^2 + bz - c = 0$ (a, b, c rational) eine Wurzel

$$z_1 = \frac{a}{3} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C}$$

auf rationalem Wege liefern, so müssen $\sqrt[3]{B}$ und $\sqrt[3]{C}$ rational sein; also wird $z_1 = p$, $z_2 = q + r\sqrt{-3}$, $z_3 = q - r\sqrt{-3}$; p, q, r rational. Dann ist in der That:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{B} + \frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{C} = -\frac{a}{3} + q \pm r\sqrt{-3},$$

also

$$\sqrt[3]{B} = \frac{a}{3} - q - r, \qquad \sqrt[3]{C} = \frac{a}{3} - q + r,$$

beide rational.

---

* Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1880.

Eine biquadratische Gleichung mit der kubischen Resolvente

$$z^3 - az^2 + bz - c = 0$$

hat die Wurzeln:

$$x_1 = A + \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \quad x_2 = A + \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3},$$
$$x_3 = A - \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \quad x_4 = A - \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}.$$

Die kubische Resolvente muss zu den oben behandelten gehören, also ist $z_1 = p$, $z_2 = q + r\sqrt{-3}$, $z_3 = q - r\sqrt{-3}$; p, q, r rational. Sollen die Wurzelausziehungen in x_1 ausführbar sein, so muss $\sqrt{z_1}$ rational, $\sqrt{z_2}$ und $\sqrt{z_3}$ von der Form $\gamma' \pm \delta'\sqrt{-3}$ sein, wo γ' und δ' rational sind. Die vier Wurzeln werden:

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \gamma + \delta\sqrt{-3} \quad x_4 = \gamma - \delta\sqrt{-3},$$

wo α, β, γ, δ rational sind. Eine Gleichung mit solchen Wurzeln hat in der That die verlangte Eigenschaft; denn es wird $x_1 + x_2$ also $\sqrt{z_1}$ rational, ferner $x_1 - x_2 \pm x_3 \mp x_4$ also $\sqrt{z_2}$ und $\sqrt{z_3}$ von den Formen $\gamma' \pm \delta'\sqrt{-3}$, woraus die erforderlichen Eigenschaften auch für die kubische Resolvente folgen.

Will man Quadratwurzeln aus komplexen Zahlen vermeiden, so nehme man die Cartesischen Formeln:

$$x_1 = A + \sqrt{z_1} + \sqrt{a - z_1 + 2\sqrt{\frac{c}{z_1}}}, \quad x_2 = A + \sqrt{z_1} - \sqrt{a - z_1 + 2\sqrt{\frac{c}{z_1}}},$$
$$x_3 = A - \sqrt{z_1} + \sqrt{a - z_1 - 2\sqrt{\frac{c}{z_1}}}, \quad x_4 = A - \sqrt{z_1} - \sqrt{a - z_1 - 2\sqrt{\frac{c}{z_1}}}.$$

Setzt man, wie erforderlich:

$$z_1 = p, \quad a = p + 2q, \quad c = p(q^2 + 3r^2),$$

so wird:

$$x_1 = A + \sqrt{p} + \sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 + 3r^2}}, \quad x_2 = A + \sqrt{p} - \sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 + 3r^2}},$$
$$x_3 = A - \sqrt{p} + \sqrt{2q - 2\sqrt{q^2 + 3r^2}}, \quad x_4 = A - \sqrt{p} - \sqrt{2q - 2\sqrt{q^2 + 3r^2}}.$$

Soll x_1 sich durch ausführbare Wurzelausziehungen ergeben, so müssen ferner $\sqrt{p}$ und $\sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 + 3r^2}}$ rational sein; dann wird auch

$$\frac{\sqrt{2q - 2\sqrt{q^2 + 3r^2}}}{\sqrt{-3}} = \frac{2r}{\sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 + 3r^2}}}$$

rational, also die vier Wurzeln: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \gamma + \delta\sqrt{-3}$, $x_4 = \gamma - \delta\sqrt{-3}$; α, β, γ, δ rational. Eine Gleichung mit solchen Wurzeln hat die verlangte Eigenschaft. Denn die Wurzeln der kubischen Resolvente sind rationale Funktionen von $x_1x_2 + x_3x_4$, $x_1x_3 + x_2x_4$, $x_1x_4 + x_2x_3$, also von den Formen p, $q + r\sqrt{-3}$, $q - r\sqrt{-3}$; p, q, r rational. Ferner ist $x_1 + x_2$ und $x_1 - x_2$ also $\sqrt{p}$ und $\sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 + 3r^2}}$ rational.

Theoretische und experimentelle Untersuchungen über die Kreiselbewegungen der rotierenden Langgeschosse während ihres Fluges.

Von

Prof. Dr. Carl Cranz
in Stuttgart.

Schluss.

D. Vergleichung der vorstehenden Resultate mit denen der Kreiseltheorie.

Mit einem Kreiselapparat könnte, wenn auch etwas umständlich, die Bewegung der Geschossaxe um den Schwerpunkt S auf folgende Weise nachgeahmt werden:

Man denke sich einen Kreisel, dessen Schwerpunkt S fester Unterstützungspunkt ist, mit seiner Figurenaxe, zugleich Hauptträgheitsaxe, vertikal gestellt und in dieser Lage in rasche Rotation versetzt. Eine äussere Kraft K drücke in einem Punkt L der Axe ($SL = h_1$) auf diese, zunächst in der vertikalen Richtung durch den Schwerpunkt. Nach und nach werde die Neigung der Kraftrichtung gegen die Vertikale nach einem bestimmten Gesetz vergrössert; zugleich variiere die Grösse der Kraft und rücke der Angriffspunkt L gegen den Schwerpunkt S zu. (Unter Umständen sei auch ein seitlicher Anfangsstoss auf die Axe ausgeübt, und nehme ferner die Rotationsgeschwindigkeit des Kreisels um die Figurenaxe mit der Zeit ab.)

Bei dieser Annahme entspricht die anfängliche Richtung der Kreiselaxe der Anfangsrichtung der Flugbahntangente, die Kraft K der Luftwiderstandsresultanten, der Punkt L dem variablen Angriffspunkt dieser Resultanten auf der Axe. Man erkennt unmittelbar, dass dieses Problem wesentlich über dasjenige der gewöhnlich behandelten Kreiselbewegung hinausgeht; selbst dann, wenn man, wie es hier geschehen ist, nur den normalen Luftwiderstand, nicht auch die Reibung zwischen Luft und Geschoss berücksichtigt. Beide Probleme, das der Geschossbewegung und das der gewöhnlichen Kreiselbewegung, würden hinsichtlich der mechanischen Behandlung erst dann identisch werden, wenn der Luftwiderstand nach Grösse und Richtung konstant bliebe und in demselben Punkt der Axe angriffe, was wieder die andere Bedingung in sich schlösse, dass der Geschossschwerpunkt sich geradlinig gleichförmig bewegte.

Für diese spezielle Annahme mögen die in Betracht kommenden Resultate der Kreiseltheorie* — für die Zwecke mancher Leser etwas ausführlicher — hier zusammengestellt werden, übrigens sogleich mit den Ausdrücken der Geschossbewegung.

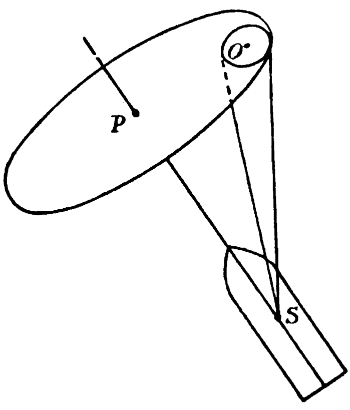
I. Bewegung im luftleeren Raum. Die Geschossaxe fällt mit der anfänglichen Rotationsaxe zusammen und ist zugleich Hauptträgheitsaxe.

In diesem Fall bleibt die Geschossaxe während des ganzen Geschossflugs sich selbst parallel. Dasselbe würde beobachtet, wenn im lufterfüllten Raum die Luftwiderstandsresultante jederzeit durch den Schwerpunkt ginge.

II. Bewegung im luftleeren Raum. Die anfängliche Rotationsaxe bildet mit der Figurenaxe und Hauptträgheitsaxe durch den Schwerpunkt einen sehr kleinen Winkel.

Den Schwerpunkt S des Geschosses denken wir uns fest oder, was auf dasselbe hinauskommt, wir folgen in Gedanken dem Geschoss und betrachten von hinten dessen Bewegung allein bezüglich des Schwerpunkts S. Man hat sich nun zwei Kreiskegel zu denken, erstens einen im Geschoss festen und mit diesem beweglichen Kegel, dessen Spitze S und dessen Axe die Figurenaxe oder Geschossaxe SP ist, zweitens einen im Raum festen Kegel SO, ebenso mit der Spitze in S; beide berühren sich nach einer gemeinschaftlichen Mantellinie. Der bewegliche Kegel SP rollt auf dem festen SO ohne zu gleiten ab; die augenblickliche gemeinschaftliche Berührungsmantellinie ist die momentane Drehaxe, um welche in dem betreffenden Moment die Drehung stattfindet. SO stellt die Richtung der Laufaxe vor (Fig. 17).

Fig. 17.



III. Bewegung im lufterfüllten Raum. Die Geschossaxe SP bildet zu irgend einer Anfangszeit den Winkel γ_0 oder S_1SO mit der Richtung S_1S des Luftwiderstands. Kein Anfangsstoss.

In den folgenden Figuren ist der Schwerpunkt S vor der Zeichnungsfläche, senkrecht über S_1 vorzustellen; P sei derjenige Punkt der

* Vergl. hierüber das vollständigste Werk: F. Klein und A. Sommerfeld, „Über die Theorie des Kreisels", Leipzig von 1897 an, B. G. Teubner, Kap. IV, §§ 1 und 2; Kap. V, § 2. (Herr A. Sommerfeld hatte die Güte, aus dieser in kurzem erscheinenden Fortsetzung einige Resultate, insbesondere die Kurventypen betreffend, dem Verfasser im voraus mitzuteilen.)

Axe, für welchen $SP = 1$ m ist; sämtliche Kurven liegen auf einer Kugelfläche um S mit Radius 1 m. Man hat vier Fälle zu unterscheiden.

a) Greift die Resultante des Luftwiderstands vor dem Schwerpunkt, also zwischen Geschossspitze und Schwerpunkt auf der Geschossaxe an, und dies ist bei der jetzt üblichen Form der Langgeschosse meistens der Fall, und ist ausserdem der Lauf mit rechtsläufig gewundenen Zügen oder Rechtsdrall versehen, so besteht die Bahn der Ge-

Fig. 18.

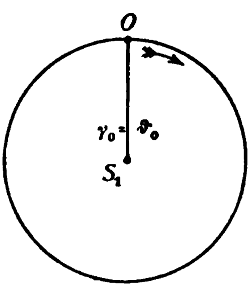


Fig. 19.

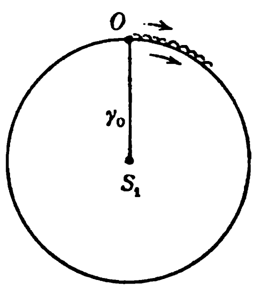


Fig. 20.

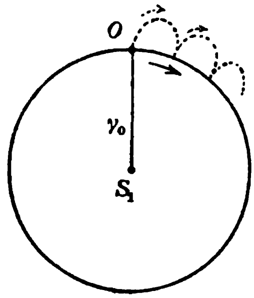


Fig. 21.

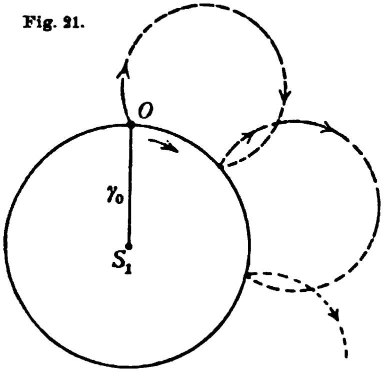


Fig. 22.

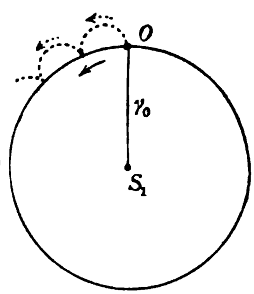
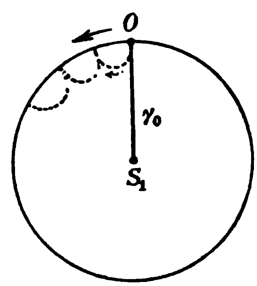


Fig. 23.



schossspitze aus den gestrichelt gezeichneten mehr oder weniger grossen Bögen (Fig. 18 bis 21), welche auf dem ausgezogen gezeichneten Grenzkreis mit Radius SO_1 oder γ_0, dem Präzessionskreis, aufstehen und nach aussen gehen.

Und zwar, falls der Bruch $(C^2r^2):(4AM)$, den wir Stabilitätsfaktor σ nennen wollen, gross ist, sind diese Bögen äusserst klein, so dass die Bahn für das Auge der Präzessionskreis selbst ist (Fig. 18). Die Richtung des ausgezogenen Pfeils giebt die Bewegungsrichtung der Geschossspitze an. Sogleich an dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass dieser konstante Kreis (Fig. 18) das Analogon zu dem veränderlichen Kreis (Fig. 12, 13, siehe 3. Heft) ist, welcher in dem allgemeineren Fall der Geschossbewegung von dem Punkt P der Geschossaxe, dem Geschossende, wie wir P heissen wollen, beschrieben wird. Wenn der Wert des Stabilitätsfaktors σ abnimmt, dadurch, dass r abnimmt oder M zunimmt, oder beides der Fall ist, so erhält man der Reihe nach die

Figuren 19 bis 21, mit immer grösser werdender Amplitude AB (Fig. 20) der Nutationsbögen. Diese Amplitude ist, wenn sie klein ist, mit genügender Annäherung gleich $\frac{2 \cdot MA}{C^2 r^2} \cdot \sin \gamma_0$; falls sie gross ist, hat man $\cos (S_1 B) = \sigma \underline{(+)} \sqrt{\sigma^2 + 1 - 2 \cdot \sigma \cdot \cos \gamma_0}$; zieht man von dem erhaltenen Winkel $S_1 B$ den Winkel $S_1 A$ oder γ_0 ab, so erhält man die Amplitude AB oder Winkel ASB.

Der Winkel $S_1 SB$ bleibt $< 90^0$, falls $\sigma > (1 : 2 \cos \gamma_0)$ ist. Wird σ noch kleiner, so fliegt das Geschoss zeitweise in einer Lage, wobei

Fig. 24.

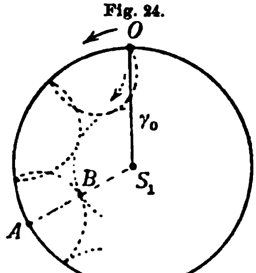


Fig. 25.

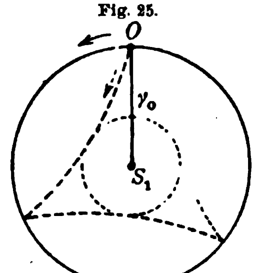


Fig. 26.

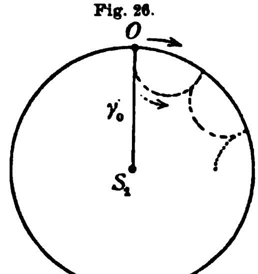


Fig. 27.

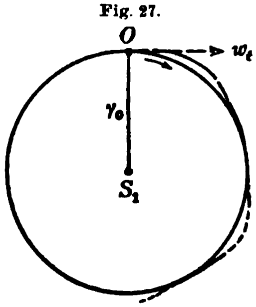


Fig. 28.

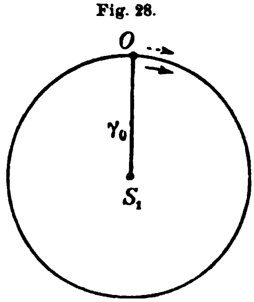
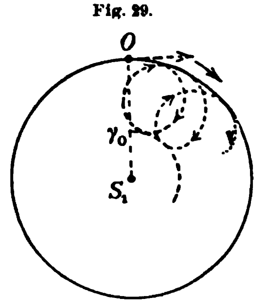


Fig. 29.



die Axe senkrecht zur Bewegungsrichtung des Schwerpunkts steht, und beginnt weiterhin, nämlich bei weiterer Abnahme von σ, sich nach hinten zu überschlagen.

b) Liegt bei Linksdrall der Angriffspunkt vor dem Schwerpunkt, so hat man ähnliche Kurvenformen wie vorhin; nur sind die beiden Pfeilrichtungen umgekehrt, wie z. B. Figur 22.

c) und d) Liegt der Angriffspunkt der Resultanten auf der Axe hinter dem Schwerpunkt, zwischen Geschossboden und Schwerpunkt, so befinden sich die Bögen der stossfreien Nutation auf der inneren Seite des Präzessionskreises (Fig. 23 bis 26). Dabei beziehen sich die drei Figuren 23 bis 25 auf den Fall der Rechtsrotation, des Rechtsdralls; man erkennt, wie mit abnehmendem Stabilitätsfaktor σ die Amplitude AB successiv wächst, wie also der die Bögen nach innen zu begrenzende Kreis kleiner und kleiner wird. Die Figur 26 dagegen, zu welcher die entsprechenden anderen für abnehmendes σ zu denken sind, bezieht sich auf den Fall des Linksdralls.

IV. Bewegung im lufterfüllten Raum. Die Geschossspitze erhalte anfangs einen zur Präzessionsbewegung (Pfeil ausgezogen) tangentiellen Stoss w_t (Pfeil gestrichelt). Dabei sei w_t positiv gerechnet, wenn die Pfeile gleichgerichtet sind, andernfalls negativ.

a) Der Anfangsstoss erfolge in derselben Richtung, in der die Präzessionsbewegung vor sich geht (w_t positiv). Man erhält der Reihe nach die Figuren 27 bis 33, falls entweder bei gleichem Wert des Stabilitätsfaktors σ die Grösse w_t des Stosses wächst oder bei gleichem Stoss σ abnimmt, oder wenn zugleich w_t wächst und σ abnimmt.

Verfolgt man diese Figuren, so bemerkt man, dass, bei gleichem σ und wachsendem w_t, anfangs die Bögen sich abflachen, dann mit

$$w_t = (Cr - \sqrt{C^2r^2 - 4AM \cdot \cos\gamma_0}) : (2A\cos\gamma_0)$$

ein nutationsloser Kreis beschrieben wird, mit einer Winkelgeschwindigkeit gleich w_t; weiterhin treten Nutationsbögen nach innen auf; der diese Bögen nach innen begrenzende, mit dem Präzessionskreis konzen-

Fig. 30.

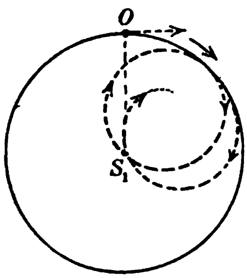


Fig. 31.

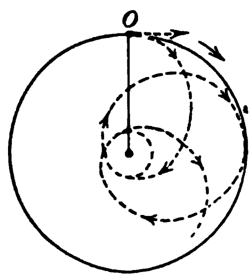
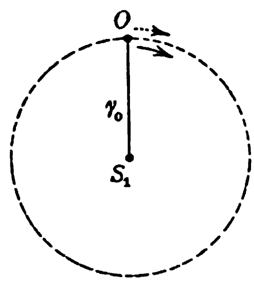


Fig. 32.



trische Kreis schnürt sich immer mehr ein, und er ist zum Punkt S_1 geworden, d. h. die Bögen gehen alle durch S_1 (Fig. 30), wenn

$$w_t = \frac{Cr}{A(1 + \cos\gamma_0)}$$

geworden ist. Von da ab erweitert sich, mit zunehmendem Stoss w_t, der innere Grenzkreis wieder und, falls $w_t = \frac{Cr}{A \cdot \cos\gamma_0}$ ist, hat man wieder reguläre Präzession (Fig. 32), jedoch wird diesmal der Grundkreis mit eben dieser grösseren Winkelgeschwindigkeit $\frac{Cr}{A \cdot \cos\gamma_0}$ zurückgelegt (man kann daher in diesem Fall den Grundkreis selbst als einen Nutationsbogen spezieller Art betrachten); wächst w_t noch mehr, so werden die Bögen immer grösser (Fig. 33), bis schliesslich das Geschoss nach hinten überschlägt, und für $w_t = \infty$ regelmässig und schnell die Geschossspitze von vorn nach hinten Rotationen um S ausführt, in einer Ebene durch S, welche den Grundkreis in O berührt.

b) Erfolgt der auf die Geschossaxe senkrecht ausgeübte Anfangsstoss tangential, aber in entgegengesetzter Richtung als die Prä-

zessionsbewegung vor sich geht, ist also w_t negativ, so werden die Nutationsbögen wiederum (bei Rechtdrall) rechtsläufig beschrieben; sie müssen also, da die Nutationsbögen immer in der Richtung des Stosses beginnen, jetzt auf der Aussenseite des Präzessionskreises liegen. Die Amplituden sind um so grösser, je grösser der Stoss, der Radius γ_0 des Grundkreises und das Luftwiderstandsmoment, ferner je kleiner $\frac{Cr}{A}$ ist. In den beiden Figuren 34 und 35 giebt wieder der ausgezogene Pfeil die Richtung der Präzessionsbewegung, der gestrichelte die Stossrichtung an. Bei absolut wachsendem Stoss z. B. wird nach und nach einmal der Fall eintreten, dass die Geschossaxe SP senkrecht zur Bewegungsrichtung SS_1 steht, und sodann der Winkel PSS_1 noch grösser wird, bis schliesslich die Geschossaxe regelmässige Rotationen um den Schwerpunkt S, von

Fig. 33.

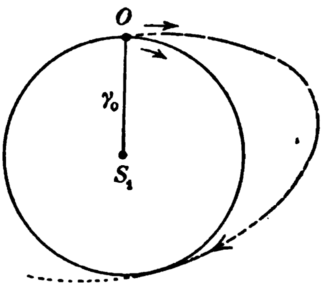


Fig. 34.

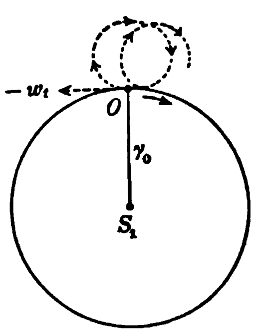
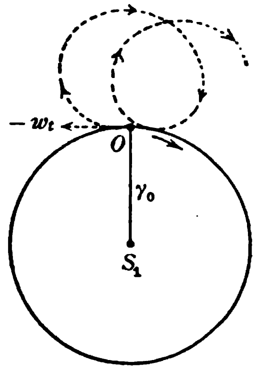


Fig. 35.



vorn nach hinten und zurück, in einer den Grundkreis berührenden Ebene durch S ausführt; dies ist der Fall für

$$w_t = -\frac{Cr}{A(1-\cos\gamma_0)}.$$

Das Verhalten der Geschossspitze in den anderen Fällen, wenn nämlich die Züge links gewunden sind oder der Angriffspunkt der Luftwiderstandsresultanten hinter S liegt oder beides zutrifft, lässt sich daraus leicht ableiten.

V. Dasselbe. Jedoch werde anfangs auf die Geschossaxe an der Spitze ein seitlicher Stoss w_s ausgeübt, welcher senkrecht zur Präzessionsbewegung gerichtet ist.

Dabei sei w_s positiv gerechnet, wenn der Stoss in der Richtung $S_1 O$, negativ, wenn er in der Richtung OS_1 erfolgte. Wiederum möge nur die Annahme: Rechtsdrall und Angriffspunkt vor dem Schwerpunkt Erwähnung finden. Immer beginnen die (gestrichelt gezeichneten) Nutationsbögen in der Stossrichtung; daher hat man jetzt gewisse mittlere Lagen derselben zwischen denen der Figuren 27 bis 33 und denjenigen der Figuren 34, 35. Ein solcher Fall ist in Figur 36 angegeben.

Die Grössenbeziehungen in allen diesen Fällen lassen sich aus den Grundgleichungen der Kreiseltheorie (Flächensatz und Satz von der lebendigen Kraft) mit c und C, als Integrationskonstanten, ableiten:

35) $$A\cdot\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2+A\sin^2\gamma\cdot\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2=-2M\cdot\cos\gamma+c-Cr^2$$

36) $$A\sin^2\gamma\cdot\frac{d\delta}{dt}=C_1-Cr\cdot\cos\gamma.$$

Hier ist γ der Winkel PSS_1 zwischen Geschossaxe SP und Richtung SS_1 des Luftwiderstandes zur Zeit t, δ der Winkel der Ebene PSS_1 mit der Anfangslage OSS_1 derselben. Die Winkelgeschwindigkeit des Anfangsstosses um den Schwerpunkt S habe die Komponenten w_t und w_s; beide Stösse seien senkrecht zur Geschossaxe SO, aber die eine w_t senkrecht zur Ebene SS_1O, die andere w_s in dieser Ebene gerichtet; w_t heisse der (bezüglich des Präzessionskreises) tangentielle Anfangsstoss, w_s der senkrechte. Man hat dann für

$$t=0:\gamma=\gamma_0,\quad \delta=0;\quad \frac{d\gamma}{dt}=w_s,\quad \frac{d\delta}{dt}=w_t.$$

Bestimmt man damit die Integrationskonstanten c und C_1 und eliminiert sodann $\frac{d\delta}{dt}$ aus 35) und 36), so erhält man die folgende

Fig. 36.

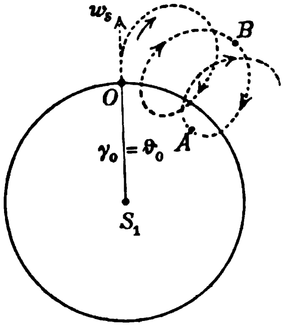
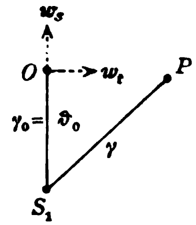


Fig. 37.



Differentialgleichung zwischen γ und t, welche für jeden Moment t den Winkel γ zwischen Geschossaxe SP und Bewegungsrichtung SS_1 des Schwerpunkts liefert:

37) $$\begin{cases} A^2\cdot\sin^2\gamma\cdot\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2=A\cdot\sin^2\gamma\cdot[2M\cdot(\cos\gamma_0-\cos\gamma)+A\cdot w_s^2+A\cdot\sin^2\gamma_0\cdot w_t^2] \\ \qquad -[A\cdot\sin^2\gamma_0\cdot w_t+Cr(\cos\gamma_0-\cos\gamma)]^2. \end{cases}$$

Denkt man sich diese Gleichung, unter Umständen mechanisch mit Hilfe des Apparats von Abdank-Abakanowitz, integriert, so giebt die Gleichung 36) für jeden Moment t den Betrag der Drehung δ der Ebene PSS_1 um SS_1.

Setzt man in 37) $\frac{d\gamma}{dt} = 0$, so erhält man die grössten und kleinsten Werte von γ; mit $\cos\gamma = u$, $\cos\gamma_0 = u_0$, $\sin\gamma_0 = u_1$ wird somit:

$$38)\quad \begin{cases} A(1-u^2)[2M(u_0-u) + A\cdot w_s^2 + A\cdot u_1^2\cdot w_t^2] \\ \quad -[A\cdot u_1^2\cdot w_t + Cr\cdot(u_0-u)]^2 = 0. \end{cases}$$

Dies ist diejenige Gleichung dritten Grades in u, deren Auflösung den kleinsten und grössten Winkel PSS_1 giebt; zwei Wurzeln u liegen nämlich zwischen -1 und $+1$; die Gleichung lässt sich schreiben:

$$39)\quad \begin{cases} u^3 - u^2(u_0 + i_1 u_1^2 + i_2 + i_3) + u(-1 + 2 i_3 u_0 + i_4 u_1^2) \\ \quad = i_3 u_0^2 + i_1 u_1^4 + i_4 u_1^2\cdot u_0 - i_2 - i_1 u_1^2 - u_0, \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung:

$$i_1 = \frac{A\cdot w_t^2}{2M},\quad i_2 = \frac{A\cdot w_s^2}{2M},\quad i_3 = 2\sigma = \frac{C^2r^2}{2MA},\quad i_4 = \frac{Cr\cdot w_t}{M}.$$

Speziell, wenn nur ein tangentieller Anfangsstoss stattfand, $w_s = 0$ war, so lässt sich in 38) der Faktor $u_0 - u$ heraussetzen, d. h. es ist in diesem Fall $\gamma = \gamma_0$ die eine Lösung von 38) oder 39), die Nutationsbögen sitzen in diesem Fall, wie es z. B. die Figuren 29 und 34 angeben, auf dem festen Präzessionskreis mit Radius γ_0 auf.

Die Gleichung 39) reduziert sich in diesem Fall auf die folgende

$$40)\quad u^2 - u(i_3 + i_1 u_1^2) = 1 - i_3 u_0 - i_4 u_1^2 + i_1 u_0 u_1^2.$$

Diejenige Wurzel $u = \cos\gamma$, welche zwischen -1 und $+1$ liegt, giebt den anderen Begrenzungskreis der Nutationsbögen.

Ist hierbei der Stoss w_t so klein, dass man Aw_t^2 gegen $2M$ vernachlässigen kann, so lässt sich für kleine Nutationsamplituden ein Näherungswert der Amplitude nach Klein und Sommerfeld so finden: man ersetzt u^2 durch den Anfangswert u_0^2 und hat, da $u_1^2 = 1 - u_0^2$:

$$-u\cdot i_3 = u_1^2 - i_4 u_1^2 - i_3 u_0$$

oder

$$\frac{u_0 - u}{u_1} = \sin\gamma_0\cdot\left(\frac{2MA}{C^2r^2} - \frac{2A}{Cr}\cdot w_t\right);$$

bezeichnet man nun die grösste Amplitude der Nutationsbögen mit ε, setzt $\gamma = \gamma_0 \pm \varepsilon$ und entwickelt für kleine ε, so ist $u = u_0 \mp u_1\cdot\varepsilon$, also

$$41)\quad \text{die Amplitude } \varepsilon = \pm\sin\gamma_0\cdot\left(\frac{2MA}{C^2r^2} - \frac{2A}{Cr}\cdot w_t\right).$$

Wenn endlich überhaupt kein Anfangsstoss stattfand, $w_s = w_t = 0$, so wird der grösste oder kleinste Wert von γ und damit die Amplitude $\gamma - \gamma_0$ berechnet aus

$$u^2 - u\cdot i_3 = 1 - i_3 u_0,$$

oder es ist für den Winkel γ dieses zweiten Begrenzungskreises:

$$42)\quad \cos\gamma = \sigma\,(+)\sqrt{\sigma^2 + 1 - 2\sigma\cdot\cos\gamma_0},$$

wobei σ der Stabilitätsfaktor $(C^2r^2):(4MA)$ ist.

Ein Näherungswert der Amplitude AB oder ε ist dann nach 41) der folgende:

$$43)\qquad \text{Amplitude} = \frac{\sin\gamma_0\cdot 2MA}{C^2r^2}.$$

Die Weiterverfolgung der Gleichungen 35) und 36) zeigt sodann, dass die durchschnittliche Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{dt}$, mit welcher der Präzessionskreis beschrieben wird, $\frac{M}{Cr}$ ist; also die Periode der Präzessionsbewegung ist

$$44)\qquad T = \frac{2\pi\cdot Cr}{M}$$

genauer ist für die langsame reguläre Präzession:

$$45)\qquad T = \frac{2\pi\cdot 2A\cdot\cos\gamma_0}{Cr-\sqrt{C^2r^2-4AM\cos\gamma_0}}.$$

Ferner wird ein Nutationsbogen bei gegebenem Stoss w_t in der Zeit beschrieben (vergl. Klein-Sommerfeld l. c.):

$$46)\qquad T_1 = \frac{2\pi\cdot A}{\sqrt{C^2r^2-4AM+A^2\cdot w_t^2u_1^2}},$$

wofür man, bei nicht sehr grossen γ_0 und w_t, meist mit genügender Annäherung nehmen kann:

$$47)\qquad T_1 = \frac{2\pi\cdot A}{\sqrt{C^2r^2-4AM}};$$

ist der Stabilitätsfaktor σ genügend gross, so erhält man hieraus, durch Reihenentwickelung nach Potenzen von $\frac{1}{\sigma}$ und Verzicht auf die höheren Potenzen von der zweiten ab:

$$48)\qquad T_1 = \frac{2\pi}{\frac{Cr}{A}-\frac{2M}{Cr}}.$$

Überblickt man nunmehr die aus der Kreiseltheorie gezogenen Resultate und die früheren Ergebnisse für die Geschossbewegung um den Schwerpunkt, so fällt unmittelbar die folgende Analogie in die Augen: Was bei der Kreiselbewegung der konstante Präzessionskreis, der (ausgezogene) Grenzkreis um S_1 mit Radius S_1O ist (Fig. 18, etc.), welcher durch die Anfangslage O des Kreiselendes P geht und an welchen die Bögen der Nutationsbewegung sich anlehnen, das ist bei der Geschossbewegung der (ebenso ausgezogen gezeichnete) veränderliche Präzessionskreis, der so variiert, dass sein Radius OM (Fig. 12, 13, 14, siehe 3. Heft dieser Zeitschr.) sich stetig vergrössert und sein Mittelpunkt nach abwärts und mehr oder weniger (bei Rechtsdrall) nach rechts rückt, der aber immer durch den Anfangspunkt O hindurchgeht; er wird in der variablen Zeit $T = 2\pi Cr : M$ beschrieben; die Nutationsbögen lehnen sich im Fall der Geschossbewegung gleichfalls an diesen variablen Kreis an.

Eben durch diese Veränderung des Präzessionskreises macht sich die Krümmung der Flugbahn geltend, also die Thatsache, dass im Verlauf der Flugbahn der Winkel zwischen der Anfangstangente und

der jeweiligen Flugbahntangente sich stetig vergrössert; und in der Unsymmetrie des Präzessionskreises bezüglich der Vertikalebene durch die Tangente ST liegt die Ursache und das bestimmende Moment der Seitenabweichung des Geschosses, so dass für letztere die Grösse f massgebend ist.

Die an die langsame Präzessionsbewegung sich anreihenden, rasch verlaufenden Nutationen sind nicht in erster Linie für die konstante Seitenabweichung,* sondern für den durchschnittlichen Gesamtwiderstand der Luft und damit für die Verzögerung bestimmend, welche der Geschossschwerpunkt erfährt; mit den Nutationen ändert sich die Schussweite und die Trefffähigkeit.

In dem speziellen Fall, wo die Flugbahn sich auf eine Gerade reduziert ($\omega = 0$), fällt das Problem der Geschossbewegung mit dem der Kreiselbewegung dann zusammen, wenn wir den Luftwiderstand nach Grösse und Richtung konstant nehmen; wie früher erwähnt, soll aber in der That in jedem der einzelnen Intervalle, in welche die Bewegung des Geschosses zerlegt wird, ein konstanter Mittelwert von M angenommen werden; somit müssen auch die betreffenden Ausdrücke beiderseits identisch sein. Wir sind also im stande, mit Hilfe der Kreiselbewegung jetzt nachträglich eine oben angekündigte kleine Korrektion an unseren früheren Formeln für die Geschossbewegung vorzunehmen: Das Gleichungssystem 14) und 15) konnte nur mit Vernachlässigung gelöst werden; es wurden z. B. die Ableitungen $\frac{df_3}{dt}$ und $\frac{df_4}{dt}$ neben $r \cdot f_4$ und $r \cdot f_3$ vernachlässigt, ausserdem fand eine Vernachlässigung in 3) und 3a) statt; dadurch entstehen Ungenauigkeiten. Die Kreiseltheorie legt es nahe, in

$$f_3 = -q_1 : r \quad \text{und} \quad f_4 = -p_1 : r$$

statt r vielmehr $\frac{Cr}{A}$ zu nehmen. Verfolgt man damit die weiteren Berechnungen, so ist in 23) und 24) statt $r - N$ zu nehmen: $\frac{Cr}{A} - N$ und statt $\beta_1 = \frac{A-C}{A} rt + \frac{M}{Ar} t$ zu setzen:

$$\beta_1 = \frac{A-C}{A} rt + \frac{M}{Cr} t.$$

Damit geht die Gleichung 31) über in

$$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{Cr}{A} - 2\frac{M}{Cr}},$$

übereinstimmend mit 48); ferner wird Ausdruck 34) zu

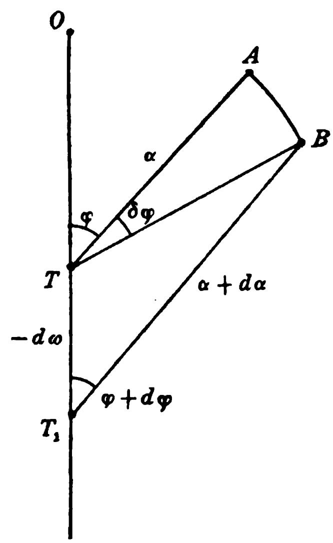
$$\frac{2 \cdot \vartheta_0 \cdot N}{\frac{Cr}{A}} \quad \text{oder zu} \quad \frac{2 \cdot \vartheta_0 \cdot A \cdot M}{C^2 r^2},$$

übereinstimmend mit 43); 28) stimmte schon zuvor mit 44). In der Zusammenstellung der Resultate sind diese Korrekturen verwertet.

* Ist die Präzessionsbewegung Null und sind die Nutationen gross, so werden dieselben Abweichungen abwechselnd nach rechts und nach links erzeugen.

Es dürfte zum Schluss dieses Abschnittes angezeigt sein, mit wenigen Worten das Näherungsverfahren zu erwähnen, welches Saint-Robert anwandte, und welches sich seitdem mit mehr oder weniger Abänderungen durch eine grössere Anzahl von Arbeiten*) hindurchzog: Der Schwerpunkt S befinde sich vor der Zeichnungsebene (Fig. 38) in der Flugbahnvertikalebene SOT. Zur Zeit t sei ST die Tangente, SA die Geschossaxe. Der Winkel zwischen der Vertikalebene SOT und der „Stossebene" SAT zur Zeit t sei φ; der Winkel zwischen Tangente ST und Axe SA (öfters Nutation genannt) sei α. Es wird zunächst, ganz analog der Kreiseltheorie, der Fall behandelt, dass die Tangente ST ihre Richtung beibehalte; zur Zeit $t + dt$ ist φ um $\delta\varphi$ gewachsen, man hat annähernd

Fig. 38.



a) $$\delta\varphi = \frac{M}{Cr} \cdot dt.$$

Nunmehr wird auch die Richtungsänderung der Tangente folgendermassen einbezogen: Zur Zeit $t + dt$ ist das Geschossende A nach B, das Tangentenende T nach T_1 gelangt, wobei

$$TT_1 = -d\omega$$

(da mit wachsendem t die Tangentenneigung ω abnimmt); der Winkel TT_1B ist jetzt $\varphi + d\varphi$; AT ist zu BT_1 oder $\alpha + d\alpha$ geworden.

Fällt man von T auf BT_1 das Lot, so hat man b) $d\alpha = -\cos\varphi \cdot d\omega$; und die Anwendung des Sinussatzes auf $\Delta\, TBT_1$ giebt, mit sehr kleinen Änderungen $d\varphi$ und $d\alpha$, die Beziehung

c) $$d\varphi = \delta\varphi - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot d\alpha = \frac{M}{Cr} \cdot dt - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot d\alpha.$$

Die Gleichung b) verwandelt sich mit der allgemeinen Beziehung

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g \cdot \cos\omega}{v}$$

für die Bewegung des Schwerpunkts ohne Rücksicht auf die Rotation (vergl. des Verfassers Kompendium S. 87) in die folgende:

---

* Comte Paul de Saint-Robert, Études sur la trajectoire que décrivent les projectiles oblongs, Paris 1860, 2. Teil. — M. Astier, essai sur le mouvement des projectiles oblongs, Paris 1873. — J. M. de Tilly, balistique, Paris 1875. — Comte de Sparre, mouvement des projectiles oblongs dans le cas du tir de plein fouet, 1875; vergl. auch Mayevski-Klussmann, über die Lösung des Problems des direkten und indirekten Schiessens. Berlin 1886, S. 77 flg.; ferner de Sparre, sur le mouvement des projectiles dans l'air, Paris 1891. — Muzeau, sur le mouvement des projectiles dans l'air; revue d'Artillerie, tome 12 (1878) p. 422 und 495; t. 13 p. 31, t. 14 p. 38; ferner Muzeau, cours d'Artillerie, balistique extérieure 1883, 1. Teil. — Auf dasselbe Verfahren läuft auch die Lösung von Résal schliesslich hinaus: Résal, mécanique générale; t. I p. 375, Gleichungen 9).

d) $$d\alpha = +\cos\varphi\cdot\frac{g\cdot\cos\omega}{v}\cdot dt;$$

diese und c) bilden die beiden Grundgleichungen. Wird aus beiden dt eliminiert, so hat man die Differentialgleichung erster Ordnung zwischen α und φ:

e) $$\frac{d(\sin\varphi)}{d\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\cdot\sin\varphi=\frac{M\cdot v}{Cr\cdot g\cos\omega}.$$

Diese lässt sich unter Zugrundelegung konstanter Mittelwerte von M, v, ω während kleiner Zeitintervalle integrieren und liefert

f) $$\sin\varphi = \frac{F}{\sin\alpha}(1-\cos\alpha);$$

wobei $F = \frac{M\cdot v}{Cr\cdot g\cdot\cos\omega}$ ist und die Integrationskonstante aus der Bedingung: $t=0$, $\varphi=0$, $\alpha=0$ bestimmt wurde. Damit ist φ als Funktion von α ausgedrückt, mit d) lässt sich somit α in Funktion von t ermitteln; es wird

g) $$2p\cdot\cos\alpha = n+\sqrt{4mp+n^2}\cdot\cos\left(\sqrt{p}\cdot\frac{g\cdot\cos\omega\cdot t}{v}\right),$$

wobei $m = 1-F^2$, $n = 2F^2$, $p = 1+F^2$.

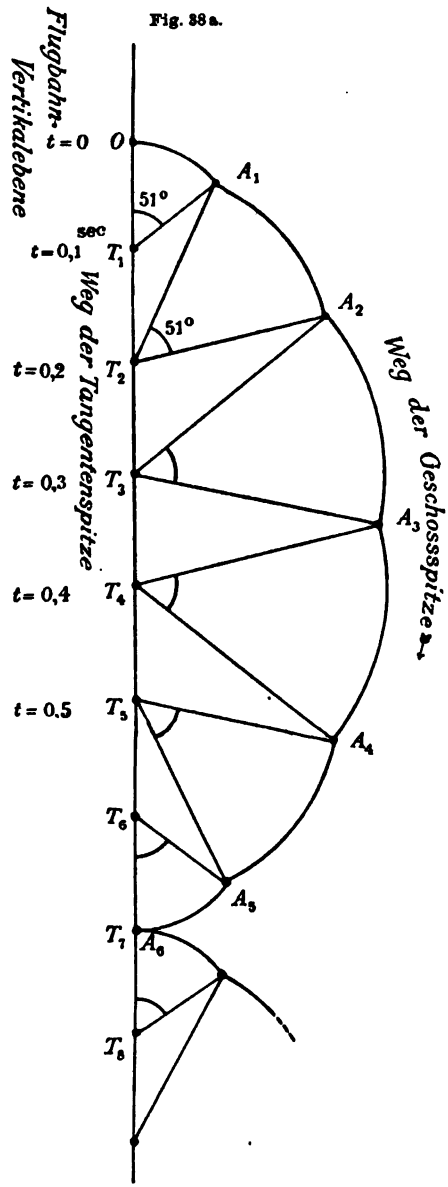
Dieses Lösungsverfahren, dessen Grundzüge wenigstens hier angedeutet sind, wurde in neuerer Zeit besonders von v. Wuich (siehe oben) näher ausgebildet.

Besonders einfach lässt sich dasselbe durch successive graphische Konstruktion durchführen. Z. B. für die deutsche schwere Feldkanone ist die Dauer eines Präzessionsumlaufs (siehe Beispiel weiter unten) crc. 0,7 Sek.; nimmt man also in dieser Zeit das Widerstandsmoment M annähernd konstant, ebenso v und $\frac{d\omega}{dt}$, so hat man folgendes: Für dt werde das konstante Zeitintervall $\Delta t = 0{,}1$ Sek. gewählt; das Ende der Tangente befindet sich zu den Zeiten $t = 0$, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4 ... in O, T_1, T_2, T_3 etc. Das Ende der Geschossaxe befand sich anfangs in O. Nach $\Delta t = 0{,}1$ Sek. hat sich die Ebene durch Geschossaxe SA und Tangente ST oder die von v. Wuich sogenannte Stossebene um den 7. Teil von 360° gedreht; man beschreibe also um T_1 einen Bogen mit Radius T_1O von crc. 51°; das Geschossende liegt jetzt in A_1; nach $\Delta t = 0{,}2$ Sek. ist die Tangente ST_2, die Geschossaxe SA_2 (Bogen um T_2 mit T_2A_1 von 51°); fährt man so fort, so erhält man die Zeichnung Figur 38a; man sieht daraus wie aus Gleichung f), dass danach in der That das Geschossende A bei Rechtsdrall stets auf der rechten Seite der Flugbahnvertikalebene $SOTT_2$... bleiben muss. (Eine ganz ähnliche Figur erhält man durch Rechnung.)

Ob dieses Resultat für die Präzessionsbewegung (denn auch hier ist es diese Bewegung, um die es sich handelt) das richtige ist, oder das Resultat des Verfassers, wonach die Geschossspitze zeitweilig nach der linken Seite übertritt, jedoch längere Zeit auf der rechten Seite verweilt, muss schliesslich der Versuch entscheiden, der allerdings

dadurch erschwert sein wird, dass, wie ich oben nachgewiesen habe, in erster Linie die Nutationen es sind, welche der Beobachtung sich darbieten. Jedoch, selbst wenn die Nutationen als sehr klein zu vernachlässigen wären, könnten Laboratoriumversuche mit geschossartigen Körpern, die in cardanischen Ringen leicht drehbar angebracht sind, wegen der Reibung nicht wohl entscheidend sein. Ich suchte weiterhin den Luftwiderstand, dessen Richtung bei Geschossen fortwährend wechselt, durch magnetische Kraft zu ersetzen; an der Axe eines Messingkreisels war eine Eisenmasse angebracht; auf diese wirkte die Anziehungskraft eines kräftigen Elektromagnetpols, der nach und nach gegenüber dem Kreisel verschoben wurde; auch hier zeigten sich volle kreisartige Präzessionspendelungen; dies würde darauf hindeuten, dass die Geschossaxe zeitweise nach der linken Seite der Flugbahnvertikalebene übertreten muss; allein auch solche Versuche können nicht entscheiden, da die Analogie mit der Mechanik der Geschossbewegung keineswegs vollständig hergestellt ist.

Fig. 38a.

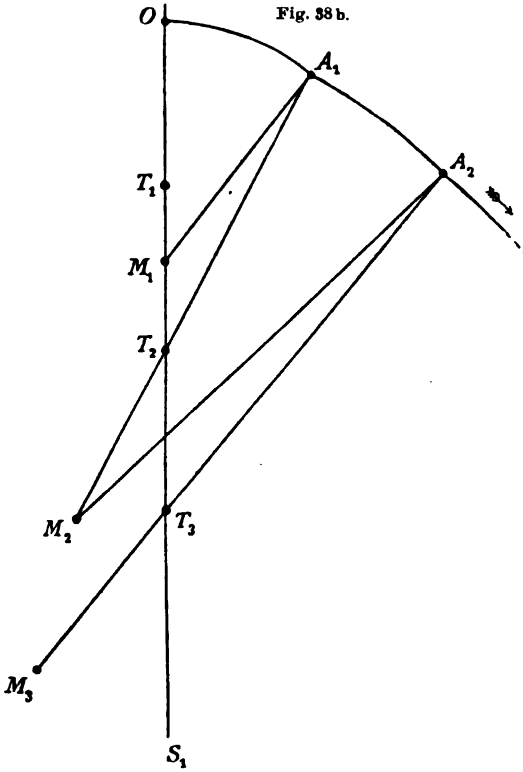


An dem Verfahren St. Roberts ist prinzipiell jedenfalls auszusetzen, dass hierbei die Annahme gemacht wird, die successiven Drehungen der Stossebene müssen um die jeweiligen Tangentenlagen herum erfolgen. Beim Kreisel erfolgt, wenn von den Nutationen abgesehen werden kann, die reguläre Präzessionsbewegung um die Richtung der diese Bewegung bewirkenden äusseren Kraft, der Schwerkraft, herum; analog muss beim Geschoss die Drehung der Stossebene um die zur Luftwiderstandsresultanten Parallelen durch den Schwerpunkt S herum, nicht aber um die jeweilige Tangente ST_1, $ST_2 \cdots$ herum vor sich gehen. Dieser Fehler ist bei unserer obigen Theorie dadurch vermieden, dass von vornherein mit den Komponenten des Luftwiderstands gerechnet wurde; auf der anderen Seite waren auch bei

des Verfassers obiger Theorie (welche, wie bemerkt, schliesslich auf Entwickelungen Poissons zurückgeht) Vernachlässigungen zum Zweck der Durchführung der Integrationen erforderlich, weshalb auch für kleine Winkel ϑ, ψ, α die Resultate der Theorie von denen der Beobachtung etwas abweichend gefunden werden könnten.

Übrigens sind die Resultate beider Theorien, derjenigen von St. Robert-Wuich und derjenigen des Verfassers, weniger von einander verschieden, als es auf den ersten Anblick scheinen könnte — falls nur die Theorie St. Roberts etwas modifiziert wird:

Fig. 38 b.



Bei der successiven graphischen Lösung, die auf der Vorstellung beruht (Fig. 38a), als ginge die Änderung der Tangentenlage ruckweise vor sich, lässt sich nämlich der erwähnte Fehler, der in der Robertschen Theorie durch das Nichtparallelsein von Tangente und Luftwiderstands-Resultanten entsteht, für den Fall, dass von den Nutationen abgesehen wird, leicht vermeiden. Man zerlege wieder (Figur 38b) die Flugzeit in aufeinander folgende etwa gleiche Zeitteilchen Δt und konstruiere wieder die aufeinander folgenden Lagen der Tangente, also SO, ST_1 ST_2, $ST_3 \cdots$, wie dieselben ohne Rücksicht auf die Rotationsbewegung in der Vertikalebene durch Schwerpunkt S (dieser vor der Zeichnungsebene gedacht) und Bewegungsrichtung von S gegeben sind zu den Zeiten 0, Δt, $2 \cdot \Delta t$, $3 \cdot \Delta t \cdots$ Zur Zeit $t = 0$ befinde sich die Geschossaxe und zugleich die Tangente in SO; es ist also noch kein Anlass zur Präzession gegeben; zur Zeit $t = \Delta t$ ist die Tangente längs ST_1 gerichtet; zu dem Winkel OST_1 oder α zwischen Tangente ST_1 und Axe SO berechne man M und suche [1.] den zugehörigen Winkel η zwischen Axe und Luftwiderstandsresultante auf; diesen Winkel η trage man als OM_1 auf der Verlängerung von OT_1 ab und beschreibe um M_1 mit Radius $M_1 O$ einen Kreisbogen OA_1, dessen Centriwinkel im Bogenmaß $= \frac{M}{C \cdot r} \cdot \Delta t$ ist.

Jetzt ist die Geschossaxe in SA_1. Nun ist aber nach $t = 2 \cdot \Delta t$ die Tangente in ST_2, der Winkel zwischen Axe und Tangente ist jetzt A_1ST_2, dazu suche man M und den zugehörigen Winkel η auf und trage den neuen Winkel η auf A_1T_2 als A_1M_2 auf, beschreibe um M_2 mit Radius M_2A_1 einen Kreisbogen A_1A_2 mit dem Centriwinkel $\frac{M}{C \cdot r} \cdot \Delta t$ u. s. f.

Bei diesem Verfahren successiver punktweiser Konstruktion der Präzessionskurve gelangt die Geschossaxe zeitweilig auf die linke Seite der Flugbahn-Vertikalebene; man erhält eine Präzessionskurve ähnlich wie in Figur 12, abgesehen davon, dass nicht notwendig die sich erweiternde Spirale immer wieder durch O gehen muss.

Man erkennt auf diese Weise, dass in der That die Resultate beider Theorien nicht so sehr von einander abweichen; es ist auch, wenn man die Bezeichnungen vergleicht, der obige von den periodischen Gliedern freie Term ψ, welcher die Seitenabweichung bestimmt, und welcher vom Verfasser mit f bezeichnet wurde, identisch mit demjenigen von Magnus de Sparre und Mayevski [2.]:

$$\delta \cdot \sin \nu = (P \cdot g) : [4 R^2 \cdot \alpha \cdot s \cdot u \cdot F(u)]$$

oder mit demjenigen von N. v. Wuich [3.]:

$$\alpha_1 = b : (a \cdot u^{n+1});$$

dabei ist jedoch darauf aufmerksam zu machen, dass bei v. Wuich u. a. unter „Nutation“ der Winkel α zwischen Tangente und Axe, also etwas anderes verstanden ist, als in der Kreiseltheorie.

Anmerkung: [1.] Mittelst der Kummerschen Formeln (des Verfassers Compendium S. 159 flg., $\operatorname{tg} \eta = X : Z$) oder mit denjenigen von v. Wuich l. c. S. 82; dazu giebt v. Wuich S. 92 die folgende Tabelle für den Winkel η zwischen Geschossaxe und Luftwiderstandsresultanten, für verschiedene Winkel α zwischen Axe und Flugbahntangente und für mehrere Geschosslängen H (in Kalibern gemessen):

für $\alpha =$	0°	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	und für
ist $\eta =$	0°	19°44′	36°55′	57°14′	66° 4′	70°53′	74°12′	76°35′	78°28′	80° 2′	88°23′	$H = 2$ Kalib.
	0°	20°44′	39°11′	60°14′	69°55′	75°11′	78°22′	80°24′	81°50′	82°52′	83°36′	$H = 2{,}5$ „
	0°	22°52′	43°12′	63°57′	70° 9′	76°28′	79° 7′	80°57′	82°18′	88°22′	84°15′	$H = 2{,}8$ „
	0°	26°38′	49°34′	68°53′	74° 0′	79°22′	81°30′	82°55′	83°56′	84°43′	85°43′	$H = 3{,}5$ „

Leider giebt diese Tabelle die Werte η nicht für kleine α (nicht zu verwenden sind hierfür die folgenden Tabellen I und II, weil II mehr empirische Daten enthält als I).

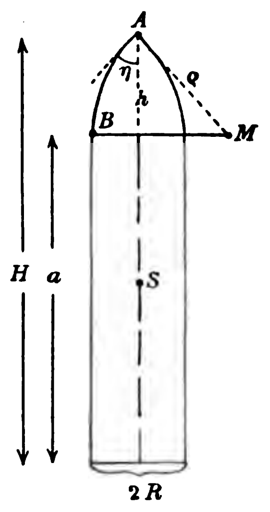
[2.] Mayevski, Über die Lösung der Probleme des direkten und indirekten Schiessens; deutsch von Klussmann, Berlin 1886 bei Mittler & Sohn, S. 77.

[3.] l. c. p. 407

E. Tabelle für die Komponenten W_p und W_s der Luftwiderstandsresultanten parallel resp. senkrecht zur Axe des Langgeschosses, sowie für die Lage des Angriffspunkts der Resultanten auf der Axe.

Die beigefügte Tabelle soll die sehr umständliche Berechnung des Luftwiderstandsmoments M erleichtern, so lange man auf eine solche Berechnung angewiesen ist. Sie ist aus den Formeln entstanden, welche Kummer bezüglich cylindrischer Geschosse mit aufgesetzter Halbkugel und mit aufgesetztem Kegel für die Komponenten W_p, W_s und für den Abstand ζ des Angriffspunkts vom Geschossboden unter der Voraussetzung berechnete, dass der normale Luftwiderstand gegen eine in der Luft bewegte ebene Fläche proportional dieser Fläche und dem Quadrat des Kosinus desjenigen Winkels sei, welchen die Flächennormale mit der Bewegungsrichtung bildet. Die Kummerschen Berechnungen zu Grunde zu legen, lag deshalb nahe, weil einerseits die betreffenden analytischen Entwickelungen in gleicher Allgemeinheit für kein anderes Gesetz durchgeführt sind und andererseits bei mehreren Vergleichen mit Beobachtungen die Formeln Kummers keine ungünstigeren Resultate ergaben, als die sind, welche aus anderweitigen mit anderen Gesetzen und unter spezielleren Annahmen aufgestellten Formeln flossen.

Fig. 39.



Als Form der Spitze des Langgeschosses ist die gegenwärtig am meisten übliche sogenannte „ogivale“ vorausgesetzt (Fig. 39); der Längenquerschnitt des Geschosses hat hierbei die Gestalt etwa eines gotischen Fensters; ist M der Mittelpunkt des Kreisbogenprofils AB, so heisst $MA = MB = \varrho$ der Abrundungsradius. Wenn die Höhe h des zugespitzten Teils des Geschosses, in Kalibern $d = 2R$ oder in Geschossradien R gemessen, gegeben ist, so ist damit zugleich der Abrundungsradius ϱ sowie der halbe Winkel η an der Spitze gegeben; es ist nämlich:

$$\text{49)} \qquad \sin\eta = \frac{h}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\eta = \frac{\frac{h}{R}}{\frac{\varrho}{R} - 1},$$

$$\text{50)} \qquad \left(\frac{h}{d}\right)^2 = \frac{\varrho}{d} - \frac{1}{4};$$

gleichwertig sind also z. B. die Angaben.

	$\frac{\varrho}{d} = 0,5$	1	1,5	2	3
und	$\frac{h}{d} = 0,5$	0,866	1,118	1,323	1,658.

Die Berechnung erfolgte durch Interpolation aus den Formeln für die aufgesetzte Halbkugel und für den aufgesetzten Kegel; für diese beiden Formen und für eine grössere Anzahl von Winkeln α zwischen Flugbahntangente und Geschossaxe wurden die numerischen Werte der betreffenden Grössen W_p, W_s, η berechnet, und sodann je für die ogivale Spitzenform ein Mittelwert zwischen den Zahlen für die Halbkugel und den Kegel genommen, entsprechend den Verhältnissen der Winkel η an der Geschossspitze bei den drei Formen; endlich wurden die übrigen Werte graphisch interpoliert. Eine Gebrauchsanweisung ist der Tabelle beigegeben. Eine Tabelle direkt für das Luftwiderstandsmoment bezüglich des Schwerpunkts liess sich deshalb nicht anlegen, weil durch Änderung der Massenverteilung im Innern eines Hohlgeschosses die Schwerpunktslage geändert werden kann; letztere muss in jedem Fall empirisch bestimmt werden; jedenfalls ist diese Bestimmung sicherer als die Berechnung.

Von Daten der Beobachtung wurden bei Aufstellung der Tabelle so viele verwertet als irgend anging; insbesondere konnten die Versuchsergebnisse von Ingalls* und die neueren Mitteilungen von Heydenreich l. c. für W_p berücksichtigt werden. Grundsätzlich wurden die Beobachtungsresultate vor den Rechnungsresultaten bevorzugt, da eine Reihe von mitbestimmenden Einflüssen von Kummer nicht mit in Rechnung gezogen werden konnten; dies gilt z. B. von dem Abfluss der Luft an dem Geschoss, der, wie Kummer selbst durch Versuche gezeigt hat, die Rechnungsergebnisse nicht unwesentlich modifiziert; es zeigte sich, dass die Versuchsreihen Kummers über die Werte η in Funktion von α durch eine gerade Linie noch besser dargestellt sind, als durch die theoretisch erhaltene Kurve; es wurde deshalb zwischen den Endwerten z einfach proportional α interpoliert.

Eine andere derartige Tabelle hat N. v. Wuich (l. c.) auf wesentlich anderer Grundlage aufgestellt; eben weil die Zahlenwerte beider Tabellen nicht wenig von einander abweichen, so schien es mir nicht unwert, diese neue Tabelle vorzulegen, die ich jedoch nur als einen Notbehelf angesehen wissen möchte, bis es nämlich Ballistikern oder Physikern möglich geworden sein wird, durch ausgedehnte Versuchsreihen, etwa nach Art der Neesenschen, genauere** empirische Tabellen aufzustellen (über deren Notwendigkeit siehe weiter unten).

* James M. Ingalls, Capitain, First Artill.: Journal of the United States Artillery, April 1895, Nr. 2, Vol. IV p. 191; vergl. auch den Auszug dieser Arbeit in der österreichischen Zeitschrift: „Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens“, Wien Jahrgang 1896, 7. Heft, S. 411.

** Die Zahlen der folgenden Tabellen sind bei der Verwendung als nur auf die erste Dezimale genau zu behandeln; die Genauigkeit ist wahrscheinlich noch geringer.

Tabelle I

für die Komponente W_s der Luftwiderstandsresultanten senkrecht zur Geschossaxe.

Man multipliziert W_0 (siehe unten) mit dem Faktor der Tabelle.

H = ganze Geschosshöhe in Kalibern, h = Höhe des zugespitzten Teils.
α = Winkel zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente.

Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	$H = 2{,}5$ Kaliber					Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	$H = 2{,}5$ Kaliber				
	$h = 0{,}5$ Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.	2 Kal.		$h = 0{,}5$ Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.	2 Kal.
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	35	1,64	1,49	1,44	1,40	1,34
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	36	1,71	1,55	1,50	1,45	1,39
2	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	37	1,78	1,61	1,56	1,50	1,44
3	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02	38	1,83	1,67	1,61	1,55	1,49
4	0,05	0,04	0,03	0,03	0,03	39	1,90	1,73	1,66	1,61	1,54
5	0,08	0,07	0,06	0,06	0,05	40	1,97	1,79	1,72	1,66	1,59
6	0,11	0,10	0,09	0,09	0,08	41	2,04	1,84	1,78	1,72	1,64
7	0,14	0,13	0,12	0,11	0,10	42	2,10	1,90	1,84	1,77	1,69
8	0,18	0,17	0,15	0,14	0,13	43	2,16	1,96	1,90	1,83	1,74
9	0,22	0,20	0,18	0,17	0,16	44	2,22	2,02	1,95	1,88	1,79
10	0,26	0,24	0,22	0,21	0,20	45	2,29	2,08	2,01	1,94	1,84
11	0,30	0,28	0,26	0,25	0,24	46	2,36	2,14	2,06	1,99	1,90
12	0,34	0,32	0,30	0,29	0,27	47	2,43	2,20	2,11	2,04	1,95
13	0,39	0,36	0,34	0,33	0,31	48	2,50	2,25	2,17	2,10	2,00
14	0,43	0,41	0,38	0,37	0,35	49	2,55	2,31	2,22	2,15	2,04
15	0,48	0,45	0,42	0,40	0,39	50	2,62	2,36	2,27	2,20	2,09
16	0,52	0,49	0,45	0,44	0,43	51	2,68	2,42	2,32	2,25	2,14
17	0,57	0,54	0,50	0,48	0,47	52	2,73	2,47	2,37	2,30	2,18
18	0,62	0,58	0,55	0,53	0,51	53	2,79	2,53	2,43	2,34	2,22
19	0,68	0,62	0,59	0,58	0,56	54	2,85	2,58	2,48	2,38	2,26
20	0,73	0,67	0,64	0,63	0,60	55	2,92	2,64	2,53	2,43	2,31
21	0,78	0,73	0,68	0,67	0,64	56	2,98	2,69	2,58	2,48	2,36
22	0,83	0,77	0,74	0,72	0,69	57	3,04	2,74	2,62	2,52	2,40
23	0,89	0,82	0,80	0,77	0,74	58	3,10	2,79	2,67	2,57	2,44
24	0,95	0,88	0,84	0,82	0,78	59	3,15	2,83	2,71	2,61	2,48
25	1,02	0,93	0,90	0,86	0,83	60	3,21	2,88	2,75	2,65	2,52
26	1,08	0,98	0,95	0,92	0,88						
27	1,14	1,04	1,00	0,97	0,93	65	3,45	3,09	2,96	2,86	2,70
28	1,19	1,10	1,06	1,02	0,99	70	3,63	3,27	3,15	3,03	2,84
29	1,25	1,15	1,12	1,08	1,04	75	3,76	3,40	3,27	3,18	2,96
30	1,32	1,21	1,17	1,14	1,09	80	3,87	3,48	3,35	3,24	3,04
31	1,38	1,27	1,23	1,19	1,14	85	3,90	3,51	3,38	3,28	3,06
32	1,45	1,33	1,28	1,24	1,19	90	3,90	3,51	3,38	3,28	3,06
33	1,52	1,39	1,33	1,29	1,24						
34	1,58	1,44	1,39	1,35	1,29						

Tabelle I (Fortsetzung).

Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	$H = 3{,}5$ Kaliber					Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	$H = 3{,}5$ Kaliber				
	h =0,5 Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.	2 Kal.		h =0,5 Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.	2 Kal.
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	35	2,21	2,05	1,97	1,90	1,82
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	36	2,30	2,14	2,05	1,98	1,90
2	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	37	2,40	2,22	2,14	2,06	1,99
3	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	38	2,49	2,31	2,23	2,15	2,07
4	0,06	0,05	0,04	0,04	0,04	39	2,58	2,40	2,32	2,23	2,16
5	0,10	0,08	0,07	0,07	0,07	40	2,67	2,49	2,40	2,32	2,24
6	0,14	0,12	0,11	0,10	0,10	41	2,77	2,58	2,48	2,40	2,32
7	0,18	0,16	0,15	0,14	0,14	42	2,87	2,67	2,56	2,48	2,42
8	0,22	0,20	0,19	0,18	0,18	43	2,97	2,76	2,65	2,57	2,48
9	0,26	0,24	0,24	0,23	0,22	44	3,07	2,85	2,74	2,65	2,56
10	0,31	0,30	0,29	0,28	0,26	45	3,16	2,94	2,83	2,73	2,64
11	0,37	0,36	0,34	0,33	0,30	46	3,25	3,04	2,92	2,83	2,72
12	0,43	0,41	0,39	0,38	0,35	47	3,35	3,13	3,00	2,92	2,80
13	0,49	0,47	0,44	0,43	0,40	48	3,44	3,21	3,09	3,01	2,89
14	0,55	0,52	0,50	0,48	0,45	49	3,54	3,30	3,17	3,08	2,98
15	0,61	0,58	0,56	0,54	0,50	50	3,63	3,38	3,25	3,17	3,06
16	0,67	0,64	0,61	0,59	0,55	51	3,72	3,46	3,34	3,25	3,15
17	0,73	0,70	0,67	0,64	0,60	52	3,81	3,55	3,42	3,34	3,23
18	0,80	0,76	0,73	0,69	0,66	53	3,90	3,64	3,50	3,42	3,31
19	0,87	0,82	0,79	0,75	0,72	54	3,99	3,73	3,59	3,50	3,39
20	0,93	0,88	0,85	0,82	0,78	55	4,08	3,80	3,68	3,58	3,47
21	1,00	0,95	0,92	0,88	0,83	56	4,16	3,87	3,75	3,66	3,56
22	1,08	1,01	0,98	0,94	0,89	57	4,24	3,95	3,83	3,74	3,64
23	1,16	1,08	1,05	1,00	0,96	58	4,33	4,04	3,91	3,82	3,71
24	1,24	1,15	1,11	1,07	1,02	59	4,41	4,12	3,97	3,88	3,78
25	1,32	1,22	1,18	1,13	1,08	60	4,49	4,19	4,04	3,95	3,84
26	1,40	1,30	1,25	1,20	1,15						
27	1,48	1,37	1,32	1,27	1,22	65	4,85	4,53	4,37	4,27	4,14
28	1,57	1,44	1,39	1,34	1,29	70	5,14	4,80	4,63	4,52	4,38
29	1,65	1,52	1,46	1,41	1,36	75	5,35	5,01	4,84	4,72	4,57
30	1,74	1,60	1,54	1,49	1,43	80	5,49	5,15	4,98	4,86	4,70
31	1,84	1,69	1,62	1,57	1,51	85	5,57	5,21	5,04	4,94	4,77
32	1,93	1,78	1,71	1,65	1,58	90	5,60	5,23	5,06	4,96	4,80
33	2,02	1,87	1,80	1,73	1,66						
34	2,12	1,96	1,88	1,82	1,74						

Anmerkung. W_0 ist der Luftwiderstand in Kilogramm gegen ein halbkugelförmig endigendes Geschoss vom Kaliber $2R$ Meter, falls dasselbe mit der Geschwindigkeit v m/sec sich derart bewegt, dass die Geschossaxe in der Flugbahntangente liegt. W_0 wird einer empirischen Tabelle entnommen. Ist der betreffenden empirischen Tabelle nicht ein Geschoss mit aufgesetzter Halbkugel ($h = 0{,}5$ Kal.) zu Grunde gelegt, sondern z. B. ein Geschoss mit $h = 1{,}3$ Kal., so ist $W_0 = \frac{1}{0{,}69} \cdot W_{1,3}$, wobei $W_{1,3}$ die von dieser empirischen Tabelle angegebene Widerstandszahl für die Geschwindigkeit v ist (und so weiter entsprechend den fett gedruckten Zahlen der ersten Zeile in Tabelle II). Z. B. ist für $R = 0{,}12$ m,

Tabelle I (Fortsetzung).

Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	$H = 4,5$ Kaliber					Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	$H = 4,5$ Kaliber				
	h = 0,5 Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.	2 Kal.		h = 0,5 Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.	2 Kal.
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	35	2,75	2,57	2,48	2,42	2,22
1	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	36	2,87	2,68	2,59	2,52	2,32
2	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01	37	2,99	2,79	2,70	2,62	2,41
3	0,06	0,05	0,04	0,04	0,03	38	3,12	2,91	2,80	2,72	2,50
4	0,09	0,08	0,07	0,07	0,06	39	3,25	3,02	2,91	2,83	2,60
5	0,13	0,12	0,11	0,11	0,10	40	3,37	3,14	3,02	2,93	2,70
6	0,16	0,16	0,14	0,14	0,14	41	3,50	3,26	3,13	3,03	2,80
7	0,21	0,20	0,19	0,19	0,18	42	3,63	3,38	3,24	3,14	2,90
8	0,26	0,25	0,24	0,23	0,22	43	3,75	3,50	3,35	3,25	3,00
9	0,32	0,30	0,29	0,28	0,27	44	3,87	3,62	3,47	3,36	3,09
10	0,37	0,35	0,34	0,34	0,33	45	4,00	3,74	3,58	3,47	3,19
11	0,43	0,41	0,40	0,40	0,39	46	4,12	3,86	3,70	3,58	3,30
12	0,50	0,48	0,47	0,46	0,44	47	4,24	3,97	3,81	3,69	3,41
13	0,57	0,55	0,54	0,53	0,50	48	4,37	4,08	3,92	3,80	3,52
14	0,65	0,63	0,61	0,60	0,56	49	4,49	4,19	4,02	3,90	3,62
15	0,73	0,70	0,68	0,67	0,62	50	4,61	4,31	4,13	4,00	3,72
16	0,80	0,77	0,75	0,73	0,68	51	4,72	4,41	4,24	4,10	3,82
17	0,88	0,85	0,82	0,80	0,74	52	4,84	4,52	4,34	4,20	3,92
18	0,96	0,92	0,89	0,87	0,81	53	4,96	4,63	4,44	4,30	4,02
19	1,04	0,99	0,96	0,94	0,87	54	5,08	4,73	4,55	4,40	4,12
20	1,12	1,07	1,03	1,01	0,94	55	5,20	4,84	4,65	4,50	4,22
21	1,21	1,15	1,12	1,09	1,01	56	5,31	4,95	4,75	4,60	4,32
22	1,30	1,24	1,21	1,18	1,09	57	5,42	5,06	4,86	4,71	4,42
23	1,41	1,33	1,30	1,26	1,17	58	5,54	5,17	4,97	4,82	4,52
24	1,51	1,43	1,39	1,35	1,25	59	5,65	5,27	5,07	4,92	4,61
25	1,61	1,53	1,48	1,44	1,33	60	5,75	5,37	5,17	5,02	4,71
26	1,72	1,63	1,57	1,53	1,41						
27	1,83	1,73	1,67	1,63	1,50	65	6,24	5,84	5,65	5,50	5,19
28	1,94	1,83	1,77	1,73	1,59	70	6,68	6,23	6,07	5,92	5,59
29	2,05	1,93	1,87	1,83	1,69	75	6,93	6,55	6,37	6,24	5,89
30	2,17	2,03	1,97	1,92	1,77	80	7,17	6,77	6,57	6,43	6,08
31	2,28	2,13	2,08	2,02	1,86	85	7,27	6,89	6,69	6,54	6,20
32	2,40	2,24	2,18	2,12	1,95	90	7,30	6,94	6,73	6,60	6,22
33	2,52	2,35	2,28	2,22	2,04						
34	2,63	2,46	2,38	2,32	2,13						

$h = 1,5$ Kal. und $v = 241$ m der normale Luftwiderstand nach der Erfahrung 45,2 kgr; also ist $W_0 = \frac{45,2}{0,66} = 68,5$ kgr; somit ist z. B. für $\alpha = 20^0$, $H = 2,5$ Kal., $h = 2$ Kal.,

$$W_s = 68,5 \cdot 0,60 = 41 \text{ kgr},$$

$$W_p = 68,5 \cdot 0,51 = 35 \text{ kgr};$$

also die Resultante $\sqrt{W_s^2 + W_p^2}$ selbst $= 54$ kgr; ferner der Tangens des Winkels zwischen Geschossaxe und Resultante gleich 41 : 35; dieser Winkel $= 50^0$ (dies

Tabelle I (Fortsetzung).

Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	$H = 5{,}5$ Kaliber					Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	$H = 5{,}5$ Kaliber				
	h = 0,5 Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.	2 Kal.		h = 0,5 Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.	2 Kal.
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	35	3,33	3,14	3,05	2,98	2,82
1	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00	36	3,48	3,30	3,19	3,10	2,95
2	0,03	0,02	0,01	0,01	0,00	37	3,63	3,43	3,32	3,23	3,08
3	0,06	0,05	0,05	0,05	0,04	38	3,78	3,57	3,46	3,37	3,20
4	0,10	0,09	0,08	0,08	0,07	39	3,93	3,71	3,60	3,52	3,33
5	0,14	0,13	0,12	0,12	0,11	40	4,07	3,85	3,74	3,65	3,47
6	0,18	0,17	0,16	0,16	0,15	41	4,22	3,99	3,88	3,78	3,60
7	0,23	0,22	0,21	0,21	0,20	42	4,37	4,14	4,00	3,92	3,72
8	0,29	0,28	0,27	0,26	0,25	43	4,52	4,28	4,14	4,05	3,84
9	0,36	0,35	0,34	0,33	0,31	44	4,66	4,41	4,28	4,19	3,97
10	0,43	0,41	0,40	0,39	0,37	45	4,81	4,56	4,41	4,31	4,10
11	0,50	0,48	0,47	0,46	0,44	46	4,98	4,70	4,54	4,45	4,22
12	0,58	0,56	0,54	0,53	0,50	47	5,15	4,85	4,68	4,58	4,33
13	0,67	0,64	0,62	0,61	0,58	48	5,31	5,00	4,83	4,71	4,45
14	0,76	0,73	0,71	0,69	0,66	49	5,46	5,14	4,97	4,85	4,58
15	0,85	0,81	0,79	0,77	0,74	50	5,61	5,29	5,10	4,98	4,70
16	0,94	0,90	0,88	0,86	0,82	51	5,75	5,42	5,22	5,10	4,81
17	1,03	0,99	0,97	0,95	0,91	52	5,90	5,55	5,35	5,21	4,93
18	1,12	1,08	1,06	1,04	1,00	53	6,04	5,69	5,47	5,33	5,05
19	1,22	1,18	1,16	1,14	1,09	54	6,19	5,81	5,60	5,42	5,18
20	1,32	1,28	1,25	1,23	1,18	55	6,33	5,98	5,75	5,61	5,31
21	1,43	1,38	1,34	1,32	1,27	56	6,47	6,09	5,87	5,72	5,42
22	1,54	1,48	1,45	1,42	1,37	57	6,61	6,22	5,99	5,83	5,53
23	1,66	1,59	1,55	1,52	1,46	58	6,75	6,36	6,12	5,96	5,64
24	1,78	1,71	1,67	1,63	1,56	59	6,88	6,49	6,25	6,09	5,74
25	1,91	1,82	1,78	1,74	1,66	60	7,00	6,60	6,38	6,20	5,85
26	2,04	1,94	1,90	1,86	1,78						
27	2,18	2,06	2,02	1,98	1,88	65	7,61	7,20	6,97	6,80	6,40
28	2,30	2,19	2,14	2,10	1,98	70	8,15	7,75	7,50	7,33	6,95
29	2,43	2,32	2,26	2,22	2,10	75	8,55	8,17	7,92	7,77	7,37
30	2,58	2,46	2,39	2,34	2,22	80	8,84	8,46	8,23	8,07	7,69
31	2,74	2,60	2,52	2,47	2,34	85	8,97	8,65	8,42	8,27	7,90
32	2,89	2,74	2,65	2,59	2,45	90	9,00	8,70	8,48	8,32	8,00
33	3,04	2,88	2,79	2,72	2,58						
34	3,19	3,01	2,92	2,85	2,70						

wenig genau). — Steht keine empirische Tabelle zur Verfügung, so nimmt man (nach Didion):

$$\begin{cases} W_0 \,(\text{in kgr}) = 0{,}027 \cdot \dfrac{\delta}{1{,}206} \cdot R^2 \pi \cdot \left(0{,}74 + \dfrac{0{,}047}{0{,}05 + 2R}\right) \cdot v^2 \\ \cdot \left[1 + \dfrac{v}{1072}\left(1 + \dfrac{v}{763}\right)\right], \end{cases}$$

wo δ = Gewicht von 1 Kubikmeter Luft am Versuchstag in Kilogramm ist, oder genauer (nach Siacci):

Tabelle II

für die Komponente W_p parallel der Geschossaxe (H beliebig).

$W_p = W_0$ mal Faktor der Tabelle.

Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	h =0,5 Kal.	1 Kaliber	1,3 Kaliber	1,5 Kaliber	2 Kaliber	2,5 Kaliber
0	1,00	0,79	0,69	0,66	0,53	0,39
1	1,00	0,79	0,69	0,66	0,53	0,39
2	1,00	0,79	0,69	0,66	0,53	0,39
3	1,00	0,78	0,69	0,66	0,53	0,39
4	1,00	0,78	0,69	0,66	0,53	0,39
5	1,00	0,78	0,68	0,66	0,53	0,39
6	1,00	0,78	0,68	0,65	0,53	0,39
7	0,99	0,77	0,68	0,65	0,53	0,39
8	0,99	0,77	0,68	0,65	0,53	0,39
9	0,99	0,77	0,67	0,65	0,52	0,39
10	0,99	0,76	0,67	0,65	0,52	0,39
11	0,99	0,76	0,67	0,65	0,52	0,39
12	0,98	0,76	0,67	0,64	0,52	0,40
13	0,98	0,75	0,66	0,64	0,52	0,40
14	0,97	0,75	0,66	0,64	0,52	0,40
15	0,97	0,75	0,66	0,63	0,52	0,40
16	0,96	0,74	0,66	0,63	0,52	0,40
17	0,96	0,74	0,65	0,63	0,52	0,40
18	0,95	0,74	0,65	0,63	0,52	0,40
19	0,95	0,73	0,64	0,62	0,51	0,40
20	0,94	0,73	0,64	0,62	0,51	0,40
21	0,93	0,72	0,64	0,62	0,51	0,40
22	0,93	0,72	0,63	0,61	0,51	0,40
23	0,92	0,71	0,63	0,61	0,51	0,40
24	0,91	0,71	0,63	0,61	0,51	0,40
25	0,91	0,70	0,62	0,60	0,51	0,41
26	0,90	0,70	0,62	0,60	0,51	0,41
27	0,89	0,69	0,62	0,60	0,51	0,41
28	0,89	0,68	0,61	0,59	0,51	0,41
29	0,88	0,68	0,61	0,59	0,50	0,41
30	0,87	0,67	0,60	0,59	0,50	0,41
31	0,86	0,66	0,60	0,58	0,50	0,41
32	0,86	0,66	0,60	0,58	0,50	0,41
33	0,85	0,65	0,59	0,58	0,50	0,41
34	0,84	0,64	0,59	0,57	0,50	0,41

Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	h =0,5 Kal.	1 Kaliber	1,3 Kaliber	1,5 Kaliber	2 Kaliber	2,5 Kaliber
35	0,83	0,64	0,58	0,57	0,50	0,41
36	0,82	0,63	0,58	0,57	0,50	0,42
37	0,81	0,62	0,57	0,56	0,49	0,42
38	0,80	0,62	0,57	0,56	0,49	0,42
39	0,79	0,61	0,57	0,56	0,49	0,42
40	0,77	0,60	0,56	0,55	0,49	0,42
41	0,76	0,59	0,56	0,55	0,49	0,42
42	0,75	0,59	0,55	0,55	0,49	0,42
43	0,74	0,58	0,55	0,54	0,49	0,42
44	0,72	0,57	0,54	0,54	0,48	0,42
45	0,71	0,57	0,54	0,53	0,48	0,42
46	0,70	0,56	0,54	0,53	0,48	0,43
47	0,69	0,55	0,53	0,52	0,48	0,43
48	0,68	0,55	0,53	0,52	0,48	0,43
49	0,66	0,54	0,52	0,52	0,48	0,43
50	0,65	0,53	0,52	0,51	0,48	0,43
51	0,64	0,53	0,51	0,51	0,48	0,43
52	0,63	0,52	0,51	0,50	0,48	0,43
53	0,62	0,51	0,50	0,50	0,47	0,43
54	0,61	0,51	0,50	0,50	0,47	0,43
55	0,60	0,50	0,49	0,49	0,47	0,44
56	0,59	0,49	0,49	0,49	0,47	0,44
57	0,57	0,49	0,49	0,49	0,47	0,44
58	0,56	0,48	0,49	0,48	0,47	0,44
59	0,55	0,47	0,48	0,48	0,47	0,44
60	0,54	0,46	0,47	0,48	0,47	0,44
65	0,49	0,44	0,45	0,46	0,46	0,45
70	0,43	0,41	0,43	0,45	0,46	0,45
75	0,38	0,38	0,41	0,43	0,45	0,46
80	0,33	0,36	0,40	0,42	0,45	0,46
85	0,29	0,34	0,39	0,41	0,44	0,46
90	0,25	0,33	0,38	0,40	0,44	0,46

$$W_0 = \frac{\delta}{1{,}206 \cdot C} \cdot \left[0{,}2002 \cdot v - 48{,}05 + \sqrt{(0{,}1648 \cdot v - 47{,}95)^2 + 9{,}6} + \frac{0{,}0442 \cdot (v - 300)}{371 + \left(\frac{v}{200}\right)^{10}} \right];$$

wobei

$$C = \frac{9{,}81 \cdot \lambda}{1000 \cdot (2\,R)^2};$$

R Kaliber in Metern, $\lambda = \frac{0{,}66}{0{,}9\,24} = 0{,}71$.

Tabelle III

für $\frac{W_s}{\sin \alpha}$; speziell für $h = 1{,}3$ Kaliber.

Man multipliziert W_0 mit dem betreffenden Faktor der Tabelle.

Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	H = 2,5 Kal.	3,5 Kaliber	4,5 Kaliber	5,5 Kaliber	Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	H = 2,5 Kal.	3,5 Kaliber	4,5 Kaliber	5,5 Kaliber
0	0,69	0,69	0,69	0,69	35	2,52	3,47	4,34	5,32
1	0,73	0,77	0,79	0,85	36	2,56	3,53	4,42	5,42
2	0,79	0,87	0,91	1,00	37	2,59	3,59	4,50	5,52
3	0,86	0,97	1,03	1,16	38	2,62	3,64	4,57	5,62
4	0,92	1,07	1,17	1,31	39	2,65	3,70	4,64	5,72
5	0,99	1,16	1,31	1,48	40	2,69	3,75	4,71	5,81
6	1,06	1,25	1,43	1,63	41	2,72	3,80	4,77	5,90
7	1,12	1,34	1,55	1,78	42	2,75	3,85	4,84	5,98
8	1,18	1,42	1,67	1,94	43	2,78	3,89	4,92	6,07
9	1,23	1,51	1,80	2,10	44	2,81	3,95	4,98	6,15
10	1,28	1,59	1,92	2,26	45	2,84	3,99	5,05	6,24
11	1,34	1,68	2,04	2,41	46	2,87	4,05	5,13	6,32
12	1,40	1,78	2,16	2,55	47	2,89	4,10	5,20	6,41
13	1,46	1,87	2,28	2,70	48	2,92	4,15	5,27	6,50
14	1,52	1,96	2,39	2,84	49	2,95	4,20	5,33	6,58
15	1,58	2,05	2,50	2,99	50	2,97	4,25	5,39	6,66
16	1,63	2,13	2,60	3,13	51	3,00	4,29	5,45	6,74
17	1,69	2,22	2,70	3,26	52	3,02	4,34	5,51	6,82
18	1,75	2,31	2,81	3,40	53	3,04	4,38	5,57	6,89
19	1,81	2,40	2,92	3,53	54	3,06	4,42	5,64	6,96
20	1,87	2,48	3,02	3,66	55	3,08	4,46	5,70	7,03
21	1,91	2,55	3,12	3,80	56	3,10	4,50	5,75	7,10
22	1,96	2,62	3,21	3,92	57	3,12	4,54	5,80	7,16
23	2,01	2,69	3,31	4,02	58	3,15	4,58	5,86	7,22
24	2,06	2,76	3,40	4,14	59	3,16	4,62	5,90	7,28
25	2,12	2,84	3,50	4,26	60	3,18	4,66	5,96	7,36
26	2,16	2,91	3,59	4,36					
27	2,20	2,98	3,68	4,48	65	3,23	4,79	6,14	7,64
28	2,24	3,05	3,76	4,60	70	3,28	4,89	6,29	7,76
29	2,28	3,12	3,85	4,70	75	3,32	4,98	6,44	8,05
30	2,33	3,18	3,93	4,80	80	3,35	5,02	6,54	8,22
31	2,36	3,23	4,01	4,90	85	3,36	5,03	6,64	8,36
32	2,41	3,29	4,09	5,01	90	3,38	5,04	6,72	8,47
33	2,45	3,35	4,17	5,11					
34	2,49	3,41	4,25	5,21					

Tabelle IV für die Lage des Angriffspunkts der Luftwiderstandsresultanten auf der Geschossaxe.

Abstand zwischen Geschossboden u. Angriffspunkt (in Kal. od. in Metern) = Höhe des cylindrischen Teils des Geschosses (in Kal. od. in Metern) mal dem Faktor der Tabelle. α = Winkel zwischen Geschossaxe und Tangente; H = ganze Geschosshöhe; h = Höhe des zugespitzten Teils, je in Kalibern gemessen.

Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	$H = 2,5$ Kaliber			
	h = 0,5 Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.
0	1,00	1,28	1,44	1,60
5	0,97	1,25	1,40	1,57
10	0,95	1,22	1,37	1,53
15	0,92	1,18	1,34	1,50
20	0,90	1,15	1,31	1,46
25	0,87	1,12	1,28	1,43
30	0,85	1,09	1,24	1,39
35	0,82	1,06	1,21	1,36
40	0,80	1,03	1,18	1,32
45	0,77	0,99	1,15	1,29
50	0,74	0,96	1,12	1,26
55	0,72	0,93	1,08	1,22
60	0,69	0,90	1,05	1,19
65	0,67	0,87	1,02	1,15
70	0,64	0,84	0,99	1,12
75	0,62	0,80	0,96	1,08
80	0,59	0,77	0,92	1,05
85	0,56	0,74	0,89	1,01
90	0,54	0,71	0,86	0,98

Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	$H = 3,5$ Kaliber				
	h = 0,5 Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.	2 Kal.
0	1,00	1,13	1,22	1,31	1,55
5	0,98	1,10	1,19	1,28	1,52
10	0,95	1,07	1,16	1,25	1,49
15	0,92	1,05	1,13	1,22	1,45
20	0,90	1,02	1,11	1,18	1,42
25	0,87	0,99	1,08	1,15	1,38
30	0,84	0,96	1,05	1,12	1,35
35	0,82	0,94	1,02	1,09	1,31
40	0,79	0,91	0,99	1,06	1,27
45	0,76	0,88	0,96	1,03	1,23
50	0,74	0,85	0,93	1,00	1,20
55	0,71	0,82	0,90	0,97	1,16
60	0,69	0,80	0,87	0,94	1,13
65	0,66	0,77	0,84	0,91	1,09
70	0,63	0,74	0,82	0,87	1,06
75	0,61	0,71	0,79	0,84	1,02
80	0,58	0,68	0,76	0,81	0,99
85	0,56	0,66	0,73	0,78	0,96
90	0,53	0,63	0,70	0,75	0,92

Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	$H = 4,5$ Kaliber					
	h = 0,5 Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.	2 Kal.	2,5 Kal.
0	1,00	1,10	1,18	1,24	1,41	1,60
5	0,97	1,07	1,15	1,21	1,27	1,56
10	0,94	1,04	1,12	1,17	1,24	1,52
15	0,92	1,02	1,09	1,14	1,20	1,48
20	0,89	0,99	1,06	1,11	1,17	1,45
25	0,86	0,96	1,03	1,08	1,13	1,41
30	0,84	0,93	1,00	1,05	1,10	1,37
35	0,81	0,90	0,97	1,02	1,06	1,33
40	0,79	0,87	0,94	0,99	1,03	1,29
45	0,76	0,84	0,91	0,95	1,09	1,25
50	0,73	0,81	0,88	0,92	1,06	1,22
55	0,71	0,79	0,85	0,89	1,02	1,18
60	0,68	0,76	0,82	0,86	0,99	1,14
65	0,65	0,73	0,79	0,83	0,95	1,10
70	0,63	0,70	0,76	0,80	0,92	1,06
75	0,60	0,67	0,73	0,76	0,88	1,02
80	0.57	0,65	0,70	0,73	0,85	0,99
85	0,55	0,62	0,67	0,70	0,81	0,95
90	0,52	0,59	0,64	0,67	0,78	0,91

Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	$H = 5,5$ Kaliber					
	h = 0,5 Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.	2 Kal.	2,5 Kal.
0	1,00	1,07	1,13	1,17	1,26	1,40
5	0,97	1,05	1,10	1,14	1,23	1,36
10	0,95	1,02	1,07	1,11	1,20	1,33
15	0,92	0,99	1,04	1,08	1,16	1,29
20	0,89	0,96	1,01	1,05	1,13	1,26
25	0,87	0,93	0,98	1,02	1,10	1,22
30	0,84	0,91	0,95	0,99	1,07	1,19
35	0,81	0,88	0,92	0,96	1,04	1,15
40	0,79	0,85	0,89	0,93	1,01	1,12
45	0,76	0,82	0,86	0,90	0,97	1,08
50	0,73	0,79	0,84	0,87	0,94	1,05
55	0,71	0,77	0,81	0,84	0,91	1,01
60	0,68	0,74	0,78	0,81	0,88	0,98
65	0,65	0,71	0,75	0,78	0,85	0,94
70	0,63	0,68	0,72	0,75	0,82	0,91
75	0,60	0,65	0,69	0,72	0,78	0,87
80	0,57	0,63	0,66	0,69	0,75	0,84
85	0,55	0,60	0,63	0,66	0,72	0,80
90	0,52	0,57	0,60	0,63	0,69	0,77

F. Zusammenstellung der Resultate.

1. In Beziehung auf den Schwerpunkt beschreibt die Geschossspitze im Verlauf der Flugbahn eine doppelte Bewegung; erstens eine langsame Präzessionsbewegung und zweitens eine schnellere Nutationsbewegung, welche ihren Ursprung meistens in einem kleineren oder grösseren seitlichen Anfangsstoss auf das Geschoss hat. Die thatsächliche Bahn, welche die Geschossspitze für einen Beobachter beschreibt, welcher dem Geschoss folgen und allein auf die Bewegung der Spitze bezüglich des Schwerpunkts S achten würde, ist danach die (gestrichelt gezeichnete) Kurve in den Figuren 40 und 41. (Diese Figuren sind sämtlich für den Fall konstruiert, dass die Züge rechts gewunden sind und der Angriffspunkt L der Luftwiderstands-

Fig. 40.

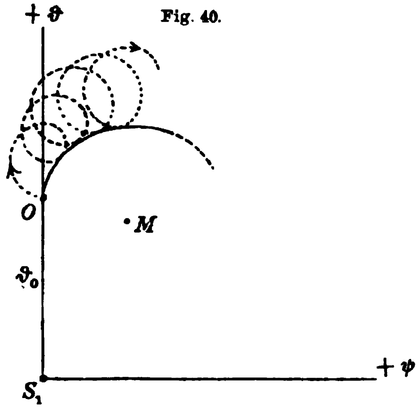
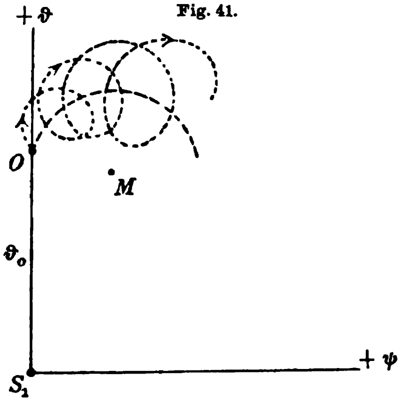


Fig. 41.



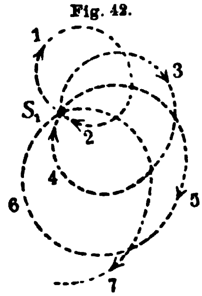
resultanten vor dem Schwerpunkt S angreift.) Die Bahn kann angesehen werden als bestehend aus einem beweglichen Kreis, dessen Radius sich vergrössert und dessen Nutationswindungen (gestrichelt) sich bei dem Fortschreiten des Mittelpunkts an die Präzessionsspirale (ausgezogen) anlehnen. Diese Präzessionskurve, als Leitkurve der Nutationsbögen, kann ihrerseits ebenfalls als ein beweglicher veränderlicher Kreis angesehen werden, dessen Radius OM sich gesetzmässig vergrössert und dessen Mittelpunkt abwärts und mehr oder weniger nach rechts (bezw. links) rückt.

Je mehr die Flugbahn der geraden Linie sich nähert, umsomehr reduziert sich die Präzessionskurve auf einen konstanten Kreis oder, falls die Geschossaxe anfangs in der Bewegungsrichtung des Schwerpunkts lag, auf einen Punkt; die Bahn der Spitze ist in diesem Fall die Hypocykloide (Fig. 42), deren Bögen von Kreisbögen im allgemeinen wenig abweichen und im Verlauf der Flugbahn sich erweitern.

Durch die **Präzessionsbewegung** wird vor allem die **Rechts-(Links-)Abweichung** des Geschosses aus der anfänglichen Schussebene bedingt: Es ist nämlich die Präzessionskurve unsymmetrisch bezüglich der Vertikalebene durch die Flugbahntangente; beginnt vom Anfangspunkt O aus die Präzessionskurve nach rechts (links), so verweilt während jedes Umlaufs die Geschossspitze längere Zeit auf der rechten (linken) Seite jener Ebene als auf der entgegengesetzten; die Folge ist die Seitenabweichung des Geschosses nach rechts (links). Ersteres, nämlich Rechtsabweichung, tritt ein, wenn die Züge rechtsgewunden sind und wenn der Angriffspunkt L der Luftwiderstandsresultanten vor dem Schwerpunkt S liegt (und wenn zugleich anderweitige Einflüsse, siehe weiter unten, von geringerem Betrag sind als der der Geschosspendelung), oder aber bei Linksdrall und Lage von L hinter S. Letzteres, Linksabweichung, erfolgt bei Linksdrall und L vor S oder bei Rechtsdrall und L hinter S.

Die **Nutationsbewegung**, welche ihre Entstehung meist einem wenn auch kleinen seitlichen Stoss auf das Geschoss an der Mündung verdankt, beginnt stets in der Richtung des Stosses und erfolgt stets in demselben Sinn, wie die Drehung des Geschosses um seine Längsaxe, also bei Rechtsdrall rechtsläufig, bei Linksdrall linksläufig, mag hierbei die Präzessionsbewegung rechts- oder linksläufig vor sich gehen, mag also Rechts- oder Linksabweichung des Schwerpunkts eintreten. Sie bleibt bestehen, wenn die Bewegung des Geschossschwerpunkts als geradlinig betrachtet werden kann oder muss, und folgt auch sonst wesentlich anderen Gesetzen, als die Präzessionsbewegung. Diese Nutationsbögen (gestrichelt) sind es meistens, nicht die Windungen der Präzessionsspiralen (ausgezogen), welche mitunter bei Geschossen mit dem blossen Auge beobachtet werden und welche bei den **Neesen**schen photographischen Aufnahmen sich zeigten. Mit der Amplitude dieser Nutationswindungen und deren sekundlicher Zahl ändert sich insbesondere die Schussweite und die **Trefffähigkeit**.

Fig. 42.

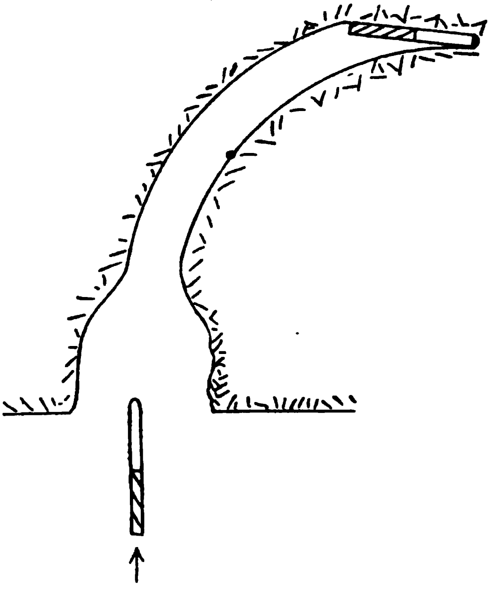


2. Die mathematischen Ausdrücke der Gesetze, welchen die beiden Arten von Geschosspendelungen unterliegen, sind die folgenden:

Man denke sich um den Schwerpunkt S des Geschosses eine Kugelfläche mit dem Radius 1 m beschrieben, welche die Flugbahntangente ST in T und die Geschossaxe in P schneide; T möge kurz das Ende der Flugbahntangente, P das Ge-

schossende heissen; durch S sei eine horizontale Äquatorebene und durch ST eine vertikale Anfangsmeridianebene gelegt. Letztere beiden Ebenen schneiden sich nach SS_1; S_1 ist der Anfangspunkt eines sphärischen Koordinatensystems, dessen horizontale ψ-Axe nach rechts und dessen vertikale ϑ-Axe nach oben positiv gerechnet sind. Der Beobachter ist vor der Zeichnungsfläche in S, also in einer solchen Stellung zu denken, dass er die Bewegung des Geschossendes P von der hinteren Seite des Geschosses her betrachtet und nach der konkaven Seite der Kugelfläche sieht. Die Koordinaten von P zur Zeit t, t Sekunden, nachdem das Geschoss die Mündung passiert hat, seien ψ und ϑ, gemessen im Bogenmass. Die Anfangslage von P sei zunächst O, $OS_1 =$ Abgangswinkel ϑ_0, zugleich anfängliche Neigung der Flugbahntangente gegen die Horizontale SS_1. Zur Zeit t sei diese Neigung $\omega = \sphericalangle\, TSS_1 = TS_1$.

Fig. 48.



Aus der vorangegangenen Lösung des ballistischen Problems ohne Rücksicht auf Rotation, etwa auf graphischem Weg (vergl. Zeitschrift f. Mathematik und Physik, 1897, S. 197, Zusammenfassung des Verfahrens) sei für jeden Augenblick die Neigung ω der Flugbahntangente bekannt, ebenso die Bahngeschwindigkeit v des Schwerpunkts in met/sec und folglich deren horizontale Projektion $v_x = v \cdot \cos\omega$. Weiter möge r die Winkelgeschwindigkeit des Geschosses um seine Längsaxe bedeuten, r positiv bei Rechtsdrall, der Anfangswert r berechnet aus

$$r = v_0 \cdot \operatorname{tg}\Delta : R = 2\pi \cdot v_0 : D,$$

v_0 die Mündungsgeschwindigkeit des Schwerpunkts, D Dralllänge, $2R$ der Durchmesser oder das Kaliber des Geschosses, beide in Metern, Δ Drallwinkel, d. h. Winkel zwischen Laufaxe und ebener Abwickelung der Züge; da über die eventuelle Abnahme von r mit der Zeit keine Beobachtungen vorliegen, so bleibt nichts übrig, als r konstant anzunehmen, wie es bisher bei den Berechnungen stets geschehen ist. — Weiter

seien A und C die beiden Hauptträgheitsmomente des Geschosses, C um die Längsaxe, A um eine Senkrechte dazu durch den Schwerpunkt, — [am besten beide Werte durch Schwingungsversuche ermittelt; Näherungswerte nach v. Wuich* berechnet mittelst

$$C = \frac{P}{9{,}81} \cdot \frac{R^2}{2}; \quad \frac{A}{C} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4 \cdot \mathfrak{h}_r^2}{3}\right),$$

wo $\mathfrak{h}_r$ die sogenannte reduzierte Geschosshöhe, in Kalibern gemessen, d. h. die Höhe eines mit dem Geschoss gleich schweren Cylinders von gleichem Kaliber und Stoff; $\mathfrak{h}_r$ erhält man, wenn man von der in Kalibern gemessenen Gesamthöhe des Geschosses $\frac{4}{10}$ Kaliber abzieht; P das Geschossgewicht in Kilogramm]. — Der variable Winkel zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente, also Winkel TSP sei α, Anfangswert von α zunächst $= 0$; der variable Abstand zwischen Schwerpunkt S und Angriffspunkt der Luftwiderstandsresultanten sei h_1 (hierfür vergl. Tabelle IV, deren Gebrauch durch den beigefügten Text erläutert ist); die Luftwiderstandskomponente senkrecht zur Geschossaxe W_s, parallel dazu W_p (hierfür vergl. Tabelle I und II, ferner für $W_s : \sin\alpha$ Tabelle III, Anfangswert von $W_s : \sin\alpha$ für $\alpha = 0$ ist gleich dem von W_p);

$$\frac{W_s \cdot h_1 \cdot \cos\omega}{\sin\alpha}$$

sei als Luftwiderstandsmoment M bezeichnet.

Endlich sollen p_0 und q_0 die Komponenten einer Winkelgeschwindigkeit bedeuten, welche im Anfang der Flugbahn, also an der Mündung, ein seitlicher Stoss auf die Axe erzeugte, und zwar bezieht sich p_0 auf eine Drehung um eine zur Axe Senkrechte durch S, welche horizontal und senkrecht zur Schussebene verläuft, dabei p_0 positiv gerechnet, wenn der Stoss die Axe in ihrer Anfangslage SO so zu drehen sucht, dass das vordere Ende O sich senkt; q_0 bezieht sich auf eine Drehung um eine zur Geschossaxe Senkrechte, welche in der Schussebene liegt, und wird positiv gerechnet, wenn der Stoss das Geschossende P, das anfangs in O liegt, horizontal nach links zu führen bestrebt ist. (Da keine Beobachtungen über diesen Anfangsstoss vorliegen, so können vorläufig nur Annahmen über Grösse und Richtung des Stosses gemacht werden; siehe darüber weiter unten.)

Die Bahn des Geschossendes P mit den Koordinaten ϑ und ψ (Breite und Länge) ist dann durch die Gleichungen gegeben:

---

* Ritter N. v. Wuich, l. c., Heft III, S. 376 und 120.

$$\text{I)}\begin{cases} \vartheta = \vartheta_r + \vartheta_n, \text{ wobei} \\ \quad \vartheta_r = \omega + f \cdot \sin\beta_2 + \cos\beta_2 \cdot (\vartheta_0 - \omega) \\ \quad \vartheta_n = \{p_0[\sin\beta_2 - \sin(rt-\beta_1)] + q_0[\cos\beta_2 - \cos(rt-\beta_1)]\} \\ \qquad\qquad : \left(\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}\right); \\ \psi = \psi_r + \psi_n, \text{ wobei} \\ \quad \psi_r = f - f \cdot \cos\beta_2 + \sin\beta_2(\vartheta - \omega) \\ \quad \psi_n = \{q_0[\sin\beta_2 - \sin(rt-\beta_1)] - q_0[\cos\beta_2 - \cos(rt-\beta_1)]\} \\ \qquad\qquad : \left(\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}\right) \end{cases}$$

mit den Abkürzungen:

$$\beta_1 = \frac{A-C}{A} \cdot rt + \frac{M}{Cr} \cdot t; \quad rt - \beta_1 = \left(\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}\right)t;$$

$$\beta_2 = \frac{M}{Cr}t; \quad f = \frac{Cr}{M} \cdot \frac{g}{v_x}.$$

Wenn dagegen die Geschossaxe SP mit der Tangente SO einen kleinen Winkel α_0 bildet, der von Null verschieden ist, wenn nämlich der anfängliche Neigungswinkel der Tangente ϑ_0, derjenige der Geschossaxe $\vartheta + \varepsilon$ gegen den Horizont und $\psi = \psi_0$ für $t = 0$ ist, also $\alpha_0 = \sqrt{\varepsilon^2 + \psi_0^2}$, so ist zur Zeit t:

$$\text{Ia)} \quad \begin{cases} \vartheta = \vartheta_r + \vartheta_n + \vartheta'_n, \\ \psi = \psi_r + \psi_n + \psi'_n, \end{cases}$$

wo ϑ_r, ϑ_n, ψ_r, ψ_n dasselbe wie vorhin bedeuten und wobei

$$\begin{cases} \vartheta'_n = + \dfrac{\varepsilon}{\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}} \cdot \left(\frac{Cr}{A} \cdot \cos\beta_2 - \frac{M}{Cr} \cos(rt - \beta_1)\right) \\ \qquad - \dfrac{\psi_0}{\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}} \cdot \left(\frac{Cr}{A} \cdot \sin\beta_2 - \frac{M}{Cr} \sin(rt - \beta_1)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi'_n = \dfrac{\psi_0}{\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}} \cdot \left(\frac{Cr}{A} \cdot \cos\beta_2 - \frac{M}{Cr} \cos(rt - \beta_1)\right) \\ \qquad + \dfrac{\varepsilon}{\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}} \cdot \left(\frac{Cr}{A} \sin\beta_2 - \frac{M}{Cr} \sin(rt - \beta_1)\right) \end{cases}$$

Wenn im folgenden nichts besonderes bemerkt ist, ist vorauszusetzen, dass $\alpha_0 = 0$ sein soll.

Man berechnet die Bahn in mehreren kleinen Zeitintervallen 0 bis t_1, t_1 bis t_2 etc.; in jedem einzelnen Intervall wird je ein zugehöriger Mittelwert von M als konstant vorausgesetzt. Die Kurve besteht aus zahlreichen, von Kreisen im allgemeinen wenig verschiedenen Hypocykloidenbögen (gestrichelt), welche längs der Präzessionsspiralen (ausgezogen) als Leitkurve sich fortbewegen. Diese Spirale beginnt im all-

gemeinen Fall in O berührend zur $S_1\vartheta$-Axe und verläuft in Windungen, welche unsymmetrisch zur $S\vartheta$-Axe liegen, stets aber wieder durch O gehen; die Spirale wird rechtsläufig beschrieben, falls M und r beide positiv oder beide negativ sind, dagegen linksläufig, wenn eine dieser Grössen negativ ist. Diese Präzessionsspirale $\vartheta = \vartheta_r$, $\psi = \psi_r$ kann betrachtet werden als entstanden durch die Veränderung eines Kreises, der stets durch O geht, dessen Radius zur Zeit t die Grösse hat:

$$\text{II)} \qquad OM = \sqrt{f^2 + (\vartheta_0 - \omega)^2}$$

und dessen Mittelpunkt M die Koordinaten $\psi_M = f$, $\vartheta_M = \omega$ besitzt. Die Anfangslage des Kreismittelpunkts ist:

$$\text{III)} \qquad \psi_{M_0} = \frac{g}{v_0 \cos^2 \vartheta_0} \cdot \frac{Cr}{W_p \cdot h_1}, \quad \vartheta_{M_0} = \vartheta_0,$$

wobei für h_1 hier der Wert aus Tabelle IV für $\alpha = 0$ zu nehmen ist.

Die Hypocykloiden- oder Nutationsbögen $\vartheta = \vartheta_n$, $\psi = \psi_n$ werden stets im Sinn von r beschrieben; sie beginnen in O in der Richtung des Anfangsstosses $p_0 q_0$.

Die variable Zeit, in welcher eine Windung der Präzessionsspiralen vollendet wird, oder die Präzessionsperiode, ist

$$\text{IV)} \qquad T = \frac{2\pi \cdot Cr}{M}.$$

So oft t um T gewachsen ist, wird ψ_r wieder $= 0$, ϑ_r wieder $= \vartheta_0$. Ferner je nach Verfluss der halben Periode, so oft also t um $\frac{1}{2} T$ gewachsen ist, wird $\psi_r = 2f$,

$$\vartheta_r = \omega - (\vartheta_0 - \omega);$$

in der Mitte des Umlaufs befindet sich somit das Geschossende noch um $2f$ rechts von der Ebene OSS_1; diese Grösse $2f$ ist folglich für die Seitenabweichungen massgebend.

Die meistens schnellere Periode für die Nutationsbögen ist (vom Anfangsstoss nahezu unabhängig, siehe darüber Gleichung 46):

$$\text{V)} \qquad T_1 = \frac{2\pi \cdot A}{\sqrt{C^2 r^2 - 4AM}}.$$

Der Bruch $T : T_1$ giebt an, wie viel Nutationsumläufe auf einen Präzessionsumlauf kommen.

Die Amplitude der Präzessionswindungen ist in jedem Augenblick angegeben durch den Radius

$$OM = \sqrt{f^2 + (\vartheta_0 - \omega)^2}$$

jenes variablen Kreises; danach nimmt dieselbe zu mit $\vartheta_0 - \omega$, also mit der Krümmung der Flugbahn, ferner mit $C \cdot r$, nimmt

dagegen ab mit zunehmendem Luftwiderstandsmoment M und der Geschwindigkeit v_r.

Die Amplitude AB eines Nutationsbogens (Fig. 43) ist zur Zeit t:

VI) $$\text{Amplitude} = \frac{2 \cdot s_0}{\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}},$$

wobei s_0 die Winkelgeschwindigkeit des Anfangsstosses ist,

$$s_0 = \sqrt{p_0^2 + q_0^2};$$

die Weiten dieser Bögen werden also bei derselben Flugbahn immer grösser, da im Verlauf der Flugbahn M grösser wird (h^1 kleiner, aber $\cos \omega$ und $W_s : \sin \alpha$ grösser); bei verschiedenen Flugbahnen sind diese Bögen um so grösser, insbesondere je kleiner $Cr : A$ und je grösser s_0 ist (da das erste Glied des Nenners überwiegt), also z. B. je länger das Geschoss, je kleiner die Rotationsgeschwindigkeit und je grösser der Anfangsstoss ist.

Falls dagegen der anfängliche Winkel α_0 zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente nicht Null ist, so kommt ausserdem die Amplitude stossfreier Nutation hinzu, welche davon herrührt, nämlich:

VIa) $$\text{Amplitude annähernd} = \frac{2 \cdot M \cdot A}{C^2 r^2} \cdot \alpha_0;$$

über das Vorzeichen vergl. D. III, IV, V.

Die vorstehende Lösung ist abgeleitet und daher vorläufig giltig nur für solche Fälle, wo der Abgangswinkel ϑ_0 und damit die Flugzeit sehr klein sind und wo die Beobachtung, z. B. an Durchschlägen, gezeigt hat, dass die Winkel zwischen Tangente und Geschossaxe dauernd ebenfalls sehr klein ausfallen.

Für grössere Winkel lässt sich das folgende graphische Verfahren anwenden: Es stelle (Fig. 38b) OS_1 wieder die zur Zeichnungsfläche senkrechte Flugbahn-Vertikalebene vor, in welcher sich vorn der festgedachte Schwerpunkt S befinde. Es werden für aufeinanderfolgende kleine, etwa gleiche Zeitintervalle Δt die Lagen der Flugbahntangente SO, ST_1, ST_2, ST_3 ... wie oben angegeben bestimmt. Man berechne nun zu Winkel OT_1 als α den Wert M und suche den zu α zugehörigen Winkel η zwischen Geschossaxe und Luftwiderstandsresultante auf (vergl. S. 183 Anmerk. 1), diesen Winkel η trage man als OM_1 auf der Verlängerung von OT_1 auf, beschreibe um M_1 mit dem Radius M_1O einen Kreisbogen OA_1, dessen Centriwinkel OM_1A_1 im Bogenmaß gemessen gleich $\frac{M}{C \cdot r} \cdot \Delta t$ ist. Zu

Winkel $A_1 T_2$ als neuem Wert von α berechne man neuerdings das Moment M und suche den zu $\alpha = A_1 T_2$ gehörigen Winkel η auf; das neue η wird als $A_1 M_2$ auf der Verlängerung von $A_1 T_2$ aufgetragen und um M_2 mit Radius $M_2 A_1$ ein Kreisbogen $A_1 A_2$ beschrieben, dessen Centriwinkel gleich $\frac{M}{Cr} \cdot \Delta t$ ist und so fort. Man erhält auf solche Weise, aus Kreisbogenelementen zusammengesetzt, die Präzessionskurve in dem Fall, dass man von den Nutationen abstrahieren kann. Diese selbst folgen der Präzessionskurve als der Leitkurve.

Spezielle Fälle.

1. Wenn die Flugbahn als geradlinig betrachtet werden kann, etwa horizontal in der Richtung SS_1 und wenn anfangs die Geschossaxe SO gegen diese Richtung den kleinen Winkel ϑ_0 bildete (Figuren 16 und 40, 41), so ist durchweg $\omega = 0$, $f = 0$; der früher variable Mittelpunkt des Präzessionskreises liegt jetzt konstant in S_1; die Präzessionsspirale reduziert sich auf den zur vertikalen Schussebene OSS_1 symmetrischen, konstanten Kreis um S_1 mit Radius SO gleich Winkel ϑ_0; zu konstanten einseitigen Seitenabweichungen ist also, allein durch die Präzessionsbewegung wenigstens, kein Anlass gegeben.

Die Perioden T und T_1 sind dieselben IV) und V) wie oben; ebenso die Amplituden VI) und VIa) der kleinen Nutationen.

Die Amplituden grosser Nutationen lassen sich angenähert folgendermaßen berechnen:

a) Falls kein Anfangsstoss stattfand, so ist die Amplitude, im Bogenmaß gemessen, gleich $\pm (x - \vartheta_0)$, wobei x aus

$$\text{VII)} \qquad \cos x = \sigma \overset{(+)}{-} \sqrt{\sigma^2 + 1 - 2 \cdot \sigma \cdot \cos \vartheta_0}$$

zu berechnen ist und σ den „Stabilitätsfaktor $\frac{C^2 r^2}{4 M A}$ bedeutet. Es ist derjenige Wurzelwert in VII) zu nehmen, für welchen $\cos x$ ein echter Bruch ist; die Amplitude ist $x - \vartheta_0$ oder $\vartheta_0 - x$, je nachdem die Nutationsbögen ausserhalb oder innerhalb auf dem Präzessionskreis aufliegen. — Je grösser σ ist, um so kleiner ist der absolute Wert der Amplitude; wenn

$$\sigma > \frac{1}{2 \cdot \cos \vartheta_0}$$

ist, kann niemals der Winkel PSS_1 zwischen Geschossaxe SP und Bewegungsrichtung SS_1 die Grösse $\frac{\pi}{2}$ erreichen; ist

$$\sigma = \frac{1}{2 \cdot \cos \vartheta_0},$$

so tritt dieser Fall zeitweilig ein, dass das Geschoss mit seiner Axe senkrecht zur Flugrichtung liegt ($\cos x = 0$); wird σ noch

kleiner, so beginnt das Geschoss nach hinten sich zu überschlagen, indem der Winkel PSS_1 zeitweilig $> \frac{\pi}{2}$ wird.

b) Es habe ein Anfangsstoss s_0 stattgefunden, und zwar sei w_t (vergl. Fig. 27) die zum Präzessionskreis tangentielle Komponente des Anfangsstosses (d. h. die durch den Stoss erzeugte anfängliche Winkelgeschwindigkeit der Axe in der Berührungsebene an den Präzessionskegel), w_t positiv, wenn im Sinn der Präzessionsbewegung gerichtet; w_s (Fig. 36 u. 37) sei die zur Kreistangente senkrechte Komponente, positiv, wenn vom Kreismittelpunkt in der Richtung des Radius nach aussen gehend $(s_0 = \sqrt{w_t^2 + w_s^2})$, dann löse man die folgende Gleichung dritten Grades mit x als Unbekannter

$$\text{VIII)} \left\{ \begin{array}{l} x^3 - x^2(u_0 + i_1 u_1^2 + i_2 + i_3) + x(-1 + 2 \cdot i_3 \cdot u_0 + i_4 \cdot u_1^2) \\ \quad = i_3 \cdot u_0^2 + i_1 \cdot u_1^4 + i_4 \cdot u_1^2 \cdot u_0 - i_2 - i_1 \cdot u_1^2 - u_0, \end{array} \right.$$

wobei zur Abkürzung

$$i_1 = \frac{A \cdot w_t^2}{2M}, \quad i_2 = \frac{A \cdot w_s^2}{2M}, \quad i_3 = 2 \cdot \sigma - \frac{C^2 r^2}{2MA},$$

$$i_4 = \frac{Cr \cdot w_t}{M}, \quad x = \cos(\sphericalangle PSS_1),$$

$$u_0 = \cos \vartheta_0, \quad u_1 = \sin \vartheta_0$$

gesetzt ist.

Die Gleichung VIII) besitzt zwei Wurzeln, die zwischen -1 und $+1$ liegen; die eine ist der Kosinus des (im Bogenmaß gemessenen) Radius $S_1 A$ (vergl. Fig. 36) des einen Begrenzungskreises; die andere Wurzel giebt den andern Begrenzungskreis der Nutationsbögen; die Differenz AB beider Winkel ist deren Amplitude.

Erfolgte der Anfangsstoss nur tangentiell zum Präzessionskreis, war also $w_s = 0$, so ist die eine der beiden Wurzeln x von VIII) gleich u_0 oder $\cos \vartheta_0$ selbst, d. h. der eine Begrenzungskreis ist der Präzessionskreis; die Nutationsbögen verlaufen in diesem Fall nur auf der äusseren oder nur auf der inneren Seite dieses Kreises, je nach dem Vorzeichen von w_t (also wie in den Figuren 27—33, 34, 35, bei 27 $w_t +$, bei 34 $w_t -$); die andere Wurzel findet sich sodann aus der Gleichung:

$$\text{IX)} \quad x^2 - x(i_3 + i_1 \cdot u_1^2) = 1 - i_3 \cdot u_0 - i_4 \cdot u_1^2 + i_1 \cdot u_0 u_1^2$$

als derjenige der beiden Werte x, der zwischen -1 und $+1$ liegt; x bedeutet dann den Kosinus des Winkels $S_1 S B$, wobei $S_1 B$ der Radius des die Nutationen begrenzenden anderen Kreises ist. Mit $i_1 = i_4 = 0$ ergiebt sich VII).

Da die Grössen $i_1, i_2 \ldots$ veränderlich sind, so führt man die Berechnung der Nutationen in mehreren Intervallen durch;

innerhalb jedes einzelnen Intervalls werden die Grössen als konstant angenommen.

2. Die Bahn SS_1 des Schwerpunkts ist geradlinig; die Geschossaxe fiel anfangs mit der Richtung der Schwerpunktsbewegung zusammen ($\vartheta_0 = 0$).

In diesem Falle reduziert sich die Präzessionskurve auf den festen Punkt S_1 (Fig. 42). Die Bahn der Geschossspitze besteht ausschliesslich aus den durch S_1 gehenden Hypocykloidenbögen, deren Windungen im Verlauf des Flugs grösser und grösser werden, da M grösser, und wohl auch r kleiner wird. Die Amplituten berechnen sich wie vorhin, nur dass $\cos \vartheta_0 = 1$ ist.

3. Auch für den Fall eines vertikalen Schusses gelten die vorigen Beziehungen von 1. und 2.; man hat nur die Richtung SS_1, die bisher als horizontal vorausgesetzt war, mit der Vertikalen durch den Abgangspunkt zusammenfallen zu lassen. Bezüglich der Figuren 40—42 ist dabei der Beobachter unterhalb des Geschosses zu denken.

G. Folgerungen.

1. Mit den im Vorhergehenden zusammengefassten Resultaten unserer Theorie stehen die sämtlichen Einzelheiten der oben beschriebenen Versuche des Verfassers, sowie manche sonstige Beobachtungen, insbesondere die neueren von Heydenreich in Einklang, z. B. die folgenden:

a) Mitteilungen von Heydenreich l. c. S. 100: „Bei fortgesetzter Steigerung des Enddralls kann eine Grenze erreicht werden, bei der die Schwungkraft des Geschosses im Vergleich zu der Einwirkung des Luftwiderstands so gross wird, dass das Geschoss zwar mit der Spitze nach vorn, aber doch mit dem Boden zuerst am Ziel aufschlägt und dadurch an Wirkung, besonders an Eindringungstiefe erhebliche Einbuße erleidet. Nach Versuchen in den Jahren 1867 bis 1869 mit den damaligen Anfängen des 21 cm-Mörsers trat diese Erscheinung um so eher ein, je kürzer das Geschoss, je stärker der Drall, je grösser die Erhöhung und je kleiner die Anfangsgeschwindigkeit war (vergl. Formel IV, grosses C und r; kleines M, also kleines h_1, grosses ω, kleines W, geben grosse Periode T der Präzessionspendelungen).

b) Beobachtungen von Heydenreich S. 95: „Nach Schluss einer jeden Pendelung kehrt die Geschossspitze in eine Lage oberhalb der Flugrichtung des Schwerpunkts zurück“ (vergl. Fig. 12). „Diese Pendelungen beginnen in der Regel klein und rasch und werden schliesslich grösser und langsamer“ (Formel V für Nutationen, M wird grösser, Periode T_1 grösser; Formel VI, M grösser, Amplitude grösser). „Unter sonst gleichen Verhältnissen sind sie um so stärker, je grösser die Geschwindigkeit des Geschosses und die Entfernung des Schwerpunkts

von der Angriffsrichtung des vereinigten Luftwiderstands ist, um so kleiner, je grösser der Drall des Geschützes und je mehr dessen Masse nach dem Umfang zu vereinigt liegt“ (Formel VI, je grösser v_0, also s_0, ferner je grösser h_1 in M, je kleiner r und C, um so grösser die Amplitude der Nutationen. Dasselbe aus VII).

c) Heydenreich beobachtete mit dem blossen Auge die Pendelungen an Mörsergranaten und Kanonengranaten (die Rechnung nach IV und V zeigt, dass es die Nutationen waren); es wurden stets volle Kreispendelungen beobachtet (vergl. die Figuren); bei Steigerung der Anfangsgeschwindigkeit von 180 m auf 500 m steigerte sich die Zahl der Pendelungen pro Sekunde von 2 auf 4 bis 5, die Amplituden wurden grösser; schliesslich „glich das Geschoss von hinten gesehen einer rasch sich drehenden Scheibe von wechselndem Durchmesser, ein Geschoss überschlug sich sogar etwa 1000 m vor der Mündung“ (Formel V und VI, mit v_0 wächst r, nimmt T_1 ab, zugleich wächst s_0 und nimmt die Amplitude zu).

d) Heydenreich S. 109, Nr. 11—15: Je grösser die Geschosslänge, um so grösser ergab sich der „Formwert“ (Formel VI, je grösser $A : C$, um so grösser die Amplitude).

e) Bei der Granate der schweren Feldkanone lassen sich die Pendelungen nur sehr selten, bei den Infanteriegeschossen niemals mit dem blossen Auge wahrnehmen, bei letzteren auch dann nicht, wenn infolge günstiger Beleuchtung das Geschoss auf der ganzen Flugbahn verfolgt werden kann (Formeln IV, V, VI; vergl. auch die Beispiele weiter unten; bei der Feldkanone sind die Nutationen zu schnell, höchstens liessen sich die Präzessionswindungen beobachten; bei den Infanteriegeschossen ebenfalls höchstens die letzteren, jedoch die Amplituden zu klein und das Geschoss zu kurz).

f) Die Seitenabweichungen infolge konischer Pendelung kommen bei den rasanten Flugbahnen der Infanteriegeschosse mit grossem v_0 verhältnismässig weniger in Betracht, als bei Geschützgranaten (vergl. Formel II, v_x gross, also f klein).

g) Mitteilung von Heydenreich S. 104 über die Seitenabweichungen: „Die Pendelungen zufolge des Dralls erfolgen bei den Massenverteilungen der eingeführten Geschosse derart, dass bei jeder derselben das Geschoss einen grösseren Ausschlag nach der Seite der ersten Ablenkung macht als nach der entgegengesetzten Seite“ (vergl. Fig. 12, 13, Unsymmetrie). „Die Ablenkungswerte nehmen, nach den Schusstafelerfahrungen, im allgemeinen mit einer Verlängerung des Geschosses und mit einer Verstärkung des Dralls zu.“ Dagegen leitet Dähne (l. c. S. 48 u. 63 flg.) aus Schusstafeln ab, dass „die Seitenabweichungen mit der Verlängerung der Geschosse und mit Zunahme der Anfangsgeschwindigkeit abnehmen, und dass sie bei gestreckten Flugbahnen kleiner sind als bei stärker gekrümmten“ (dies in Übereinstimmung mit den Gesetzen [Formel I] für die Präzessions-Pendelungen $\vartheta = \vartheta_r$

$\psi = \psi_r$; insbesondere Ausdruck f; mit Verlängerung des Geschosses wächst h_1, also M, damit und ebenso mit Zunahme von v_x nimmt f ab; bei Verstärkung des Dralls wächst r, damit auch f).

2. Beim Eindringen eines Langgeschosses in Erde oder Wasser oder in den tierischen Körper wird sehr rasch der Widerstand, der sich dem Weitergehen des Geschosses entgegensetzt, bedeutend vergrössert, zugleich nimmt die Rotationsgeschwindigkeit durch die Reibung ab; aus beiden Gründen wird die Amplitude der Nutationsbögen im allgemeinen vergrössert (Formel VI, W_s, also M vergrössert, r verkleinert, also die Amplitude grösser; übrigens sind in solchen Fällen meistens die genaueren Gleichungen VII, VIII anzuwenden).

Es erklären sich damit manche eigentümliche Erscheinungen, die an eingedrungenen Geschossen beobachtet wurden: Austreten aus Wasser in anderer Richtung; Weitergehen des Langgeschosses innerhalb Erde in einer von der ursprünglichen Bewegungsrichtung völlig abweichenden Richtung, ja selbst Umkehren desselben nach dem Geschütz zu nach Art des Bumerangs (Fig. 43, Versuch des Verfassers; Schuss in Lehm, Ausgiessen der Höhlung mit Blei).

Auch für die Erklärung von Schusswunden sind in neuerer Zeit von einigen Militärärzten, insbesondere von Köhler,* die Geschosspendelungen beigezogen worden. In der That ist es wohl denkbar, dass neben den zahlreichen sonstigen Einflüssen (hydraulischer Druck, Verdampfung, Fortpflanzung von Verdichtungswellen, Keilwirkung, Stosswirkung) auch die Geschosspendelungen, unter Umständen etwa in vierter oder fünfter Instanz, mit in Betracht kämen. Hier soll nur darauf aufmerksam gemacht werden, dass insbesondere die Nutationen der Gewehrgeschosse (mit mehreren Hundert Umläufen pro Sekunde), weniger die Präzessionsbewegungen zu berücksichtigen wären; wenn das Geschoss eindringt, wird M grösser und durch die Reibung r kleiner; die Nutationsamplitude vergrössert sich, die Geschossaxe stellt sich schiefer gegen die Bewegungsrichtung, und zwar

---

* Über die Litteratur dieses Gegenstandes vergl. z. B.:

Reger, „Die Gewehrschusswunden der Neuzeit", 1884. Derselbe „Über die kriegschirurgische Bedeutung der neueren Feuerwaffen", Archiv für klinische Chirurgie 1892, Bd. 44.

Kocher, „Zur Lehre von den Schusswunden", 1895.

Medizinalabteilung des königl. preuss. Kriegsministeriums, „Über die Wirkung und kriegschirurgische Bedeutung der neuen Feuerwaffen", 1894.

Bircher, „Neue Untersuchungen über die Wirkung der Handfeuerwaffen", 1896, mit Atlas.

Köhler, „Die modernen Kriegswaffen, ihre Entwickelung und ihr gegenwärtiger Stand, ihre Wirkung auf das tote und lebende Ziel", Berlin 1897.

Endlich mehrere Arbeiten von Bruns, die neueste: „Über die Wirkung und kriegschirurgische Bedeutung der Selbstladepistole System Mauser", Tübingen 1897.

auch in einem völlig homogenen Medium; infolge davon kann das Geschoss erweiternd wirken, zugleich nimmt aber T_1 zu, T ab; es dürfte deshalb erst durch das Experiment zu entscheiden sein, welche Rolle den Geschosspendelungen auf diesem Gebiete zukommt.

3. Wie schon erwähnt, sind diejenigen Geschosspendelungen, welche sich zunächst der Beobachtung mit dem blossen Auge darbieten, meistens die Nutationsbewegungen, nicht oder selten die Präzessionsbewegungen. Solche Nutationen können auch ohne Anfangsstoss in merklichen Amplituden vorhanden sein (Gleichungen IX, X), falls der Stabilitätsfaktor σ klein ist; auch sind die Perioden T_1 der Nutationen mit und ohne Stoss nahezu dieselben.

Es sprechen indes mehrere Gründe dafür, dass meistens an der Mündung auf das Geschoss ein Stosskräftepaar wirkte, dessen Axe nicht mit der Rotationsaxe zusammenfiel: Erstens sind von Heydenreich, Neesen und mir Pendelungen (Nutationen) von beträchtlicher Amplitude in Fällen beobachtet, wo σ genügend gross war. Zweitens habe ich niemals eine Form von Nutationsbögen beobachtet, bei welcher Rückkehrpunkte aufgetreten wären (Figuren 19 bis 26), sondern stets nur kreisähnliche Bögen; freilich konnten die Rückkehrpunkte auch dem Auge entgehen, da auf einen Präzessionsumlauf viele Nutationsbögen kommen mussten. Drittens lässt sich die von Heydenreich zuerst beobachtete und von mir oft durch Versuche konstatierte Thatsache, dass mit wachsender Pulverladung, also zunehmendem v_0 unter sonst gleichen Umständen die Amplituden wachsen, die Stabilität geringer wird, nicht wohl anders als mit der Annahme eines Anfangsstosses erklären; in der That, wenn kein Anfangsstoss vorhanden wäre, so müsste, bei wachsender Anfangsgeschwindigkeit v_0 die Amplitude wenigstens annähernd und in derselben Entfernung gleich bleiben; denn sie ist nach Formel IX und X durch σ bedingt; wächst nun v_0, so wächst r^2 proportional v_0^2 (bei demselben Geschütz), andererseits wächst aber auch, in ziemlich weitem Intervall mit genügender Annäherung, das anfängliche Drehmoment proportional v_0^2, so wäre zu vermuten, dass der Bruch $C^2r^2 : 4MA$ beim Schiessen mit stets vermehrter Ladung konstant bliebe, also wenigstens im Beginn der einzelnen Flugbahnen die Amplituden dieselben blieben; da dem nicht so ist, so ist auf die Gleichung VI oder VII zu rekurrieren, welche zeigt, dass mit wachsendem Anfangsstoss s_0 die Amplitude zunimmt; der Anfangsstoss selbst aber nimmt vermutlich mit der Ladung zu.

Es ist übrigens, genauer betrachtet, sogar sehr unwahrscheinlich, dass unter normalen Verhältnissen ein Geschoss völlig centriert ohne seitlichen Anstoss aus dem Lauf austritt. Selten werden die Pulvergase an der Mündung sich völlig symmetrisch um das Geschoss aus dem Rohr drängen, leicht kann die Figurenaxe des Geschosses, welches den Zügen folgt, an der Mündung einen kleinen

Winkel* gegen die Laufaxe bilden, die Figurenaxe und die Rotationsaxe nicht zusammenfallen; nicht immer wird der Schwerpunkt in der geometrischen Geschossaxe liegen; besonders aber auch deutet das Auftreten eines beträchtlichen Abgangsfehlerwinkels** bei Geschützen und Gewehren, die Thatsache, dass die Anfangstangente der Flugbahn keineswegs mit der ruhenden Laufaxe zusammenfällt, so wie die Lage der letzteren unmittelbar vor dem Schuss gegeben ist, sondern Winkel bis zu 30 Bogenminuten und mehr mit derselben bildet, auf die Notwendigkeit eines seitlichen Anstosses hin; bei Gewehren wird der Abgangsfehler durch beginnende Schwingungen, insbesondere durch Obertonschwingungen des Laufs erzeugt; da letztere sehr rasch erfolgen, so ist es wohl denkbar, dass von dem Augenblick ab, in welchem der Schwerpunkt des Langgeschosses die Mündung passiert hat, bis zu demjenigen, in welchem der Geschossboden durch die Mündung geht, dem Geschoss durch den schwingenden Lauf eine Winkelgeschwindigkeit erteilt wird, welche, wie eine schätzungsweise Berechnung gezeigt hat, von nicht zu vernachlässigender Grösse wäre.

Heydenreich (l. c. S. 108, Nr. 2) hat gelegentlich beobachtet, dass durch Änderung der Laufmündung die Schussweite sich änderte (die Amplitude variierte).

Ich habe folgenden Vergleichsversuch angestellt: Es wurde vertikal aufwärts mit je gleicher Ladung geschossen, wobei erstens das erwähnte Mörsermodell möglichst labil aufgestellt, zweitens fest eingespannt war; im ersten Fall waren sehr grosse Amplituden zu beobachten, mitunter überschlug sich sogar das Geschoss in der Luft; im zweiten Fall kamen die Nutationen zwar nicht in Wegfall, besassen jedoch eine viel kleinere Amplitude. Es ist damit wahrscheinlich gemacht, dass das Bucken des Rohrs den Anfangsstoss wenn nicht ausschliesslich bedingt, so doch dabei mitwirkt, dass also die Ursachen des Abgangsfehlers und der Nutationsamplituden irgendwie zusammenhängen.

Derartige systematische Schiessversuche, bei denen ein Einfluss nach dem anderen ausgeschlossen wird, sowie die genaue Beobachtung der anfänglichen Pendelungsamplituden — etwa nach dem Neesenschen Verfahren — müssten ein Gesetz für die Grösse des Anfangsstosses, damit für die der Nutationsamplituden und die Trefffähigkeit liefern.

4. Weiterhin hat die vorhergehende Untersuchung gezeigt, dass es für die Weiterentwickelung dieses Teils der Ballistik von Wichtigkeit wäre, die Gesetze anderer Grössen, die in die Rechnung

* Vergl. hierüber Putz, revue d'Artillerie tome 24, 1884, p. 293, Note sur les imperfections inévitables des projectiles et leur influence sur la justesse du tir.

** Zuerst hat wohl K. B. Bender darauf hingewiesen, dass die Entstehung der Nutationen in dem Abgangsfehler zu suchen sein könnte. „Die Bewegungserscheinungen der Langgeschosse und deren Beziehungen zu den Eigenschaften des Feldgeschützes der Zukunft", Darmstadt 1888 bei Bergsträsser, S. 43 flg.

eingehen, vor allem: C, A, M, r zu kennen. Und zwar müsste bei Aufstellung der betreffenden Beziehungen die Beobachtung vor der Theorie die Vorderhand erhalten:

Die beiden Trägheitsmomente C und A lassen sich mit Rechnung nur ungenau bestimmen; die mancherlei Vertiefungen am Zünder und Boden einer Granate, die Führungsringe, der mit Kugeln ausgefüllte Hohlraum im Innern etc. machen eine exakte Berechnung illusorisch; es müssten durch systematische Schwingungsversuche, wenigstens für eine besonders häufig benutzte Form von Granaten, etwa diejenigen Kruppscher Konstruktion, die Grössen A, C und $\frac{A}{C}$ in Funktion der Geschosslänge, des Kalibers etc. gegeben werden.

Besonders viel trägt zur Ungenauigkeit der theoretischen Berechnung die Unkenntnis des Luftwiderstandsmoments M also von W_s und h_1 bei; es muss die Kummersche Arbeit auch bezüglich ihres experimentellen Teils durch empirische Ermittelung der Luftwiderstandskomponenten als Funktionen des Winkels α zwischen Geschossaxe und Bewegungsrichtung ergänzt werden.

Endlich giebt die Annahme einer Konstanz der Umdrehungsgeschwindigkeit r des Geschosses um seine Längsaxe, trotzdem dass die meisten Ballistiker bei ihren Rechnungen von dieser Voraussetzung ausgingen, zu mancherlei Bedenken Anlass. Das Resultat von Poisson und Heim, dass der tangentielle Luftwiderstand, die Luftreibung, eine nur minimale sein könne, bezog sich nur auf die früheren, glatten Kugeln; die jetzigen Granaten und Infanteriegeschosse sind dagegen wegen der durchrissenen Führungsringe einerseits, der Zugeindrücke andererseits keineswegs glatt. Wie Altmann (l. c.) mit Recht hervorhebt, ist es daher wahrscheinlich, dass die Rotationsgeschwindigkeit r im Verlauf derselben Flugbahn nicht unbedeutend abnimmt. Meine eigenen Versuche mit einem Geschoss sehr rauher Oberfläche deuteten eine merkliche Abnahme von r an.

Versuche in dieser Richtung hat Krall* vorgeschlagen und Boys** begonnen; ein Gesetz für die Abnahme von r ist jedoch nicht bekannt.

5. Bei der Berechnung der Seitenabweichungen von Langgeschossen wird stets nur der Einfluss der Pendelungen, die selbst eine Folge der Rotation um die Längsaxe sind, beigezogen. Von den Seitenabweichungen ist zwar in diesem Aufsatz nicht systematisch die Rede; doch hängen sie innig mit dem Vorhergehenden zusammen, daher hierüber eine Bemerkung: Bei den Versuchen des Verfassers lagen Andeutungen dafür vor, dass daneben auch ein zweiter Einfluss, er möge der Magnus-Effekt heissen, von nicht unbeträchtlicher Grösse sein könne: wenn ein Langgeschoss eine sehr langsame Präzessions-

* Krall, Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens, 1888, 8. Heft, S. 118.

** Boys, Dieselbe Zeitschrift 1897, S. 836.

bewegung besitzt, so bleibt während des Flugs die Geschossaxe sich nahezu parallel, die Geschossspitze fortwährend oberhalb der Tangente (vorausgesetzt, dass die Nutationen nicht zu gross sind); der Winkel zwischen Geschossaxe und Tangente wird grösser und grösser, im Scheitel schon gleich dem Abgangswinkel. Infolge davon kann entweder die Luftreibung, der tangentielle Widerstand (der Poisson-Effekt) oder aber die Wirkung der adhärierenden Luft (Magnus-Effekt) als die Geschossbewegung beeinflussend in Frage kommen. Der Poisson-Effekt würde darin bestehen, dass bei Rechtsdrall Rechtsabweichung, bei Linksdrall Linksabweichung des Schwerpunkts aus der anfänglichen Vertikalebene der Flugbahn einträte; denn die Luft vor dem Geschoss ist dichter als diejenige hinter demselben; also die Luftreibung vorn grösser als hinten. Die Wirkung der am Geschoss adhärierenden Luft wäre bei Rechtsdrall Linksabweichung (oder Verkleinerung der Rechtsabweichung durch Pendelung), bei Linksdrall Rechtsabweichung; denn z. B. bei Rechtsdrall bewegt sich die mit dem Geschoss rotierende Luft auf der linken Seite im selben Sinn wie die gegen das Geschoss heranströmende Luft, rechts im entgegengesetzten Sinn, also entsteht rechts Erhöhung, links Verminderung des Luftdrucks; infolge davon wird das Geschoss als Ganzes nach links gedrückt. Da die Resultante der hieraus entstehenden einseitigen Luftdrücke mehr oder weniger genau durch den Schwerpunkt gehen wird, so wird hierdurch die Rotation des Geschosses um den Schwerpunkt, die Präzessions- und Nutationsbewegung, nicht wesentlich modifiziert, sondern nur die Bewegung des Schwerpunkts.

Nun haben meine Versuche in einem Fall Linksabweichung bei Rechtsdrall, in einem anderen Rechtsabweichung bei Linksdrall aufgezeigt. Im ersten Fall lag (siehe oben) der Angriffspunkt der Luftwiderstandsresultanten wegen der besonderen Geschossform ohne Zweifel hinter dem Schwerpunkt, also erklärt sich hier diese Linksabweichung einfach durch Pendelung. In den anderen Fällen jedoch blieb die Rechtsabweichung bei Linksdrall (zum Teil 8 m auf 30 m Schussweite) auch dann noch bestehen, als an der Geschossspitze eine Korkscheibe angebracht wurde, welche sicherlich bewirkte, dass der Angriffspunkt der Luftwiderstandsresultanten nahe der Geschossspitze lag, falls dies nicht schon vorher der Fall gewesen sein sollte; durch die Pendelung allein hätte somit Linksabweichung wegen des Linksdralls eintreten müssen; folglich lag der Grund der Rechtsabweichung in anderem: das Geschoss hatte hinten die Form einer Schraubenspindel, also ist anzunehmen, dass hierbei vom Geschoss mehr Luft mitrotiert wurde, als von einem Geschoss mit glatterer Oberfläche, und dass der Magnus-Effekt die Erscheinung bewirkte. Meine Versuche zeigten diese Erscheinung nur nebenbei und zielten auf anderes ab; bestätigt sich diese Wahrnehmung, so ist damit bewiesen, dass bei der Berechnung der Seitenabweichung ausser der Pendelung unter Umständen noch

ein anderer Einfluss Berücksichtigung finden muss, und zwar weniger der Poisson-Effekt (den in neuester Zeit wieder Altmann beigezogen hat, wahrscheinlich ohne von der Arbeit Poissons Kenntnis zu haben), als vielmehr der Magnus-Effekt. Eine Berechnung hierüber hat Tait,* speziell für Kugeln, begonnen.

H. Zahlenbeispiele.

1. Beispiel. Deutsche schwere Feldkanone C/73.

Schrapnell $C\cdot 91$ oder Sprenggranate. Schussweite 4500 m. Es ist $v_0 = 442$ m; Abgangswinkel = Erhebungswinkel $15\frac{1}{2}{}^0$ + Abgangsfehlerwinkel $\frac{6}{16}{}^0$

$$= 15\frac{14}{16}{}^0, \text{ also } \vartheta_0 = 0{,}278;$$

Kaliber $2R = 0{,}088$ m; Geschossgewicht $P = 7{,}5$ kgr. Geschosslänge $H = 23{,}2$ cm gleich 2,76 Kaliber, Entfernung von Boden und Schwerpunkt 9,98 cm; mit Tabelle IV (für $h = 1{,}3$ Kaliber) wird für $\alpha = 0$ die Entfernung von Boden und Angriffspunkt $= 1{,}41 \cdot 1{,}46 = 2{,}06$ Kal. $= 18{,}1$ cm, also $h_1 = 0{,}081$ m.

Drallwinkel $\Delta = 3^0 36'$, also $r = v_0 \cdot \mathrm{tg}\,\Delta : R = 442 \cdot \mathrm{tg}(3^0 36') : 0{,}044 = 632$. $C = 0{,}00065$ (durch Rechnung, siehe oben Regel von v. Wuich). Reduzierte Länge des Geschosses = 2,36 Kaliber, also $A : C = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4{,}72^2}{3}\right) = 4{,}2$.

a) Anfängliche Periode T resp. T_1 der Präzessionsbewegung resp. der Nutationsbewegung:

Im Anfang der Flugbahn sei $\alpha = 0$, also $W_s \cdot \cos\omega : \sin\alpha = W_p \cdot \cos\vartheta_0$; somit $M = W_p \cdot \cos\vartheta_0 \cdot h_1 = 3{,}7$ m/kgr; $Cr : A = 150{,}5$; $Cr = 0{,}41$; $4AM = 4{,}1 \cdot 10^{-2}$; $(C^2 r^2) : (4AM) = 4{,}1$; also

Periode T der Präzession $= 0{,}7$ sec oder $1\frac{2}{5}$ Pendelungen pro sec, 26 Pendelungen auf der Flugbahn;

Periode T_1 der Nutation $= 4{,}8 \cdot 10^{-2}$ oder 21 Pendelungen pro sec;

Stabilitätsfaktor $\sigma = 4{,}1$;

Präzessionsamplitude anfangs $= f = \frac{Cr}{M} \cdot \frac{g}{v_x} = 0{,}00256$ oder $9'$;

Amplitude der Nutation, falls kein Anfangsstoss stattfand

$$= \frac{1}{2\cdot\sigma} \cdot \sin(\sphericalangle\, OSM) = \frac{1}{2\sigma} \cdot f = 0{,}00031 \quad \text{oder} \quad 1'.$$

b) Dasselbe für den Auffallpunkt:

Spitzer Auffallwinkel $\omega = 24\frac{14}{16}{}^0$, also $\sphericalangle\, OST$ = Auffallwinkel + Abgangswinkel $= 40\frac{12}{16}{}^0$; ebenso gross ist der $\sphericalangle\, \alpha$ am Schluss der letzten vollen Präzessionspendelung; entnimmt man hierfür aus Tabelle III den Wert $W_s : \sin\alpha$, so hat man

$$M = \frac{W_s \cos\omega}{\sin\alpha} \cdot h_1 = 7{,}4; \quad 4AM = 8 \cdot 10^{-2}; \quad \sigma = 2{,}1; \quad f = 0{,}00304$$

(da $v_x = 179$ ist), $T = 0{,}35$ sec; $T_1 = 5{,}8 \cdot 10^{-2}$ sec. Man erhält damit die folgende Zusammenstellung:

---

* P. G. Tait, Nature 48, p. 202; vergl. auch Beiblätter zu Wiedemanns Annalen 1895, Nr. 4, S. 288; ferner Hélie traité de bal. extér. 1884, Bd. I, p. 328.

	Präzessionsbewegung			Nutationsbewegung (ohne Stoss)			
	Periode	Zahl der Pendelungen pro Sek.	Amplitude	Periode	Zahl der Pendelungen pro Sek.	Amplitude	Stabilitätsfaktor σ
im Anfang der Flugbahn	0,7 sec	1,4	9′	$4{,}8 \cdot 10^{-2}$ sec	21	1′	4,1
Ende der Flugbahn (ungenauer)	0,3 sec	3,8	crc 41°	$5{,}8 \cdot 10^{-2}$ sec	17	9°	2,1

c) Konstruktion der Präzessionskurve (Fig. 44).

Die graphische Lösung des ballistischen Problems ohne Rücksicht auf die Rotation liefert das folgende Resultat.

Entfernung von der Mündung m	Zwischenzeiten sec.	Horizontale Geschwindigkeiten v_x m/sec	Höhe z über dem Boden met	Horizontale Neigung der Tangente $\omega =$
0	0	425	0	$\left(15\frac{14}{16}{}^{0} - \vartheta_0\right)$
495	1,26	358	126	12°38′
1002	1,53	316	239	11°31′
1512	1,69	287	329	8°45′
2015	1,83	263	388	4°55′
2502	1,98	242	411	0°52′
2994	2,12	223	394	−4°50′
3504	2,38	206	325	−11°5′
4025	2,63	191	188	−18°0′
4501	2,58	179	0	−24°53′

zusammen 18,0 sec. ganze Flugzeit.

Die Bahn der Geschosspitze ohne Rücksicht auf Nutationen, d. h. die Präzessionsspirale muss in einzelnen Intervallen berechnet werden; als diese Intervalle können hier die einzelnen Perioden T gewählt werden.

Im Anfang des ersten Präzessionsumlaufs ist $v_x = 425$; $M = 3{,}7$;

$$f = \frac{Cr}{M} \cdot \frac{g}{v_x} = \frac{0{,}41}{3{,}7} \cdot \frac{9{,}81}{425} = 0{,}00256;$$

$\omega = \vartheta_0 = 0{,}273$; $\alpha = 0$; $T = 0{,}7$ sec.

Im Anfang des zweiten Umlaufs, also nach 0,7 sec, ist $v_x = 380$, $M = 3{,}8$, $\omega = 14\frac{1}{2}{}^{0}$, $\alpha = \vartheta_0 - \omega = 1\frac{1}{2}{}^{0}$, $f = 0{,}00286$.

Setzt man in den Ausdrücken ψ_r, ϑ_r der Reihe nach

$$t = 0, \quad \frac{1}{4}T, \quad \frac{2}{4}T, \quad \frac{3}{4}T, \quad \text{etc.},$$

so hat man der Reihe nach

für $t = 0$, $\psi_r = 0$, $\vartheta_r = \vartheta_0 = 0{,}273$ ($\omega_0 = 0{,}273$, $f = 0{,}00256$),

für $t = \frac{1}{4}\,T = 0{,}17$ sec $\begin{cases} \psi_r = f + \vartheta_r - \omega \\ \vartheta_r = \omega + f \end{cases}$

(wobei $\vartheta_0 - \omega = 0{,}006$, $\omega = 0{,}267$, $f = 0{,}00276$),

für $t = \frac{2}{4} T = 0{,}34$ sec $\begin{cases} \psi_r = 2f \\ \vartheta_r = \omega - (\vartheta_0 - \omega) \end{cases}$

(wobei $\vartheta_0 - \omega = 0{,}013$, $\omega = 0{,}260$, $f = 0{,}00280$),

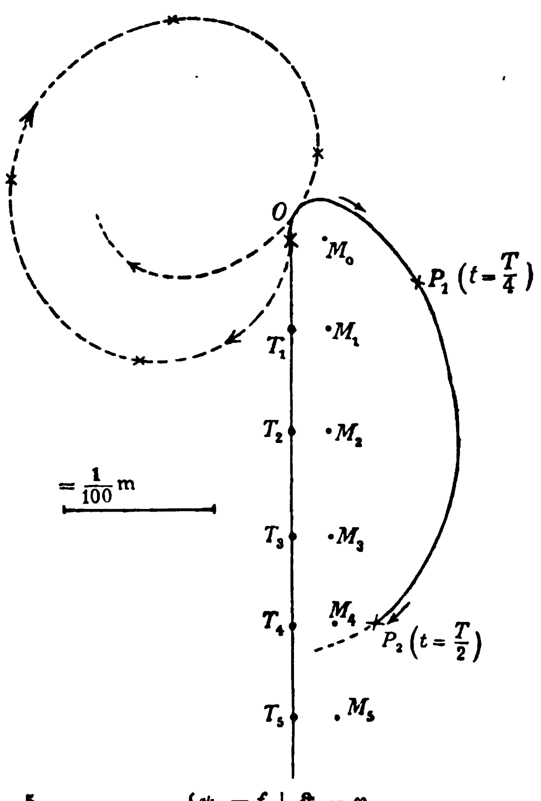
für $t = \frac{3}{4} T = 0{,}51$ sec $\begin{cases} \psi_r = f - (\vartheta_0 - \omega) \\ \vartheta_r = \omega - f \end{cases}$

(wobei $\vartheta_0 - \omega = 0{,}020$, $\omega = 0{,}258$, $f = 0{,}00283$),

für $t = \frac{4}{4} T = 0{,}7$ sec $\begin{cases} \psi_r = 0 \\ \vartheta_r = \vartheta_0 \text{ wie anfangs} \end{cases}$

($\omega = 0{,}247$, $f = 0{,}00286$),

Fig. 44.



für $t = \frac{5}{4} T = 0{,}85$ sec $\begin{cases} \psi_r = f + \vartheta_0 - \omega \\ \vartheta_r = \omega + f \end{cases}$

($\vartheta_0 - \omega = 0{,}032$, $\omega = 0{,}241$, $f = 0{,}00290$) u. s. f.

Damit lässt sich die Präzessionsspirale punktweise konstruieren.

d) Konstruktion der Nutationsbögen, unter Voraussetzung eines Anfangsstosses, beispielsweise $p_0 = +1{,}41$, $q_0 = 0$ (d. h. der Geschossboden erhalte einen Stoss aufwärts oder die Spitze abwärts, wodurch der Axe die relative Winkelgeschwindigkeit $+1{,}41$ erteilt wird), also ist $s_0 = +1{,}41$.

$$2 s_0 : \left(\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}\right) = \frac{2 \cdot 1{,}41}{141} = 0{,}02.$$

Nun war für unseren Fall, mit $q_0 = 0$,

$$\psi_n = [-\cos\beta_2 + \cos(rt - \beta_1)] \cdot \frac{p_0}{\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}},$$

$$\vartheta_n = \quad [\sin\beta_2 - \sin(rt - \beta_1)] \cdot \frac{p_0}{\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}};$$

hierin ist anfangs $\beta_2 = \frac{M}{Cr} \cdot t = 9{,}2 \cdot t, \quad rt - \beta_1 = \left(\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}\right) \cdot t = 141 \cdot t,$

$$\frac{p_0}{\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}} = \frac{1{,}41}{141} = 0{,}01,$$

also

$$\begin{cases} 100 \cdot \psi_n = -\cos(9{,}2 \cdot t) + \cos(141 \cdot t), \\ 100 \cdot \vartheta_n = +\sin(9{,}2 \cdot t) - \sin(141 \cdot t). \end{cases}$$

Setzt man hier der Reihe nach $t=0$, $t = \frac{2\pi}{4 \cdot 141}$ (oder$=0{,}0111$ sec), $t=2 \cdot 0{,}0111$, $t = 3 \cdot 0{,}0111$ etc., so wird:

für $t = 0$ $\begin{cases} \psi_n = 0 \\ \vartheta_n = 0, \end{cases}$

für $t = 0{,}011$ sec $\begin{cases} 100 \cdot \psi_n = -\cos(9{,}2 \cdot 0{,}011) = -\cos(0{,}1023) = -\cos(5^0 52') \\ \qquad = -0{,}995 \\ 100 \cdot \vartheta_n = +\sin(9{,}2 \cdot 0{,}011) - 1 = -0{,}898, \end{cases}$

für $t = 2 \cdot 0{,}011$ sec $\begin{cases} 100 \cdot \psi_n = -\cos(2 \cdot 0{,}1023) - 1 = -1{,}979 \\ 100 \cdot \vartheta_n = +\sin(2 \cdot 0{,}1023) \quad = +0{,}206, \end{cases}$

für $t = 3 \cdot 0{,}011$ sec $\begin{cases} 100 \cdot \psi_n = -\cos(3 \cdot 0{,}1023) \quad = -0{,}954 \\ 100 \cdot \vartheta_n = +\sin(3 \cdot 0{,}1023) + 1 = +1{,}301, \end{cases}$

für $t = 4 \cdot 0{,}011$ sec $\begin{cases} 100 \cdot \psi_n = -\cos(4 \cdot 0{,}1023) + 1 = +0{,}081 \\ 100 \cdot \vartheta_n = +\sin(4 \cdot 0{,}1023) \quad = +0{,}398, \end{cases}$

für $t = 5 \cdot 0{,}011$ sec $\begin{cases} 100 \cdot \psi_n = -\cos(5 \cdot 0{,}1023) \quad = -0{,}872 \\ 100 \cdot \vartheta_n = +\sin(5 \cdot 0{,}1023) - 1 = -0{,}510 \text{ u. s. f.} \end{cases}$

Damit ist die Nutationskurve (Figur 44) gezeichnet. Die Amplituden müssen im Verlauf der Flugbahn wachsen, da M von 3,7 bis 7,4 wächst, also $\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}$ abnimmt.

Die Kurve (Fig. 44) ist deshalb nicht weiter fortgesetzt, weil es unter Umständen als zweifelhaft gelten kann, ob die Formeln (siehe oben) noch Anwendung finden dürfen.

2. Beispiel. Deutsches Infanteriegewehr M/71.

Kaliber 11 mm, Geschosslänge 27,5 mm = 2,5 Kal., $v_0 = 451$ m, Geschossgewicht 25 gr, Dralllänge 550 mm, also $r = \frac{2\pi \cdot 451}{0{,}550} = 5150$, $C = 38{,}5 \cdot 10^{-9}$, $A = 142{,}4 \cdot 10^{-9}$, $C^2 r^2 = 3{,}9 \cdot 10^{-8}$, M mit $\vartheta_0 = 0$ wird $= 0{,}76 \cdot 10^{-2}$, $4AM = 0{,}43 \cdot 10^{-8}$, $\sigma = 9{,}05$, $T = 0{,}163$ sec, $T_1 = 0{,}48 \cdot 10^{-2}$ sec.

3. Beispiel. Deutsches Infanteriegewehr M/88.

Kaliber 8 mm, Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 645$ m, Dralllänge 24 cm $=$ 30,4 Kal. (Rechtsdrall), Geschosslänge 31,3 mm = 3,96 Kaliber, Geschossgewicht 14,7 gr.

Also $r=16900$, mit $\vartheta_0=0$ ist anfangs $M=W_p\cdot h_1=0{,}792\cdot 0{,}015=0{,}0119$ m/kgr, $C=12\cdot 10^{-9}$, $\frac{M}{Cr}=58{,}2$, $A:C=8{,}95$, $C^2r^2=4{,}1\cdot 10^{-8}$, $4AM=5{,}1\cdot 10^{-9}$ $\sigma=8{,}2$, $T=0{,}11$ sec, $T_1=3{,}5\cdot 10^{-3}$ sec.

Anfangsradius des Präzessionskreises = Anfangswert von

$$f=\frac{Cr}{M}\cdot\frac{g}{v_x}=\frac{9{,}81}{58{,}2\cdot 640}=0{,}00026 \quad \text{oder} \quad 53''$$

(z. B. bei Abgangswinkel $\vartheta_0=6^0$), was auf relativ kleine Seitenabweichung hindeutet.

Anfängliche Amplitude stossfreier Nutation (mit $\vartheta_0=6^0$)

$$\frac{2\cdot MA}{C^2r^2}\cdot f=0{,}000061 \quad \text{oder} \quad 12''.$$

Anfangsstoss gesucht: Angenommen, es habe einmal bei horizontalem Schuss ein Durchschlagsloch auf der nahen Scheibe durch Ausmessung erkennen lassen, dass der Winkel zwischen Geschossaxe und Flugrichtung 1° betrug. Welcher Anfangsstoss ist hierzu erforderlich? Bogen von 1° oder

$$0{,}0174=\frac{2\cdot s_0}{\frac{Cr}{A}-\frac{M}{Cr}}=\frac{2\cdot s_0}{1831}, \quad s_0=16.$$

4. Beispiel. Versuch von Neesen.

$P=39{,}5$ kgr, $\Delta=4^0$, $v_0=155$ m, $H=3{,}53$ Kaliber, $2R=0{,}1491$ m, $\vartheta_0=60^0$; also $r=145{,}3$, $C=0{,}0112$, $A:C=6{,}9$; Anfangswert von $M \gtreqless 0{,}58$, $C^2r^2=2{,}65$, $4AM \gtreqless 0{,}18$.

$T \gtreqless 10{,}8$ sec, $T_1=$ crc. 0,31 sec. (beobachtet crc. 0,47 sec).

5. Beispiel. Versuche von Heydenreich l. c. S. 98.

a) Mit dem Mörser.

$\vartheta_0=20^0$, $R=0{,}0745$ m, $P=40$ kgr, Abrundungsradius 1,5 Kal., $H=5$ Kal., $v_0=180$ m, $\Delta=7^0$; also ist $r=296$, $C=0{,}0113$, $A=0{,}159$, $C^2r^2=11{,}2$, M im Anfang $=5{,}7$.

$T=3{,}7$ sec, $T_1=0{,}4$ sec; beobachtet crc 0,5 sec, $\sigma=3{,}07$.

b) Mit der Kanone.

Dasselbe, nur $\vartheta_0=9^0$, $v_0=500$ m. Damit ist $r=824$, $M=86{,}6$, $C^2r^2=86{,}8$.

$T=0{,}67$ cec, $T_1=0{,}177$ sec oder 5,6 pro sec; beobachtete Periode der Pendelungen: 4—5 pro sec.

6. Beispiel. Einer der Versuche des Verfassers.

Kaliber 0,8 cm, Geschossgewicht 60 gr, $\vartheta_0=45^0$, $v_0=21$ m, Dralllänge 7 cm (Linksdrall), Geschosslänge 14 cm; also ist

$r=1884$, $C=0{,}5\cdot 10^{-7}$, $A:C=193$, $M=28\cdot 10^{-6}$, $T=22$ sec, $T_1=0{,}6$ sec (beobachtet 0,5 bis 0,75 sec).

Anfangs Nutationsamplitude ohne Stoss = crc. 7° (beobachtet: wechselnde Amplitude zwischen crc 5 und crc 30°, also ein Anfangsstoss wahrscheinlich).

Dies giebt folgende Zusammenstellung je der Werte im Anfang der betreffenden Flugbahn. Es ist hinzugefügt, ob wegen der grossen Winkel das Rechnungsresultat mehr oder weniger zuverlässig ist (* = sehr unsicher).

	Präzessions-Pendelungen		Nutations-Pendelungen		Auf einen Präzessions-Umlauf kommen Nutations-Umläufe	Beobachtete Zahl der konischen Pendelungen pro sec	Anfänglicher Stabilitätsfaktor σ	Geschosslänge in Kalibern	Anfangsgeschwindigkeit der	
	Zeit eines vollen Umlaufs sec	oder Zahl der Umläufe pro sec	Zeit eines Umlaufs sec	oder Zahl der Umläufe pro sec					Translation v_0 met/sec	Rotation um die Axe r
21 cm-Mörser *	22,4	$\frac{1}{22}$	0,25	4	88	? zahlreiche kreisähnliche Pendelungen zu beobachten (Nutationen).	2,7	4,93	214	486
Versuch von Neesen K. 15 cm Kanone *	10,8	$\frac{1}{11}$	0,31	3	35	crc 2,2 (Nutation)	9,1	3,53	155	145
Heydenreich Mörser *	3,7	$\frac{1}{4}$	0,36	2,8	10	crc 2 (Nutation)	3,1	5	180	296
Heydenreich Kanone *	0,67	$1\frac{1}{2}$	0,18	5,6	37	crc 4—5 grosse Amplituden beobachtet (Nutat.)	1,6	5	500	824
Deutsche schwere Feldkanone	0,7	$1\frac{1}{2}$	0,05	21	14	?	4,1	2,76	442	632
Deutsches Infanteriegewehr M/71	0,16	6	$4,8 \cdot 10^{-3}$	209 (Ton gis)	34	?	9	2,5	451	5150
Deutsches Infanteriegewehr M/88	0,11	$9\frac{1}{3}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$	290 (Ton *d*)	31	?	8,2	3,96	645	16900
Versuch des Verfassers (Mörsermodell) *	22	$\frac{1}{22}$	0,64	$1\frac{1}{2}$	34	1,3 bis 1,8 (Nutat.)	10	17	21	1884

Berichtigungen.

Bei diesem Anlass gestatte ich mir, einige nachträgliche Berichtigungen zu meinem „Kompendium der theoretischen äusseren Ballistik“ (B. G. Teubner 1896) zusammenzustellen und spreche den Herren, welche mir in freundlichster Weise ihre Bemerkungen zugehen liessen, meinen Dank aus.

S. 145 Z. 6 streiche „oder Richtung der Resultanten“.
S. 159 Z. 7 lies „der Bewegung“ statt „des Luftwiderstands“.
S. 169 Z. 13 lies $\alpha = 30^0$ statt α.
S. 170 Z. 9 und 10 lies tiefer, tief statt höher, hoch.
S. 218 Fig. 60b ist „Resultante des Luftwiderstands“ zu streichen.
S. 221 Z. 13 streiche „zwischen der Resultante und der Geschossaxe oder auch“.
S. 260 Z. 3 von unten ist $\sigma = 0{,}000367$; es kann dieses Beispiel 1) nur als ein solches mit den beliebig angenommenen Zahlenwerten v_0, σ, C... zur Klarmachung der Methode angesehen werden und kann nichts über die Granate der leichten Feldkanone aussagen, da σ mit 3,9 zu multiplizieren wäre.
S. 311 lies „noch immer zum Teil üblich“ statt „die üblichste“.
S. 323 Z. 22 vor der Mitte lies „50 % von“ statt „50 %, bei“.
S. 351 Z. 4 von unten ist zur weiteren Klarmachung hinzuzufügen:

„mit $\delta = 1{,}34$; $\frac{P \text{ kgr}}{R^2 (\text{mm})} = 0{,}92$; $\lambda = 1{,}4$ (vgl. S. 275), und $\alpha = 0$, nach der Formel $c' = \frac{\lambda \cdot \cos\alpha \cdot P}{\delta \cdot R^2} = \frac{1{,}4 \cdot 1 \cdot 0{,}92}{1{,}34} = 0{,}962$, also $v_{25} = 605{,}2$“ etc.

S. 462 Note 154 ist unabhängig für sich. Hinzuzufügen: Jedoch ist diese ältere Methode besonders einfach, da keine Linsen erforderlich sind.

Über Spannungszustände, bei denen ein Spannungspotential und zugleich ein Verschiebungspotential besteht.

Von

Dr. G. Holzmüller,

Hagen i. W.

1. Feststellung der Grundhypothese am Einpunktproblem.

Der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure habe ich kürzlich eine Arbeit eingereicht, deren Resultate, wie mir scheint, von allgemeinerem Interesse sind. Es handelt sich um Spannungszustände elastischer Körper, bei denen ein Spannungspotential nach Art des Newtonschen und zugleich ein Verschiebungspotential nach Art des logarithmischen besteht. Das letztgenannte Potential ermöglicht die Anwendung der konformen Abbildung, die meines Wissens bisher nur für die Saint-Venantsche Torsionstheorie in der Elastizitätslehre Verwendung fand, und zwar in sehr beschränktem Maße für einige wenige Formen des prismatischen Stabes. Einiges möchte ich ohne Rechnungen hier mitteilen, anderes vervollständigen und verallgemeinern.

Ich gehe von einem bekannten Beispiele aus:

Ein dickwandiges Rohr sei von konzentrischen Kreiscylindern begrenzt; der innere habe den Radius r_i, der äussere den Radius r_a. Im Hohlraum herrsche die positive Spannung p, möge sie ein hydraulischer Druck, eine Gasspannung oder sonstiger Art sein. Ist nun r der zwischen r_i und r_a veränderliche Radius, s_r die in den Punkten des zugehörigen Kreises entstehende radiale Spannung des Materials, die sich übrigens als negativ, d. h. als Druck herausstellt, σ_r die normal dagegen wirkende tangentiale Spannung, die sich als positiv, d. h. als Zugspannung geltend macht, so gelten nach der üblichen Theorie folgende Formeln:

$$1)\qquad s_r = p\frac{r_i^2}{r^2}\cdot\frac{r^2-r_a^2}{r_a^2-r_i^2} = -p\frac{r_i^2}{r^2}\cdot\frac{r_a^2-r^2}{r_a^2-r_i^2},$$

$$2)\qquad \sigma_r = p\frac{r_i^2}{r^2}\cdot\frac{r_a^2+r^2}{r_a^2-r_i^2}.$$

Als Verschiebungsweg w_r ergiebt sich:

$$3)\qquad w_r = p\frac{r_i^2}{mE(r_a^2 - r_i^2)}\left((m-1)r + (m+1)\frac{r_a^2}{r}\right),$$

als grösste Anstrengung des Materials:

$$4)\qquad \sigma = \frac{p}{r_a^2 - r_i^2}\left(\frac{m-1}{m}r_i^2 + \frac{m+1}{m}r_a^2\right).$$

Hier bedeutet E den Elastizitätsmodul, m die bekannte Konstante der Querkontraktion bei Zugbeanspruchung. Vergl. z. B. Föppl: Festigkeitslehre, S. 306. Wichtig sind die Formeln für die Konstruktion und Berechnung der Geschütz- und Gewehrläufe, der hydraulischen Pressen, der Druckrohre von Bergwerkspumpen und Wasserleitungen, der Dampfrohre und der Druckcylinder gewisser physikalischer Apparate, z. B. derer, die zur Verflüssigung von Gasen durch hohen Druck bei niedriger Temperatur dienen.

Bei den Ringgeschützen werden bekanntlich zur Verstärkung des Widerstandes Ringe auf das Hauptrohr gezogen, die in erhitztem Zustande gerade noch darauf passen, nach geschehener Erkaltung aber Druck nach innen geben. Zur Berechnung des Zustandes braucht man daher auch die Formeln für äusseren Druck, die man erhält, indem man r_a und r_i mit einander vertauscht.

Bei den Formeln der Festigkeitslehre ist es, da während der Entwickelung zahlreiche Vernachlässigungen stattfinden, stets zweckmässig, sie praktisch durch Versuche auf ihre angenäherte Richtigkeit zu prüfen und theoretisch zu revidieren, auf Grund welcher Hypothesen sie etwa als richtig angenommen werden können.

Im vorliegenden Falle ist zunächst das einfachste Proportionalitätsgesetz der Festigkeitslehre angewandt, zweitens ist die dritte Dimension vernachlässigt worden, was bei langen Cylindern etwa ebenso berechtigt ist, wie bei den zweidimensionalen Problemen der Wärme- und der Potentialtheorie. Alles aber lässt sich durch eine einzige Hypothese ersetzen.

Macht man nämlich r_a unendlich gross, so erhält man für die unbegrenzte Platte folgende Formeln:

$$5)\qquad s_r = -p\frac{r_i^2}{r^2},$$

$$6)\qquad \sigma_r = p\frac{r_i^2}{r^2},$$

$$7)\qquad w_r = \frac{p r_i^2}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)\frac{1}{r},$$

$$8)\qquad \sigma_m = p\left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

Die Formel 7) folgt aus den Spannungsformeln, wenn die negative Verlängerung d. h. die Verkürzung des radialen Elementes dr gleich

$$9)\qquad \frac{s\,dr}{E}\left(1+\frac{1}{m}\right)=-\frac{p\,r_i^{\,2}}{E\,r^2}\left(1+\frac{1}{m}\right)dr,$$

die der Strecke des Radius von r_i bis r also gleich

$$-\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{p\,r_i^{\,2}}{E}\int_{r_i}^{r}\frac{dr}{r^2}=\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{p\,r_i^{\,2}}{E}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r}\right)$$

gesetzt wird. Da nämlich nach 6) der unendliche Kreis keine Verlängerung seiner Peripherie erleidet, also dort auch keine Verschiebung nach aussen stattfindet, so ist der unendliche Bereich als ruhend zu betrachten. Da ferner die letzte Formel für $r=\infty$ in

$$w_i=\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{p\,r_i^{\,2}}{r_i\,E}=\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{p\,r_i}{E}$$

übergeht, so bedeutet dieser Ausdruck die Verschiebung der Punkte des inneren Grenzkreises. Die Integralformel giebt also die relative Verschiebung der Punkte r gegen die Punkte r_i an, die absolute Verschiebung der Punkte r wird daher

$$w_r=\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{p\,r_i^{\,2}}{E}\cdot\frac{1}{r},$$

was mit 7) übereinstimmt.

Man kann also für die Untersuchung folgende Hypothese zur Grundlage machen:

Die gegen die cylindrische Innenwand der unbegrenzten Platte wirkende Druckspannung p verursacht in der Entfernung r von der Axe radiale und tangentiale Spannungen

$$s_r=-p\,\frac{r_i^{\,2}}{r^2}\quad\text{und}\quad \sigma_r=p\,\frac{r_i^{\,2}}{r^2},$$

die absolut genommen einander gleich und umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung r sind; sie verursacht ferner Verschiebungen, die umgekehrt proportional der ersten Potenz der Entfernung und von der Grösse

$$w_r=\frac{p\,r_i^{\,2}}{E}\left(1+\frac{1}{m}\right)\cdot\frac{1}{r}$$

sind.

Diese Hypothese also müsste auf ihre Richtigkeit durch Versuche geprüft werden. Da dies mit unbegrenzten Platten nicht geschehen kann, begrenzt man die Platte durch eine konzentrische Cylinderfläche vom Radius r_a und bringt dort den vorher daselbst befindlichen Spannungszustand künstlich hervor. Dazu ist, wenn das Obige richtig ist, nur eine radiale Druckspannung nach innen, also eine Spannung von der Grösse $-p\,\frac{r_i^{\,2}}{r_a^{\,2}}$ nötig. Durch diese und die Innenspannung p wird die richtige Spannung σ_{r_a} von selbst hervorgebracht, denn nach Formel 2) wird durch p:

$$\sigma'_{r_a} = p\frac{r_i^2}{r_a^2}\cdot\frac{r_a^2+r_a^2}{r_a^2-r_i^2},$$

nach der Formel für äusseren Druck dagegen wird durch $p\frac{r_i^2}{r_a^2}$:

$$\sigma_{r_a} = \left(p\frac{r_i^2}{r_a^2}\right)\frac{r_a^2}{r_a^2}\,\frac{r_a^2+r_i^2}{r_i^2-r_a^2} = -\,p\frac{r_i^2}{r_a^2}\,\frac{r_a^2+r_i^2}{r_a^2-r_i^2}.$$

Beide Wirkungen geben vereinigt:

$$\sigma_{r_a} = \sigma'_{r_a} + \sigma''_{r_a} = p\frac{r_i^2}{r_a^2}.$$

Im ganzen Innern herrscht also der durch 5) und 6) dargestellte Spannungszustand, wie auch aus der Formel 1) hervorgeht.

Sollte es also z. B. für das Hauptrohr eines Ringgeschützes wünschenswert erscheinen, dass es während der Zeit der höchsten Spannung p auf Zug ebenso stark wie auf Druck beansprucht werde, so müsste der aufgepasste Ring dabei seinen Gegendruck auf $p\frac{r_i^2}{r_a^2}$ steigern, was auch erreicht werden kann.

Man sollte auf den ersten Blick meinen, die Druckspannungen müssten umgekehrt proportional der ersten Potenz des Radius sein, da die cylindrischen Flächen dieser Grösse direkt proportional sind. Dies ist aber bekanntlich nicht der Fall, da die Zugspannungen jeder Peripherie einen Teil der Druckspannung aufnehmen und nur den Rest weiter wirken lassen. Der Ring des Ringgeschützes dagegen giebt eine Druckspannung derart her, dass das Material des Hauptrohrs in höherem Grade auf Druck beansprucht wird, während die bedenklich hohen Zugspannungen vermindert werden. Einfache Rechenbeispiele ergeben sich bei der Annahme des vorliegenden besonderen Falles, wie ich sie in der Ingenieur-Zeitschrift durchführe.

Wie das einfache Proportionalitätsgesetz der Elastizität nur für gewisse Materialien gilt, so wird auch die vorstehende Hypothese nur eine beschränkte Bestätigung finden. Dies schadet aber nichts, da sie uns für den Unterricht einfache Übungsbeispiele verschafft, die geeignet sind, das Verständnis der Theorie zu erleichtern und auf schwierigere Annahmen vorzubereiten. Handelt es sich in Wirklichkeit um andere Potenzen, wie es das potenzierte Elastizitätsgesetz für gewisse Materialien vermuten lässt, so sind die Rechnungsschwierigkeiten nicht bedeutendere.

Aus den Gleichungen 5) geht hervor, dass nach der angenommenen Hypothese für den Spannungszustand der unbegrenzten Platte oder des auch äusserlich in entsprechender Stärke beanspruchten Rohres ein Spannungspotential von der Grösse:

$$10)\qquad U = p\frac{r_i^2}{r} = k\frac{1}{r}$$

besteht, welches in der Form dem Newton'schen entspricht.

Gleichzeitig aber besteht für die radialen Verschiebungen ein Verschiebungs-Potential:

$$11)\qquad V = \left(1 + \frac{1}{m}\right) p r_i^2 \lg r - k_1 \lg r.$$

Zu jedem solchen Potential gehört auch ein Drehungspotential, welches aber hier ausser acht bleiben kann, da der Zug doch überall gleich dem Druck wird, so dass neue Rechnungen überflüssig sind.

Auf das erstgenannte Potential kann man die konforme Abbildung nicht anwenden, auf das letztere dagegen ist sie anwendbar. Beide geben einen einfachen Überblick über kompliziertere Zustände und eine ausserordentliche Vereinfachung der Berechnungen.

Soll das Spannungspotential der Reihe nach Werte annehmen, die einer arithmetischen Reihe entsprechen, so dass die Potentialdifferenzen von Kreis zu Kreis gleich gross sind, so muss dasselbe mit $\frac{1}{r}$ geschehen. Ist die Reihe für jenes z. B.:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots$$

so muss r die Werte

$$\frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ldots$$

annehmen.

Soll dasselbe mit dem Verschiebungspotential geschehen, so hat $\lg r$ der arithmetischen Reihe zu folgen, also r der Reihe:

$$e^{\pm 0},\ e^{\pm 1},\ e^{\pm 2},\ e^{\pm 3},\ldots$$

Häufiger findet aber hier aus bekannten Gründen die Reihe:

$$e^{\pm 0},\ e^{\pm\frac{2\pi}{n}},\ e^{\pm\frac{4\pi}{n}},\ e^{\pm\frac{6\pi}{n}},\ e^{\pm\frac{8\pi}{n}},\ldots$$

Anwendung, weil diese bequem auf die quadratische Einteilung der Ebene führt, die bei dem Spannungspotential keine Anwendung findet.

Wichtig ist noch die Berechnung der Verschiebungsarbeit, für die, weil die einzelnen Teile einander ausweichen, nicht die Verschiebung selbst massgebend ist, sondern die an der betreffenden Stelle auftretende Dehnung und Verkürzung. Nach gebräuchlicher Annahme wächst während der Verschiebung die Spannung regelmässig von o auf s an, also wird $\frac{s}{2}$ massgebend. Hat ein Stab die Länge l und den konstanten Querschnitt f und ist die Dehnung oder Verkürzung gleich λ, so ist die geleistete Arbeit gleich $\frac{s}{2}\lambda f$. Da nach bekanntem Satze der Mechanik die Arbeiten einfach algebraisch, nicht aber nach dem Parallelogramm, addiert werden, so ist die Berechnung der inneren Arbeit des Materials sehr einfach. Die Verkürzungsarbeit und die Verlängerungsarbeit sollen getrennt behandelt werden. Nimmt man für die radiale Verkürzung die Werte von s und λ aus den Gleich-

ungen 5) und 9) für f die Cylinderfläche $2r\pi\delta$, wo δ die Dicke der Platte ist, so ergiebt sich als Summe der Verkürzungsarbeiten

$$A_1 = p^2 r_i^4 \left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{\pi\delta}{E} \int_{r_i}^{\infty} \frac{dr}{r^3} = \frac{1}{2}\,\frac{p^2 r_i^2}{E} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \pi\delta.$$

Berechnet man die Dehnungsarbeit für den Kreisring mit den Radien r und $r + dr$, und integriert man von r_i bis ∞, so erhält man für A_2 denselben Wert wie für A_1. Die gesamte innere Arbeit des Materials ist also

12) $$A = \frac{p^2 r_i^2}{E} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \pi\delta.$$

Dafür giebt es eine gute Probe. Die etwa von Pulvergasen an die innere Wand abgegebene Arbeit ergiebt sich aus p, der Fläche $2r_i\pi\delta$ und aus der wirklichen Verschiebung $\frac{p r_i}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$, wenn während des Vorgangs die Spannung regelmässig von o auf p anwächst, als derselbe Wert A, so dass, wie zu erwarten stand, die äussere Arbeit gleich der Summe aller inneren Verschiebungsarbeiten ist.

In der Ingenieur-Zeitschrift berechne ich Beispiele unter Annahme eines Druckes von 3000 Atmosphären. Da die Verschiebungen dabei nur die Grösse 0,195 mm betragen, ist die Arbeitsabgabe gering. Man hat aber nach Abstellung des Druckes an der Innenwand auf Schwingungen von etwa 0,35 mm zu rechnen.

Die Arbeit für den Kreisring mit den Radien r_i und $2r_i$ beträgt $\frac{3}{4}$ der Gesamtarbeit, die ganze übrige unbegrenzte Masse übernimmt nur $\frac{1}{4}$. So sieht man recht deutlich, wie schwach die Beanspruchung der äusseren Masse ist, wie unwirksam also die blosse Verdickung der Druckrohre schliesslich werden muss.

Ich werde nun zu dem Falle übergehen, wo mehrere cylindrische Öffnungen in der Platte befindlich sind. Ihr Durchmesser soll gegen ihre gegenseitige Entfernung klein sein, so dass dieselben Vereinfachungen eintreten, wie bei den in der Regel als punktförmig bezeichneten Elektroden. Muss der Durchmesser berücksichtigt werden, so sind gewisse Korrekturen zu machen, die aber in einiger Entfernung von den Cylinderwänden verschwindend klein werden. Da die Grösse der Spannungen auch von der Konstanten $p r_i^2$ abhängt, so sollen zwei solche Wirkungen als gleichwertig betrachtet werden, sobald sie in dieser Konstanten übereinstimmen. Vierfache Spannung im Cylinder vom doppelten Radius wirkt also ebenso, wie einfache Spannung im Cylinder vom einfachen Radius. (Vergl. die Bestrebungen, das Kaliber der Gewehre möglichst klein zu machen.)

Die Elemente der Potentialtheorie, wie sie in meinem Lehrbuch elementar entwickelt sind, setze ich als bekannt voraus.

Spannungen der zu besprechenden Art treten z. B. auch ein, wenn kalt gehaltene Bolzen in cylindrische Öffnungen eingetrieben werden, in die sie noch hinein passen, wenn die Platte stark erhitzt ist. Zieht sich die Platte bei der Erkaltung zusammen, so steht sie unter entsprechender Spannung. Dies ist vielleicht die einfachste Art, die Versuche zu arrangieren, da sich bei hydraulischen Experimenten die Beobachtung ganz ausserordentlich erschwert, weil die Bodenfläche sich anders verhält als die Cylinderwände.

2. Mehrpunktprobleme.

Es seien zunächst zwei cylindrische Öffnungen in der unbegrenzten Platte, beide vom Radius a. In beiden werde dieselbe Spannung p angebracht. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte M_1 und M_2 mache man zur X-Axe, ihren Halbierungspunkt O zum Koordinatenanfang. Ohne der Allgemeinheit zu schaden, kann man gelegentlich die Abstände OM_1 und M_2O gleich 1 setzen. Wie gross sind nun die Spannungen in einem Punkte P, der von den Mittelpunkten die Entfernungen r_1 und r_2 hat?

$$s_1 = \sigma_1 = \pm \frac{pa^2}{r_1^{\,2}} \quad \text{und} \quad s_2 = \sigma_2 = \pm \frac{pa^2}{r_2^{\,2}}$$

geben die Resultanten

$$1) \qquad s = \sigma = \pm pa^2 \sqrt{\frac{1}{r_1^{\,4}} + \frac{1}{r_2^{\,4}} + \frac{2\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{r_1^{\,2} r_2^{\,2}}}.$$

Die Neigung α von s ergiebt sich, im Sinne einer Anziehung gerechnet, aus

$$2) \qquad \tan\alpha = \frac{r_2^{\,2}\sin\vartheta_1 + r_1^{\,2}\sin\vartheta_2}{r_2^{\,2}\cos\vartheta_1 + r_2^{\,2}\sin\vartheta_2},$$

die von σ ist um $\frac{\pi}{2}$ grösser. Die eine Neigung ist die Normale der Niveaulinie:

$$3) \qquad pa^2\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = c \quad \text{oder} \quad k\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = c,$$

die andere Normale der Orthogonalkurve:

$$4) \qquad (\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2) = \gamma.$$

Die Gleichung 3) ist die der Spannungslinien des Druckes s, die Gleichung 4) die der Spannungslinien des Zuges. Ihre Gestalt ist aus jedem Werke der Potentialtheorie bekannt. Eine sehr einfache Konstruktion giebt das Maxwellsche Verfahren, die Diagonalkurven des Maschennetzes der beiden Kreisscharen bezw. der beiden Strahlenbüschel zu zeichnen. Bei den Kreisen folgen die Radien z. B. dem besprochenen Gesetze:

$$5) \qquad \frac{1}{0}, \ \frac{1}{1}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{5}, \ldots,$$

bei den Strahlen die Kosinus der Neigungswinkel z. B. dem Gesetze:

$$0, \ \pm\frac{1}{n}, \ \pm\frac{2}{n}, \ \pm\frac{3}{n}, \cdots \pm\frac{n}{n}.$$

Die Asymptoten der Kurven 4) folgen mit den Kosinus ihrer Neigungswinkel demselben Gesetze. Das Spannungspotential ist der durch 3) gegebene Ausdruck:

7) $$U = pa^2\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \quad \text{oder} \quad U = \varkappa\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Die Kurven $s = c_1$ sind die Linien gleicher Zug- und Druckspannung, die Kurven $\tan\alpha = c_1$ sind die Linien gleicher Richtung dieser Spannungen. Die letzteren sind umgekehrt proportional den kleinen Abständen der Niveaulinien 3), sobald die Einteilung 5) gewählt ist. Der Spannungszustand ist damit vollständig beschrieben.

Ganz anderen Gesetzen folgen die Verschiebungen, denn

$$w_1 = \left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{pa^2}{E}\cdot\frac{1}{r_1} \quad \text{und} \quad w_2 = \left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{pa^2}{E}\cdot\frac{1}{r_2}$$

setzen sich zusammen zu der resultierenden Verschiebung:

8) $$w = \left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{pa^2}{E}\sqrt{\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{2\cos\gamma}{r_1 r_2}} = 2\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{pa^2}{E}\,\frac{r}{r_1 r_2} = \varkappa_1\frac{2r}{r_1 r_2},$$

wo r der Radius OP ist. Die leichte Umformung des ersten Ausdrucks findet man in meiner Potentialtheorie (erschienen bei B. G. Teubner). Die Richtung β der Resultante w ergiebt sich aus:

$$\tan\beta = \frac{r_2\sin\vartheta_1 + r_1\sin\vartheta_2}{r_2\cos\vartheta_1 + r_1\cos\vartheta_2}.$$

Führt man wieder r und seine Neigung ϑ ein, so folgt:

$$\tan\beta = \tan[(\vartheta_1+\vartheta_2)-\vartheta],$$

oder endlich

9) $$\beta = (\vartheta_1+\vartheta_2)-\vartheta.$$

Der Faktor $\varkappa_1$ hat sich hier überall weggehoben.

Die Verschiebungen in der Druckrichtung sind normal gerichtet gegen die Niveaulinien der Verschiebung, deren Gleichung lautet:

10) $$\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{pa^2}{E}(\lg r_1 + \lg r_2) = c \quad \text{oder} \quad \varkappa_1(\lg r_1 + \lg r_2) = c,$$

wofür man auch schreiben kann:

10*) $$r_1 r_2 = e^{\frac{c}{\varkappa_1}},$$

so dass es sich um konfokale Lemniskaten handelt. Die Verschiebungslinien selbst sind von der Gleichung:

11) $$(\vartheta_1+\vartheta_2) = \gamma,$$

die bekanntlich ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln bedeuten.

Die Maxwellsche Konstruktion giebt das richtige Netz, wenn die Kreisradien in geometrischer Reihe aufeinander folgen, z. B. in der Reihe:

12) $$e^0,\quad e^{\pm\frac{2\pi}{n}},\quad e^{\pm\frac{4\pi}{n}}\quad e^{\pm\frac{6\pi}{n}},\ldots,$$

während die Neigungen der Strahlen jedes Büschels der Reihe:

13) $$0, \quad \pm\frac{2\pi}{n}, \quad \pm\frac{4\pi}{n}, \quad \pm\frac{6\pi}{n}, \dots$$

folgen. So erhält man die Einteilung in kleine Quadrate, während die Spannungen auf unähnliche Rechtecke führten.

Der Ausdruck für das Verschiebungspotential ist

14) $$V = \left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{pa^2}{E}(\lg r_1 + \lg r_2) = \varkappa_1(\lg r_1 + \lg r_2) = \varkappa_1 \lg(r_1 r_2).$$

Ist die Einteilung ins Kleinste fortgesetzt, so sind die Grössen der Verschiebungen umgekehrt proportional den Abständen der Niveaulinien bezw. der Verschiebungslinien, d. h. den Dimensionen der Quadrate.

Der in 8) vorkommende Ausdruck $\varkappa_1 \frac{2r}{r_1 r_2}$ ist der absolute Betrag des Differentialquotienten derjenigen Funktion, durch die das Kurvennetz in eine Doppelschar orthogonaler Parallelen transformiert wird. Diese Funktion ist

$$Z = \varkappa \lg[(z - z_1)(z - z_2)] = \varkappa \lg[(z-1)(z+1)],$$

sobald M_1 um M_2 in die Punkte $x = \pm 1$ der x-Axe gelegt sind (vergl. meine Abhandlung im vorigen Bande dieser Zeitschrift). Sind dS und ds einander entsprechende Elemente (wobei s nichts mit der Spannung zu thun hat), so besteht zwischen ihnen die Gleichung:

$$dS = \varkappa_1 \frac{2r}{r_1 r_2} ds \quad \text{bezw.} \quad ds = \frac{r_1 r_2}{\varkappa_1 2r} dS.$$

In der Z-Ebene sind alle Quadratseiten dS einander gleich, folglich sind die Quadratseiten des lemniskatisch-hyperbolischen Systems der z-Ebene proportional dem Ausdrucke $\frac{r_1 r_2}{r}$. Dieser ist für jede Lemniskate, auf der $r_1 r_2$ konstant ist, proportional $\frac{1}{r}$; für jeden Kreis um O proportional $r_1 r_2$.

Dagegen ist der in 9) stehende Ausdruck $\vartheta - (\vartheta_1 + \vartheta_2)$ der Richtungsunterschied der dS gegen die ds, also ist die Neigung der den horizontalen Parallelen entsprechenden Quadratseiten gleich

$$(\vartheta_1 + \vartheta_2) - \vartheta,$$

was mit Obigem übereinstimmt. $\vartheta - (\vartheta_1 + \vartheta_2)$ ist dabei die Abweichung des Differentialquotienten der abbildenden Funktion Z.

Damit ist die Angelegenheit der Verschiebungen auch funktionentheoretisch erledigt.

Die Verschiebungen gehen in den Hyperbeln vor sich. Daher soll genauer untersucht werden, was aus einem kleinen lemniskatisch-hyperbolischen Quadrate eigentlich wird. Auf die lemniskatischen Randlinien des Quadrates wirken nach innen breite Bündel von Drucklinien und nach aussen schmale Bündel von Zuglinien, die einen um den kleinen Winkel $(\alpha - \beta)$, der aus 2) und 9) zu berechnen ist, von der Normalen abweichend, die andern um ebensoviel gegen die Randlinie geneigt. Entsprechend wirken auf die hyperbolischen Seiten

breite Bündel von Zuglinien und schmale Bündel von Drucklinien, die einen fast normal, die anderen fast tangential, die einen nach aussen, die anderen nach innen. Durch Zerlegung erhält man die normalen Druckkräfte und die tangentialen Schubkräfte. Letztere verwandeln die rechten Winkel des Quadrates in spitze und stumpfe, die nur wenig von 90^0 unterschieden sind. Die entsprechenden Berechnungen können zur Kontrolle durchgeführt werden, sind aber für uns überflüssig. Ist nämlich in dem kleinen Quadrat $ABCD$ die Seite $AD > BC$, so bewegt sich nach Obigem A um weniger als B, der Lemniskatenbogen AB geht also nicht in einen solchen A_1B_2 über, sondern in eine Schräglinie A_1B_1, die um ξ abweicht. Dieses ξ kann genau bestimmt werden. Bezeichnet man den Abstand OA mit r_a,

Fig. 1.

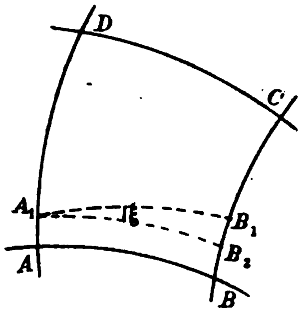
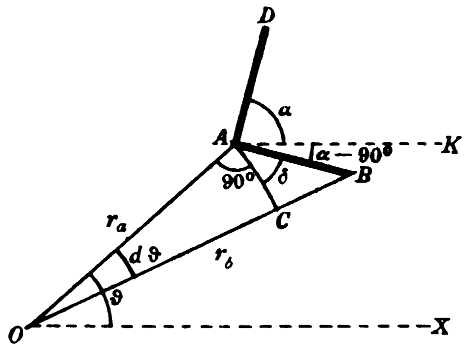


Fig. 2.



OB mit r_b, so wird in Figur 1 die Verschiebung $AA_1 = \varkappa_1 \frac{2r_a}{r_1 r_2}$, dagegen wird die „Parallelverschiebung“

$$BB_1 = \varkappa_1 \frac{2r_b}{r_1 r_2}.$$

Für A und B sind beide Produkte $r_1 r_2$ einander gleich, also ist der Überschuss:

$$B_2B_1 = 2\varkappa_1 \frac{r_b - r_a}{r_1 r_2}.$$

Hier hat (nach Fig. 2) $r_b - r_a$ folgende Bedeutung. Der um O mit OA beschriebene Bogen AC macht $CB = r_b - r_a$, also ist

$$r_b - r_a = AB \sin\delta = AB \sin[(180^0 - \vartheta) - 90^0 - (\alpha - 90^0)],$$

wo α der Neigungswinkel von AD, also gleich $(\vartheta_1 + \vartheta_2) - \vartheta$ ist. Es folgt $r_b - r_a = AB \cdot \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)$, also ist der Verschiebungsüberschuss:

$$B_2B_1 = \frac{2\varkappa_1}{r_1 r_2} AB \cdot \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2),$$

und daher

$$\tan \xi = \frac{B_2 B_1}{AB} = \frac{2\varkappa_1}{r_1 r_2} \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2),$$

oder in der ursprünglichen Bezeichnung:

$$15) \qquad \tan \xi = 2\left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{pa^2}{E} \cdot \frac{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{r_1 r_2}.$$

Hier sind für unendlich kleine Quadrate die unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung in aller Schärfe berücksichtigt. Die Tangente des Schubwinkels ξ ist also proportional der Grösse $\frac{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{r_1 r_2}$. Für die Eckpunkte A, B, C, D eines endlichen „Quadrates" handelt es sich um ξ_a, ξ_b, ξ_c, ξ_d, so dass dieses ein Trapez wird. Nur bei unendlicher Kleinheit kann es als Parallelogramm angesehen werden. Man beachte, dass die Unterschiede der Kräfte längs der Quadratseiten hier berücksichtigt werden, was in der Regel nicht geschieht.

Auf jeder Lemniskate ist $\tan \xi$ proportional $\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)$, auf jeder Hyperbel proportional $\frac{1}{r_1 r_2}$. Auf den Koordinatenaxen ist $\tan \xi$ gleich Null, ebenso im unendlich fernen Bereich. Auf jeder Lemniskate ist ξ, also auch die Schubspannung, am grössten für $\vartheta_1 + \vartheta_2 = 90^0$, d. h. im Schnittpunkte mit der Hyperbel, deren Asymptoten die Neigungen $\pm 45^0$ haben.

Da man sowohl AA_1, als auch BB_1, CC_1, DD_1 genau kennt, kennt man auch A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 und D_1A_1 auf das genaueste, daher sind auch die spezifischen Dehnungen und Verkürzungen bekannt.

Die Kurven gleich starker Verschiebung haben die Gleichung:

$$16) \qquad 2\left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{pa^2}{E} \frac{r}{r_1 r_2} = c,$$

die Kurven gleicher Verschiebungsrichtung die Gleichung:

$$17) \qquad \vartheta_1 + \vartheta_2 - \vartheta = \gamma.$$

Sie sind orthogonal zu einander und bilden selbst ein isothermisches Kurvensystem. In Figur 135 meiner Potentialtheorie und in Figur 45 der isogonalen Verwandtschaften sind sie dargestellt.

Die Verschiebungen entsprechen ganz den Geschwindigkeiten für das zweidimensionale Zweipunktproblem der stationären Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit im Helmholtzschen Sinne unter Annahme eines Geschwindigkeitspotentials. Beide Probleme unterscheiden sich nur dadurch, dass die Stromfäden ohne Reibung und sonstige gegenseitige Einwirkungen unabhängig neben einander herlaufen, während hier die Fasern mit einander verbunden sind, so dass Zug-, Druck- und Schubspannungen entstehen müssen.

Bringt man den beschriebenen Spannungszustand hervor, so entstehen die angegebenen Verschiebungen. Bringt man die letzteren hervor, so entstehen die beschriebenen Spannungen.

Wegen der Einfachheit der Addition der Arbeiten ergiebt sich als Wert der gesamten inneren Verschiebungsarbeit für die Platte von der Dicke δ

$$A = 2p^2a^2\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{\pi}{E}.$$

Sind die Durchmesser der Cylinder so gross, dass man sie berücksichtigen muss, so sind Korrekturen zu machen, die etwa der Figur 62 der „Potentialtheorie" entsprechen. In einiger Entfernung werden die Änderungen verschwindend klein. Sie werden dadurch hervorgerufen, dass die Kreise weder Niveaulinien der Spannung noch solche der Verschiebung sind.

Haben $p_1 a_1^2 = \nu_1$ und $p_2 a_2^2 = \nu_2$ für beide Cylinder verschiedene Werte, so hört die Symmetrie auf, und der Faktor pa^2 lässt sich nicht mehr absondern. Im übrigen aber sind die Rechnungen dieselben und ohne jede Schwierigkeit. Für die Konstruktion und Berechnung der Spannungslinien und der Niveaulinien der Spannung werden die Figuren 71 bis 75 meiner „elementaren Potentialtheorie" massgebend. Die ersteren erhalten die Gleichung:

18) $$\nu_1 \cos\vartheta_1 + \nu_2 \cos\vartheta_2 = \gamma,$$

die andern die Gleichung:

19) $$\frac{\nu_1}{r_1} + \frac{\nu_2}{r_2} = c.$$

Für die Verschiebungen handelt es sich um die Gleichungen:

20) $$\nu_1\vartheta_1 + \nu_2\vartheta_2 = \gamma_1$$

und

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{1}{E}(\nu_1 \lg r_1 + \nu_2 \lg r_2) = c,$$

oder, wenn man die Konstanten mit nach rechts schafft,

21) $$\nu_1 \lg r_1 + \nu_2 \lg r_2 = c_1.$$

Die innere Verschiebungsarbeit des Materials wird für die Platte von Dicke δ

$$A = \frac{\pi\delta}{E}\left(1-\frac{1}{m}\right)[p_1 a_1^2 + p_2 a_2^2].$$

Die Kurven 20) und 21) gehören zu den unregelmässigen Hyperbeln und Lemniskaten zweiter Ordnung, deren Eigenschaften in meiner „Theorie der isogonalen Verwandtschaften" und in der oben genannten Abhandlung im Jahrgang 1897 behandelt sind. Die abbildende Funktion, deren Differentialquotient dieselbe Rolle wie oben spielt, ist jetzt von der Form:

$$Z = \left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{1}{E}[\nu_1 \lg(z-z_1) + \nu_2 \lg(z-z_2)]$$
$$= \varkappa\nu_1 \lg(z-z_1) + \varkappa\nu_2 \lg(z-z_2).$$

Der absolute Betrag und die Abweichung des Differentialquotienten:

$$Z' = \frac{\varkappa\nu_1}{z-z_1} + \frac{\varkappa\nu_2}{z-z_2} = \varkappa\frac{\nu_1(z-z_2)+\nu_2(z-z_1)}{(z-z_1)(z-z_2)} = \varkappa(\nu_1+\nu_2)\frac{z-\dfrac{\nu_1 z_2+\nu_2 z_1}{\nu_1+\nu_2}}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

ergeben sich als

$$R = \varkappa(\nu_1+\nu_2)\frac{\varrho}{r_1\cdot r_2}$$

und

$$\Phi = \vartheta - (\vartheta_1 + \vartheta_2),$$

wobei r_1 und r_2, ϑ_1 und ϑ_2 dieselbe Bedeutung wie oben haben, während der Radiusvektor ϱ von dem Punkte $\frac{\nu_1 z_2 + \nu_2 z_1}{\nu_1 + \nu_2}$ ausgeht. Dieser ist der „Schwerpunkt“ von M_1 und M_2, wenn man die Faktoren ν_1 und ν_2 als Gewichte auffasst. Nach ihm hin sind alle Asymptoten der Kurven 20 gerichtet. Auf Grund dieser Bemerkungen ist auch das unsymmetrische Zweipunktproblem fast wörtlich wie oben zu erledigen (vergl. Jahrgang 1897, S. 225).

Dasselbe gilt auch von den Mehrpunktproblemen, wo sogar einige von den Faktoren $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ negativ sein dürfen, wie es in der vorigen Arbeit angenommen worden ist. Hier würde dies den rein theoretischen Fall bedeuten, dass die einen Cylinderwände auf Zug, die anderen auf Druck beansprucht würden. Die Zugbeanspruchung lässt sich aber praktisch kaum durchführen.

Handelt es sich z. B. um zwei entgegengesetzt gleichwertige Cylinder, d. h. gilt für den einen $+pa^2$, für den anderen $-pa^2$, so geben die Spannungen die Linien $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = c$ und $\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 = \gamma$, die aus der Lehre vom Magnetismus bekannt sind (vergl. Figur 70 meiner elementaren Potentialtheorie). Die Verschiebungen hingegen erfolgen in Linien $\vartheta_1 - \vartheta_2 = \gamma$ mit den Niveaukurven $\lg \nu_1 - \lg \nu_2 = c$, die ein Kreisbüschel und die zugehörige Kreisschar darstellen. Für den Fall der Ungleichwertigkeit geht ein Teil der Spannungslinien ins Unendliche, wie es dort in Figur 76 und 77 gezeigt ist. Dasselbe gilt von den Verschiebungslinien in ähnlicher Weise. Die Asymptoten der Verschiebungslinien gehen in jedem Falle nach dem Schwerpunkte der Wurzelpunkte der massgebenden Funktion (vergl. Theorie der isogonalen Verwandtschaften), der mit dem Massenschwerpunkte zusammenfällt. Die Bedeutung der Lemniskaten und Hyperbeln höherer Ordnung, die für zahlreiche Gebiete der mathematischen Physik eine so grosse ist, kommt also auch im Gebiete dieser Festigkeitstheorien zur Geltung.

3. Schlussbemerkungen.

Worin liegt nun der Wert der obigen Betrachtungen?

Die mathematische Elastizitätstheorie pflegt, wenn sie im Sinne von Saint-Venant, Clebsch und Grashoff von vornherein in voller Allgemeinheit begonnen wird, den Studierenden der technischen Hochschule und der Universität mancherlei Schwierigkeiten zu bieten. Sie beschäftigt sich mit langwierigen allgemeinen Betrachtungen, für die dem Durchschnittszuhörer bestimmte Vorstellungen fehlen, sodass das Fortbestehen von Zweifeln erklärlich erscheint. Die Früchte werden erst später gepflückt und wirkliche Beispiele kommen erst nach Kenntnisnahme des gesamten Werkzeugapparates zur Geltung.

Ich glaube, dass die obigen Beispiele, die sich auf eine einfache Hypothese stützen, deren Richtigkeit zunächst als zweifelhaft hingestellt werden kann, sich ganz ausserordentlich als einführendes Beispiel eignen würden, weil das gleichzeitige Auftreten der Zug-, Druck- und Schubspannungen, der Unterschied der Spannungsrichtungen und Verschiebungsrichtungen, die Dehnungen, Verkürzungen und Winkeländerungen in einer so klaren und durchsichtigen Weise auseinander gehalten werden können, dass der Studierende leicht erkennt, worauf es ankommt. Rechnungsschwierigkeiten aber finden sozusagen gar nicht statt. Gleichzeitig wird der Wert der Lehren vom Potential, von der konformen Abbildung und den Kraftlinien deutlich ins Licht gestellt.

Weitere Bemerkungen lassen sich an das Einpunktproblem anschliessen, wenn man sich den Cylinder längs der X-Axe aufgeschnitten denkt, wobei ganz andere Verhältnisse eintreten. Betrachtet man einen ausgeschnittenen Sektor kleinen Centriwinkels, so kann man für die Spannungen das logarithmische Potential anwenden, für die Verschiebungen das aus diesem durch Integration hervorgehende. Ist aber der Centriwinkel grösser, so treten Entlastungen der Tangentialspannungen ein, die kleiner sind als früher. Die Anwendbarkeit der konformen Abbildung hört damit auf, aber mit Potentialfunktionen kann man trotzdem noch arbeiten.

Angenommen, für die Hohlkugel mit unbegrenzter umgebender Masse liesse sich eine Hypothese von ähnlicher Einfachheit aufstellen, wie bei der unbegrenzten Platte mit einer cylindrischen Öffnung, angenommen also, auch hier dürfte man mit irgend welchen Potenzen von r arbeiten, z. B. mit $\frac{1}{r^p}$ für die Spannungen und $\frac{1}{r^q}$, z. B. $\frac{1}{r^{p+1}}$ für die radialen Verschiebungen, so würde dies zwar nicht genau zu den Resultaten der strengeren mathematischen Theorie stimmen, wie sie z. B. bei Kirchhoff in der 97. Vorlesung abgeleitet werden, aber die Potenzen liessen sich doch so wählen, dass zwischen beiden Theorien eine grosse Annäherung stattfindet. Ob die Rechnungserleichterungen dabei ebenso grosse sein würden wie oben, das bedarf noch der Untersuchung.

Übrigens braucht man sich bei den ebenen Problemen durchaus nicht auf Punktprobleme zu beschränken, man darf auch Linearprobleme, z. B. das der elliptischen Koordinaten, heranziehen. Vielleicht gelingt es auf dem vorgeschlagenen Wege, auch anderen Problemen, bei denen die statischen Unbestimmtheiten noch eine grosse Rolle spielen, zur korrekten oder angenäherten Lösung zu verhelfen. Aber auch die Untersuchung der Schwingungen, die nach plötzlicher Abstellung der Spannung in dem Material eintreten, z. B. in der Masse des Ringgeschützes nach abgegebenem Schusse, dürften sich an den einfachen Beispielen, die oben angegeben sind, in Angriff nehmen lassen.

Die Variabilität der Lebewesen und das Gausssche Fehlergesetz.

Von

Prof. Dr. F. Ludwig

in Greiz.

Über Beziehungen zwischen Botanik und Mathematik habe ich seit einer Reihe von Jahren unter der Überschrift: „Wichtigere Kapitel aus der mathematischen Botanik" in Hoffmanns Zeitschrift für mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht eingehender berichtet (vergl. 22 des Litteraturverzeichnisses am Schluss dieses Aufsatzes). Daselbst finden sich auch meine ersten eigenen Untersuchungen über Variationsstatistik niedergelegt, ein Wissensgebiet, durch das rasch eine Fülle ungeahnter Gesetzmässigkeiten aufgedeckt worden ist, das aber die Mitarbeit der Mathematiker in Anspruch genommen hat und fortgesetzt in Anspruch nimmt. Der Botaniker kann heutzutage der Variationsstatistik und der Variationskurven ebenso wenig entraten, wie der Anthropologe und Zoologe, sodass auch Speziallexika und Jahresberichte (z. B. Gad, Reallexikon der medizinischen Propädeutik, Justs Botan. Jahresbericht in dem Abschnitt über Variation und Bildungsabweichungen 70 und 71 des Litteraturverzeichnisses) diesen Titel neuerdings mit aufnehmen mussten. Nur wenige Mathematiker haben aber bisher dem neuen Gebiet ihre Aufmerksamkeit zugewendet und unter diesen am wenigsten deutsche Mathematiker, obwohl die mathematische Grundlage von keinem Geringeren als Gauss herrührt (1, 2). Ich komme daher der Aufforderung des Herausgebers dieser Zeitschrift gerne nach, über dieses Grenzgebiet zwischen Mathematik und den biologischen Naturwissenschaften, in erster Linie der Botanik, kurz zu berichten.

Es sei mir dabei gestattet, die Reihenfolge, in welcher ich selbst mit den einzelnen Abschnitten dieses Wissensgebietes bekannt wurde, auch hier einzuhalten.

Die Erfahrung, dass das von J. Bernoulli aufgefundene und von Poisson (3) so genannte Gesetz der grossen Zahlen in den verschiedensten Gebieten Geltung hat, selbst da, wo scheinbar willkürliche menschliche Handlungen vorliegen (cf. Ad. Wagner, die Gesetz-

mässigkeit in den scheinbar willkürlichen menschlichen Handlungen vom Standpunkte der Statistik, Litteraturverzeichnis 8), z. B. hinsichtlich der Selbstmorde, Eheschliessungen, des Verhältnisses der Knaben- und Mädchengeburten, so auch in Betreff des Verhältnisses der männlichen und weiblichen Individuen bei Amphibien (nach Pflüger u. a.), bei Mercurialis annua, dem Hanf und anderen Pflanzen (vergl. F. Heyer, Landwirtschaftliche Presse 1886 Nr. 5; Fisch, Berichte der deutschen Bot. Ges. Bd. V H. 3, S. 136—146), diese Erfahrung erweckte in mir die Überzeugung, dass auch die Merkmale, die in ihrer Gesamtheit das Wesen der Pflanzenspecies ausmachen, innerhalb bestimmter Grenzen und um bestimmte Mittel variieren, die sich aus der grossen Zahl ermitteln lassen. Es widersprach das allerdings der Ansicht der meisten Botaniker. Während z. B. die eine Blumenart fast immer dieselbe Blütenzahl hat, sollte bei der anderen nach der herrschenden Meinung die Zahl ganz regellos schwanken (vergl. 63). Beobachtungen in der grossen Zahl haben meine Überzeugung vollauf bestätigt, daneben aber zwei weitere mir unerwartete Gesetzmässigkeiten zu Tage gefördert. Ich fing mit den Randstrahlen der Kompositen an und zwar mit Chrysanthemum Leucanthemum, der gemeinen Wucherblume, und fand hier schon nach wenigen Zählungen, dass am häufigsten 21 Strahlen auftreten. Bei graphischer Darstellung ergaben vielfach schon die Variationskurven für hundert Zählungen nicht nur die gleiche Gipfellage bei 21 Strahlen, sondern auch sonst ähnlichen Verlauf und bei Zählungen von mehreren Tausenden zeigten die Kurven — mochten die Zählungen vorgenommen sein wo sie wollten, in ganz verschiedenen Gegenden — den gleichen Verlauf: den Hauptgipfel bei 21, sekundäre Maxima bei 8, 13, 34 und deren Duplis und Triplis. Weitere Beobachtungen an anderen Kompositen ergaben analoge Resultate: allenthalben waren neben dem Hauptgipfel Nebengipfel vorhanden, die sämtlich bei den Zahlen des Fibonacci und deren Doppeltem und Dreifachem lagen. Dieses Gesetz fand sich nicht nur bestätigt bezüglich der Randstrahlen, sondern bezüglich der Blütenzahl des gesamten Blütenstandes der Korbblütler [Chrysanthemum, Anthemis, Achillea, Centaurea, Aster, Senecio, Solidago, Bidens, Coriopsis etc. etc. (vergl. 21, 22, 23, 26, 40, 48, 59, 60, 61, 64)], der Primnlaceen (49), Papilionaceen [Lotus, Medicago, Trifolium (vergl. 62)], der Umbelliferen (40) und anderer Pflanzenfamilien. Ja, als ich anfing, bei verschiedenen Bäumen die Zahl der Zweige am Ast, der Blätter am Jahrestrieb festzustellen (vergl. 54), wo gewiss bis dahin niemand die Wiederkehr bestimmter Zahlen vermutete, da traf ich gleichfalls die Variationskurven mit den Fibonaccigipfeln (Fibonaccikurven) wieder. So zeigten die Kurztriebe der Wintereiche Gipfel bei 3, 5, 8, 10 (2×5), 13 etc. Diese statistischen Ergebnisse zeigten deutlich, dass das häufige Vorkommen der 5 Zahl im Blütenbau, das Vorkommen der 13 Strahlen bei Senecio, der 55 bei Helianthus etc.

mit der Anordnung der betreffenden Organe nach der bekannten Braun-Schimperschen „Divergenzreihe" in Zusammenhang stehen (vergl. 64) und führten zu neuen Versuchen, das Vorkommen der Fibonaccizahlen hier, wie in den Zellreihen gewisser niederen Algen (Melosira), wo es sich um ein bestimmtes Teilungsgesetz handelt, auf allgemeine Wachstums- und Entwickelungsgesetze zurückzuführen (vergl. 59 S. 25 Anm., 22, 24, 59).

Es hatten also diese ersten pflanzenstatistischen Untersuchungen einmal in den Variationskurven ein wichtiges diagnostisches Merkmal zur Unterscheidung nahe verwandter Arten dargethan, dann ein in der Pflanzenwelt weit verbreitetes, die Zahl der Pflanzenorgane beherrschendes Gesetz aufgedeckt und zu dessen Erklärung herausgefordert.

Eine weitere Gesetzmässigkeit, die für uns von ganz besonderer Bedeutung ist, fiel mir aber noch auf: es fielen in den Tausendkurven für ein und dasselbe Merkmal nicht nur die Haupt- und Nebengipfel immer auf denselben Abscissenwert, sondern für sie, wie für die von dem Gipfel abweichenden Werte, waren **auch die Ordinaten von konstantem Wert**. Bei den Strahlen der grossen Wucherblume waren z. B. die Frequenzverhältnisse der gipfelnahen Zahlen bei verschiedenen Zählungen die folgenden:

19	20	22	23	
5,6%	9%	10%	6,7%	bei 6000 Zählungen,
5%	9,3%	11%	6,9%	„ weiteren 1000 Zählungen,
5%	9%	10%	6,8%	„ 17000 Zählungen,

während 21 bei 22% der gezählten Exemplare vorkommt. Bei der Saat-Wucherblume fanden sich schon in verschiedenen Hundertzählungen die folgenden Frequenzen nahe dem Gipfel (bei 13):

	11	12	13	14	15
I. Hundert:	6	13	53	13	5%,
II. Hundert:	3	15	51	14	6%,
Tausend:	5	14	53	13	5%.

So weit waren meine bis dahin rein empirischen variationsstatistischen Studien gediehen, als ich durch die Arbeiten von Hugo de Vries und Verschaffelt auf einfache Variationskurven (ohne sekundäre Gipfel) und auf die Arbeiten von Quételet und Galton etc. aufmerksam gemacht wurde. Ad. Quételet hatte das Gesetz der grossen Zahlen, von dem ich ausging, bezeichnender la loi des causes accidentelles benannt „parce qu'elle indique comment se distribuent, à la longue une série d'événements dominés par des causes constantes mais dont des causes accidentelles troublent les effets. Les causes accidentelles finissent par se paralyser et il ne reste en définitive que le résultat qui se serait invariablement reproduit chaque fois, si les

causes constantes seules avaient exercé leur action (cf. Quételet 7, 6, 5). Er hat dargethan, dass nicht nur das Mittel in der Variation in der grossen Zahl der Beobachtungen konstant bleibt, sondern auch die vom Mittel abweichenden Werte (die den causes accidentelles entspringen) gesetzmässig auftreten. Und zwar stimmen die eingipfeligen Variationskurven mit den binomialen Wahrscheinlichkeitskurven Newtons und Pascals überein, die man erhält, wenn man in gleichen Abständen auf der Abscissenaxe Strecken als Ordinaten errichtet, die sich wie die aufeinanderfolgenden Koeffizienten höherer Binome [Quételet benutzt vielfach $(a+b)^{18}$ oder $(a+b)^{20}$] zu einander verhalten. Bekanntlich haben diese Kurven des wahrscheinlichen Fehlers eine analytische Darstellung durch Gauss erhalten. Während Quételet, de Vries u. a. die binomiale Darstellung der theoretischen Kurven behufs ihrer Vergleichung mit den empirischen Variationskurven gewählt haben, wendet man neuerdings mit Erfolg zur Ermittelung der Variationsverhältnisse die Gaussschen Formeln an, wie es die Zoologen und Anthropologen schon seit einiger Zeit thun, botanischerseits ich selbst es kürzlich versucht habe (69).

Quételet hat bereits die Giltigkeit des binomialen Gesetzes auch für die Variabilität der Tiere und Pflanzen behauptet und hat gezeigt, wie selbst unorganische Naturerscheinungen (die Abweichungen der Temperaturen vom Mittel) sich nach dem gleichen Gesetz zahlenmässig ordnen.* In glänzender Weise fand er die Giltigkeit des Binomialgesetzes bestätigt bei der Variabilität des Menschen. Nicht nur die Gesamtgrösse des menschlichen Körpers, sondern auch die Grössenverhältnisse der einzelnen Körperteile etc. variieren innerhalb der gleichen Altersklasse eines Landes (mit Bevölkerung der gleichen Abstammung) um einen mittleren Wert so, dass die graphische Darstellung eine binomiale eingipfelige Kurve ergiebt. So zeigten die Messungen des Brustumfanges von 1516 Soldaten die folgenden Frequenzen für die in der oberen Reihe angegebenen Maße in englischen Zollen auf 1000 Zählungen reduziert:

28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
1	3	11	36	67	119	160	204	166	119	68	28	13	4	1

* Dass auch die Verteilung der menschlichen Begabungen dem Gaussschen Gesetze folgt, hat Galton mehrfach nachgewiesen. So hat er z. B. die Abstufung der Prüfungsnoten bei den berühmten Mathematikprüfungen der Universität Cambridge danach verteilt gefunden. — Gauss hat beim Whistspiel gezeigt, dass die Zahl der Asse in der grossen Zahl bei allen Spielern, Hagen, dass die einzelnen Buchstaben des Alphabets in den einzelnen Zeilen eines Buches danach verteilt sind. Zahlreich sind die Bestätigungen des Gesetzes auf dem Gebiet astronomischer und physikalischer Erscheinungen durch Gauss, Bessel u. A.

die entsprechenden Ordinaten der Binomialkurve sind für $(p+q)^{18}$, wo $p = q$:

1 3 11 32 69 121 170 190 169 120 68 31 11 3 1

Quételet hat in der Anthropometrie bis in alle Einzelheiten Maße, Gewichte etc. des „mittleren Menschen" bestimmt. Francis Galton hat dann hauptsächlich auf anthropometrischem Gebiet die Giltigkeit des Quételetschen Gesetzes mannigfach bestätigt und die Kurvenlehre und ihre praktische Verwendung weiter ausgebaut. Seine Werke (10, 12, 19, 20), besonders die „Natural Inheritance" (25) bilden die wichtigste Grundlage der folgenden Untersuchungen auf anthropologischem und zoologischem Gebiet, wie der von Bateson, Weldon, Stieda, Ammon (27—34 etc.). Auch die botanischen Arbeiten über Variabilität von Hugo de Vries, Verschaffelt etc. beruhen zunächst darauf. Durch sie ist das Binomialgesetz für die Variabilität der verschiedensten pflanzlichen Eigenschaften, wie Fruchtlänge, Breite und Länge der Blätter, Zahl der Blütenteile, der Samen (bei Oenothera, Coreopsis, Anethum, Zea, Gingko, Hedera, Papaver, Phaseolus etc.), Gewicht der Knollen (der Kartoffel) bestätigt worden und wurde zugleich meine Voraussetzung bestätigt, dass all diese Merkmale für jede Species konstante Mittelwerte besitzen. Nach F. Galton werden die mit den Wahrscheinlichkeits- oder Binomialkurven übereinstimmenden Variationskurven vielfach als „Galtonkurven" (nach dem Vorgang von de Vries) bezeichnet.

Umfangreiche nun folgende Untersuchungen ergaben, dass ausser den einfachen Variationskurven noch eine Reihe anderer Kurvenformen vorkommen, die dem Forscher über die Variabilität überhaupt, wie über die Grenzen der Species und Rasse Aufschluss geben. In erster Linie sind hier die Kombinations- oder Summationskurven zu nennen. Erstrecken sich die statistischen Erhebungen auf dasselbe Merkmal bei zwei oder mehreren Species zugleich, deren jede für sich eine einfache Binomialkurve ergeben hätte, so kommen zwei- oder mehrgipfelige Kurven zu stande, deren Hauptgipfel die der Einzelspecies sind; vielfach werden dabei noch Scheingipfel (vergl. 40 S. 16 flg.) durch Häufung der gipfelnahen Werte gebildet. Schliesslich können die zwischen den Hauptgipfeln gelegenen Werte derart das Übergewicht gewinnen, dass wieder eine einfache Kurve mit sehr verbreitertem Gipfel (bei einer der Mittelzahlen) zu stande kommt — die sogenannte Livische Kurve. Zweigipfelige Variationskurven haben z. B. Bateson und Brindley (30) zur Entdeckung einer lang- und einer kurzzangigen Rasse des gemeinen Ohrwurmes in England, einer lang- und kurzhörnigen Rasse bei dem javanischen Käfer Xylotrupes Gideon, Giard bei Carcinus moenas zur Entdeckung einer besonderen Rasse geführt, die ihre Existenz einem Parasiten Portunion moenadis verdankt (31, 32). Ammon führten sie zu dem Schluss, dass die

heutige Bevölkerung Badens, und A. Bertillon, dass die im Departement Doubs aus einem Gemisch zweier Völkertypen bestehe (dort einem dolichocephalen germanischen und einem brachycephalen vorgermanischen Typus; hier aus Sequanern und später eingewanderten Burgundern). Zu ähnlichem Schluss führten Zograf Kurven mit zwei Hauptgipfeln und einem Scheingipfel.

Im Pflanzenreich hat de Vries aus zweigipfeligen Kurven bei Chrysanthenum segetum gleichfalls auf zwei Rassen geschlossen, die er dann in der Kultur isolierte [(43) und nach brieflichen Mitteilungen an mich]. Ich habe bei einer ganzen Anzahl von Doldenpflanzen mehrgipfelige Kurven erhalten und dann an verschiedenen Standorten auch die ihren Gipfeln entsprechenden Einzelrassen aufgefunden (40). Die Statistik ist hier berufen, die weitere Verbreitung von polytypischen Arten aufzudecken, wie sie de Bary und Rosen auf anderem Wege bei dem Hungerblümchen (Erophila verna) fanden (vergl. Botanische Zeitung 1889). Wie eine zweigipfelige Kurve zur Auffindung und Unterscheidung leicht zu verwechselnder Spezies führen kann, habe ich für unsere einheimischen Wicken (59 S. 3) und für Senecio nemorensis und S. Fuchsii (48) des Näheren gezeigt.

Diese Kombinationskurven sind daran leicht zu erkennen, dass, während die Abscissen der Gipfel immer die gleichen bleiben, die Ordinaten von Beobachtungsort zu Beobachtungsort sich ändern (je nach dem Vorherrschen der einen oder anderen Species). Dies gilt auch von den nach de Vries für monströse Rassen, z. B. Rassen mit Verbänderung etc. (54, ferner de Vries Erfelijke monstrositeiten in den zuilhandel der botanische tuinen Jaarboek d. Dodonaea, Gent 1897, S. 62—93) charakteristischen dimorphen Kurven, welche aus einer „halben Galtonkurve“ (einem Ast einer Binomialkurve der Atavisten) und einer zweiästigen Kurve der Monströsen besteht. Durch bessere Ernährung wird hier der Gipfel der Atavisten erniedrigt, der der Monströsen erhöht. Gipfellage und Gesamtform bleiben im übrigen dieselben.

Mehrgipfelige („pleomorphe“) Kurven kommen aber, wie wir anfangs sahen, auch bei einheitlichen Arten (wie Chrysanthemum Leucanthemum) vor und sie unterscheiden sich von den Kombinationskurven dadurch, dass Abscissen und Ordinaten der Gipfel immer dieselben bleiben. Sie können sogar bei statistischen Untersuchungen an ein und demselben Individuum (Baum etc.) zu stande kommen, sodass sich uns die Vorstellung aufdrängt, dass hier in ein und demselben Individuum oder einer Art, den verschiedenen Gipfeln entsprechend, verschiedene Arten von Keimplasmen in konstantem Verhältnis vereinigt sind, wie in dem früheren Fall Individuen verschiedener Pflanzenspecies.

Weiter seien hier hervorgehoben Variationskurven, die von den gewöhnlichen Binomialkurven dadurch abweichen, dass sie nahe dem Gipfel einen unverhältnismässig steilen Verlauf haben, die „Hyper-

binomialkurven“ (wie umgekehrt die Livikurven einen zu flachen Gipfel haben). Sie sind im Pflanzenreich sehr häufig und wären nach Verschaffelt (39, 44) darauf zurückzuführen, dass ein ziemlich ansehnlicher Prozentsatz der Individuen an der fluktuierenden Einzelvariation nicht teil nimmt. Sie lassen sich auch als Kombinationskurven zweier Rassen von gleicher Lage des Hauptgipfels aber ungleicher Variabilität auffassen.

Schliesslich mögen hier noch die „Parabinomialkurven“ Erwähnung finden, unsymmetrische Binomialkurven, wo im Binom $(p+q)^n$,

$$p \gtrless q$$

ist, die besonders bei sexuellen Merkmalen oder durch die Sexualität beeinflussten Organen (vergl. z. B. Ammon 57) zum Vorschein kommen (Zahl der Samen in der Hülse bei Indigofera australis etc.) und gleichfalls wichtige Aufschlüsse geben.

Zur genaueren Bestimmung der Variationskurven, bezüglich Variationspolygone, wie überhaupt zur präzisen Feststellung der Variationsverhältnisse ermittelt man am praktischsten die Gausssche Kurve der wahrscheinlichen Abweichungen (Fehlerverteilung) mittelst des Integrals

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\int e^{-\frac{xx}{n}}\,dx$$

und der übrigen Gaussschen Formeln z. B. nach der von Hagen (9) angegebenen Methode (69; vergl. auch Stieda 28, ferner 35). Eine andere Methode zur Bestimmung der Variationspolygone hat Pearson (47 Vol. 186 A etc.) angegeben, über die demnächst Dr. G. Dunker in einer besonderen Arbeit berichten wird.

Die theoretische Variationskurve lässt sich nach den ersten Methoden berechnen und darstellen aus zwei Grössen w und M, wo M das arithmetische Mittel aus den Einzelbeobachtungen, w die wahrscheinliche Abweichung darstellt.

Es ist $w = 0{,}845332\, m$ oder $= 0{,}674486\, q$,

wo m die mittlere Abweichung und q die Wurzel aus dem mittleren Fehlerquadrat bezeichnet. Letztere, die zur Berechnung von w den genauesten Wert liefert, ist gleich der Quadratwurzel aus der durch die Zahl der Beobachtungen geteilten Summe der Quadrate der Abweichungen der Einzelbeobachtungen vom Mittel M,

$$q = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}.$$

Die Grössen w und M geben daher über den ganzen Verlauf der Variation Auskunft, wenn es sich um eine normale eingipfelige Variationskurve handelt, und zwar genügt dann schon eine verhältnismässig geringe Zahl von Beobachtungen. Aus einer solchen lässt sich auch schon ermitteln, ob die Variation die Gausssche Kurve liefert und lässt sich, wenn dies der Fall, der ganze Verlauf

der Variation darstellen, während zur Bestimmung desselben auf empirischem Weg eine grosse Zahl von Beobachtungen nötig wäre. Weiter dient, wenn die Variationskurve keine normale monomorphe Binomialkurve darstellt, die aus w und M abgeleitete Wahrscheinlichkeitskurve als Kriterium, ob die untersuchte Variation eine Hyperbinomialkurve, eine Livische Kurve, Parabinomialkurve, oder eine polymorphe Kurve ergiebt. Alle diese Kurven lassen sich aus den normalen Wahrscheinlichkeitskurven ableiten oder darauf zurückführen. In einzelnen Fällen ist auch eine analytische Reduktion auf die monomorphen Kurven gelungen, so bei den Hyper- und Parabinomialkurven, in anderen Fällen fehlt es aber noch an einer handlichen analytischen Reduktion und hier ist es, wo die Fachmathematiker der Variationsstatistik hilfreiche Hand reichen müssen, so bei den gerade bei pflanzlicher Variation so häufigen polymorphen Kurven, von denen wir ausgingen. Pearson beschäftigte sich bisher nur mit einem kleinen Bruchteil dieses Problems.

Bei den hyperbinomialen Kurven habe ich gezeigt (69, S. 14 flg.), wie sie sich auf die normalen Kurven zurückführen lassen. Werden n_1 in bestimmter Weise variierende Individuen mit n_2 in einem anderen Maße aber um dasselbe Mittel variierenden zusammengezählt, so ist für die erstren

$$q_1^2 = \frac{\Sigma d_1^2}{n_1},$$

für die zweiten

$$q_2^2 = \frac{\Sigma d_2^2}{n_2},$$

und, da $\Sigma d_1^2 + \Sigma d_2^2 = \Sigma d^2$, für die Gesamtkurve

$$q^2 = \frac{\Sigma d^2}{n_1 + n_2} = \frac{q_1^2 n_1 + q_2^2 n_2}{n_1 + n_2},$$

mithin

$$w = \sqrt{\frac{w_1^2 n_1 + w_2^2 n_2}{n_1 + n_2}}.$$

Nehmen, wie dies Verschaffelt voraussetzt, $n_2 = k$ Individuen an der fluktuierenden Einzelvariation nicht teil, so wird

$$\Sigma d_2^2 = 0, \quad w_2 = 0$$

und

$$w_1 = w\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1}},$$

und es lässt sich n_1 und n_2 ermitteln. So ergab die Hyperbinomialkurve von Chrysanthemum segetum (Zahl der Randstrahlen) um Broterode in Thüringen, dass daselbst 58% der Individuen variieren, 42% an der Variation nicht teilnehmen; die theoretische Kurve stimmt unter dieser Voraussetzung mit der Beobachtungskurve überein. Ähnliche Übereinstimmung habe ich bezüglich der theoretischen und empirischen Kurve für Bellis perennis (Variation der Hüllblätter) gefunden. Bezüglich der analytischen Darstellung der unsymmetrischen Parabinomialkurven (44, 57, 59), bei denen die Entfernungen je zweier

beliebigen gleichen Ordinaten von der grössten Ordinate in dem konstanten Verhältnis $p:q$ stehen, vergl. Pearson (47), ferner A. Cournot (4).

Vielfach begnügt man sich bei statistischen Untersuchungen über Variabilität der Lebewesen mit der blossen Ermittelung von M und w (oder q). (14—17 etc.) Die Grösse w (wahrscheinliche Abweichung) heisst auch der Oscillationsindex (Stieda) der Beobachtungsreihe, $\frac{w}{M}$ der Variabilitätskoeffizient (Davenport, Brewster), w stimmt mit dem Galtonschen Quartilwert Q, mithin $\frac{w}{M}$ auch mit Verschaffelts Variationskoeffizienten $\frac{Q}{M}$ überein.

Auch der Ausdruck $\frac{w}{\sqrt{n}}$ (n Zahl der Beobachtungen hat noch eine besondere Bedeutung bei Beurteilung der Sicherheit für die Bestimmung des Mittelwertes. Es giebt nämlich $R = \frac{w}{\sqrt{n}}$ die Schwankung des Medianwertes M d. h. die Grenzen an, zwischen denen sich das Mittel bewegt ($M \pm R$).

Ausser zur Messung der Variabilität selbst und zur Ermittelung der Beziehungen zwischen individueller Variation und spezifischen Unterschieden (vergl. 67), liefern die aus der Wahrscheinlichkeitslehre abgeleiteten Formeln ein wichtiges Mittel zum Nachweis von Korrelationsbeziehungen zwischen verschiedenen Merkmalen. Man findet die Theorie für die Studien dieser korrelativen Variation bei Galton (23). Er hat daselbst einen gemeinschaftlichen arithmetischen Ausdruck für Wirkungsform und -Intensität der zwischen zwei Merkmalen bestehenden Korrelation nachgewiesen. Anwendungen dieser Formeln finden sich z. B. in den Arbeiten von Georg Duncker (68), wo Korrelationserscheinungen bei Fischen und von Davenport und Bullard (56), wo solche beim Schwein nachgewiesen worden sind.

Zum Schluss machen wir nur noch auf eine Reihe anderer mathematischer Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufmerksam, welche von J. D. H. Dickson bearbeitet worden sind (Proc. Roy. Soc. London Nr. 242, 1886, S. 63 flg.) und bei der Behandlung der Erblichkeitsstatistik vorzügliche Dienste geleistet haben. Man sehe ihre Verwendung in dem vorzüglichen Werk von Galton (25), das überhaupt eine wahre Fundgrube interessanter und wichtiger Anwendungen der Mathematik in der Variationsstatistik ist (z. B. S. 69 flg., 83—138, 221—224).

Das folgende Litteraturverzeichnis soll uns mit den wichtigsten bisherigen Abhandlungen über Variationsstatistik bekannt machen (die für den Mathematiker unentbehrlichsten sind gesperrt gedruckt).

Litteraturverzeichnis.

1. Gauss, Karl Friedr., Theoria motus corporum coelestium, Hamburg 1809.
2. Gauss, K. F., Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Göttingen 1823.
3. Poisson, Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile. Paris 1837 chap. 3 et 4 (lois des grands nombres).
4. Cournot, A., Exposition de la théorie des chances et des probabilités. Paris, Hachette 1843.
5. Quételet, Ad., Sur l'appréciation des moyennes, Bull. de la commission centr. statist. t. II, p. 205—273, 1845.
6. Quételet, Ad., Lettres sur la théorie des probabilitéts appliquée aux sciences morales et politiques, Brüxelles 1846.
7. Quételet, Ad., Du système social et des lois qui les régissent. Paris 1848.
8. Wagner, Adolph, Die Gesetzmässigkeiten in den scheinbar willkürlichen menschlichen Handlungen vom Standpunkte der Statistik. Hamburg 1864.
9. Hagen, G., Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1867.
10. Galton, F., Hereditary Genius, London 1869.
11. Quételet, Ad., Anthropométrie ou mesure des différentes facultés de l'homme, Brüssel, Gent und Leipzig 1871.
12. Galton, F., English Men of Science their nature and nurture, London 1874.
13. Mayr, G., Die Gesetzmässigkeit im Gesellschaftsleben, München 1877, S. 56.
14. Lewis, W., Über die Theorie der Stabilität statistischer Reihen. Hildebrandts Jahrbücher für Nationalökonomie, Bd 32 S. 60—97, Jena 1879;
    Witt, Hugo, Die Schädelform der Esten. Dorpat 1879. 54 S.
15. von Schrenck, A., Studien über Schwangerschaft, Geburt und Wochenbett bei der Estin nebst Untersuchungen über das Becken derselben, Dorpat 1880, 375 S.
16. Strauch, Max, Anatomische Untersuchungen über das Brustbein, Dorpat 1881, 50 S.
7. Henicke, Fr., Die Varietäten des Herings. Mitt. d. Komm. z. wiss. Unters. der deutschen Meere. I. Jahrg.: IV—VI, 1878, S. 37—132; II. Jahrg.: VII—XI, 1882, S. 1—86.
18. Livi, Th., Sulla statura degli Italiani, Firenze 1883.
19. Galton, F., Inquiries into Human Faculty and its Development 1883.
20. Galton, F., Record of Family Faculties, 1884.
21. Ludwig, F., Die Anzahl der Strahlenblüten bei Chrysanthemum Leucanthemum. D. Bot. Monatsschr. 1887, Nr. 3.
22. Ludwig, F., Einige wichtige Abschnitte der mathematischen Botanik. Hoffmanns Zeitschr. f. math. naturw. Unterr. 1883, XIV S. 161 flg., 241 flg., 321 flg.; 1887 XIX S. 321 flg.; 1890 S. 243 flg.
23. Galton, F., Correlations and their measurement. Proceedings Roy. Soc. Lond. Vol. 45 1888, p. 135—145.
24. Ludwig, F., Über Zahlen und Maße im Pflanzenreiche. Wiss. Rundschau der Münchener Neuesten Nachrichten 1889 Nr. 84.

25. Galton, F., Natural Inheritance, London 1889.
26. Ludwig, F., Die konstanten Strahlenkurven der Kompositen und ihre Maxima. Verh. d. Naturf. Ges. zu Danzig 1890, S. 177 flg., Taf. VI.
27. Weldon, W. F. R., The Variation occurring in certain Decapod Crustacea I Crangon vulgaris. Proceed Roy. Soc. Lond. Vol. 47 1890, p. 445—453.
28. Stieda, Ludw., Über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der anthropologischen Statistik. Braunschweig, 1. Auflage 1882, 2. Auflage 1892, 25 S. u. 4 Fig.
29. Bateson, W., On numerical Variation in Teeth with a discussion of the Conception of Homology. Proceed. of the Zool. Soc. Lond. 1892, p. 102 bis 115.
30. Bateson, W., and H. H. Brindley, On some cases of Variation in Secondary Sexual Characters statistically examined. Proceed. of the Zool. Soc. of Lond. 1892, p. 585—594.
31. Weldon, W. F. R., Certain correlated Variations in Crangon vulgaris. Proceed. Roy. Soc. Vol. 51 1892, p. 2—21.
32. Weldon, W. F. R., On Certain correlated Variations in Carcinus maenas. Proceed. Roy. Soc. Vol. 54 1893, p. 318—329.
33. Ammon, O., Die natürliche Auslese beim Menschen. Jena 1893.
34. Petersen, G. C. J., On some Zoological Characters applicable by the Determination of young (post larval) Flat fishes Rep. of the Danish Biol. Station IV 1893.
35. A Meeriman, M., Textbook on the method of least Squares. New-York 1894.
36. Thompson, H., On Correlation of certain external Parts of Palaemon serratus. Proc. Roy. Soc. Lond. Vol. 55, 1894, p. 221—243.
37. Bateson, W., Materials for the Study of Variation treated with especial Regard to Discontinuity in the Origin of Species London 1894, 598 S., 209 Fig. (Das reichhaltigste Material über Variation bei den Tieren aus allen Tierkreisen.)
38. de Vries, Hugo, Über halbe Galtonkurven als Zeichen diskontinuierlicher Variation. Ber. d. D. Bot. Gesellsch. Bd. XII 1894, S. 197—207 mit 1 Taf. Archiv Néerl. T. 28 livr. 5; Kruidk. Jaarboek Dodonaea Bd. VII, S. 74.
39. Verschaffelt, Ed., Über graduelle Variabilität von pflanzlichen Eigenschaften. Ber. D. B. Ges. XII 1894, S. 350—355.
40. Ludwig, F., Über Variationskurven und Variationsflächen der Pflanzen. 31 S. und 2 Tafeln. Bot. Centralbl. LXIV 1895, Nr. 1—7: 1. Variationskurven der Kompositen; 2. Über das Quételetsche Gesetz der einfachen Variationskurven; 3 Summationskurven der Umbelliferen; 4. Zur Geschichte der polymorphen Kurven; 5. Darstellung des gesamten Variationskomplexes; 6. Gesetz der Entwickelung nach den Zahlen des Fibonacci. Variationskurve des Crataegus-androeceum.
41. Eigenmann, C., Leuciscus balteatus Rich. A. Study in Variation. American Naturalist 1895 Jan., p. 10—25.
42. Duncker, Georg, Variation und Verwandtschaft von Pleuronectes flesus L. und Pl. plattessa. Wissenschaftl. Meeresuntersuchungen, herausgegeben von der Kommission zur wiss. Unters. d. dtsch. Meere zu Kiel und der Biol. Anstalt auf Helgoland, N. F. 1. Bd. 2. H., S. 47—103. 1895.
43. de Vries, Hugo, Eine zweigipflige Variationskurve. Archiv für Entwickelungsmechanik der Organismen 1898, Bd. 2, H. 1, S. 55.
44. Verschaffelt, Ed., Über asymmetrische Variationskurven. Ber. d. D.B. Ges. XIII 1895, H. 8, S. 348—356 mit 1 Taf.

45. Burkill, J. H., One some Variations in the Number of Stamens and Carpels. Journ. Linn. Soc. Botany Vol. XXXI 1895, S. 216—245.

46. Bateson, W., On the Colour-Variations of a Beele of the Family Chrysomelidae statisticaly examined Proceed. of the Zool. Soc. of London 1895, p. 850—861, 1 kol. Taf.

47. Pearson, K., Proceed. Roy. Soc. Lond. Vol. 57, 1895, p. 257, Math. Contributions to the Theory of Evolution etc. Philosophical Transact. Roy. Soc. London 1895 Vol. 185 A, 1896 Vol. 186 A, 1896 V. 187 A.

48. Ludwig, F., Weiteres über Fibonaccikurven. 1. Die numerische Variation der gesamten Blüten der Kompositenköpfe. 2. Joh. Kepler über das Vorkommen der Fibonaccireihe im Pflanzenreich. B. C. Bd. LXVIII, 1896, Nr. 1 mit einer Tafel.

49. Ludwig, F., Eine fünfgipfelige Variationskurve. Ber. d. D. Bot. Ges. XIV, 1896, S. 208 flg. mit einer Figur.

50. Amann, J., Application du Calcul des Probabilités à l'étude de la Variation d'un type végétal. Bull. herb. Boissier T. IV Genève et Bâle, 1896, S. 577—590.

51. Went, F. H. F. C. en Prinsen Geerligs, H. C., Zaaiproeven. Archief voor de Java-Suikerindustrie in West-Java. Te Kagok-Tegal. 1896. 4. Aufl.

52. Warren, E., Variation in Portunas depurator. Proceed. London, Vol. 60, 1896, S. 221—243.

53. Stead, J. B., Variation and Relationship of the Flounder an the Plaice Journ. Marin. Biol. Assoc. Vol. 3, 1896, p. 293—299.

54. de Vries, Hugo, Sur les courbes galtoniennes des monstruosités. Bull. Scientif. de la France et de la Belgique publié par Alfred Giard, T. XXVII, 1896, p. 396—418 mit fünf Figuren.

55. Burkill, J. H., Teratological Observations on Parnassia palustris, Journ. of Bot. January 1896, 4 S.

56. Davenport, C. B. and Bullard, C. A., Contribution to the quantitative Study of Correlated Variation and the Comparative, Variability of the sexes. Proceed. of the American Academy of Arts and Sciences Vol. XXXII, Nr. 4, Dec. 1896, S 87—97.

57. Ammon, Otto, Der Abänderungsspielraum, Ein Beitrag zur Theorie der natürlichen Auslese. Berlin, F. Dümmler, 1896, 55 S.

58. Haacke, Wilh., Über numerische Variation typischer Organe und korrelative Mosaikarbeit. Biol. Centralbl., Bd. XVI, 1896, S. 482—547.

59. Ludwig, F., Beiträge zur Phytarithmetik, 8 S. und 5 Fig., Bot. Centralbl., Bd. LXXI, 1897: 1. Einige weitere Untersuchungen zur Ermittelung der Zahlenverhältnisse der Pflanzen und ihrer Variationsweite; 2. Variationskurve und Species; 3. Die Multipla der Fibonaccizahlen in den Kurven der numerischen Variation der Blütenstände etc.; 4. Eine neue Darstellung der Näherungswerte der Kettenbrüche und die Verwandtschaften der phyllotaktischen Hauptreihe.

60. Ludwig, F., Das Gesetz der Variabilität der Zahl der Zungenblüten von Chrysanthemum Leucanthemum. Mitt. d. Thür. Bot. Ver. Neue Folge, H. X, 1897, S. 20—23.

61. Ludwig, F., Nachträgliche Bemerkungen über die Multipla der Fibonaccizahlen und die Koexistenz kleiner Bewegungen bei der Variation der Pflanzen. Bot. Centralbl. LXXI 1897, Nr. 35.

62. Ludwig, F., Variationskurven von Lotus, Trifolium Medicago. D. Bot. Monatsschr., H. 11, 1897, S. 294—296, mit 4 Fig.

63. Ludwig, F., Die Statistik, eine notwendige Hilfswissenschaft der Systematik. D. B. Monatsschr., H. 9, 1897, S. 241 flg.

64. Weisse, Arthur, Die Zahl der Randblüten an Kompositenköpfchen in ihrer Beziehung zur Blattstellung und Ernährung. Jahrb. f. wiss. Bot., Bd. XXX, H. 4, mit 1 Taf. Berlin 1897, S. 453 bis 488.

65. Saunders, E. R., On a Discontinous Variation occurring in Biscutella laevigata. Proceed. Roy. Soc. Lond. Vol. 62, 1897, S. 11—26.

66. Bateson, W., On Progress in the Study of Variation. Science Progress, Vol. VII (Vol. II of new Ser.) No. 6, I, 1897; II, 1898, 16 S.

67. Brewster, Edw. Tenny, A measure of Variability and the Relation of individual Variations to specific Differences. Proceed. of the Americ. Acad. of Arts and Sciences, Vol. XXXII, Nr. 15, 1897, p. 269—280.

68. Duncker, Georg, Korrelationsstudien an den Strahlenzahlen einiger Flossen von Acerina cernua L. Biol. Centralbl. XVII Nr. 21 u. 22. Nov. 1897.

69. Ludwig, F., Die pflanzlichen Variationskurven und die Gausssche Wahrscheinlichkeitskurve, Bot. Centralbl. LXXIII, 1898, 27 S. und zwei Tafeln: 1. Normale Binomialkurven; 2. Hyperbinomalkurven; 3. Parabinomialkurven; 4. Pleomorphe Kurven.

70. Ludwig, F., „Variationskurven" in Gad, Reallexikon der med. Propädentik Bd. 3, 1898.

71. Matzdorf, C., „Variationskurven" in Justs Bot. Jahresber. XXIII (1895) 2. Abt. S. 257—258 flg.; XXIV (1896) 2. Abt. (1898 erschienen) S. 2—3.

Greiz, am 16. April 1898.

Die Bewegung eines starren Körpers.

(Eine Übung in der Ausdehnungslehre.)

Von

J. Lüroth

in Freiburg i. Br.

§ 1.

Ich benutze in der folgenden Arbeit die Punktrechnung, wie sie von Grassmann besonders in der Ausdehnungslehre von 1862 (Grassmanns Werke ersten Bandes zweiter Teil) gelehrt worden ist.* Von der regressiven Multiplikation mache ich jedoch keinen Gebrauch, weil ich vom pädagogischen Standpunkt aus ihre Einführung für nicht vorteilhaft halte. Ob man ohne diese Produktbildung auskommt, muss die Erfahrung lehren. In der Mechanik ist dies bekanntlich der Fall; bei kinematischen Betrachtungen, wie in der vorliegenden Abhandlung, empfiehlt sich die Benutzung eines speziellen regressiven Produkts, das man aber auch ganz unabhängig einführen kann, wie es Peano in in der unten zuletzt genannten Arbeit gethan hat.

Die Ergänzung eines Vektors oder des Produkts von zwei Vektoren, eines Bivektors, die durch einen Strich | bezeichnet wird, kann man so wenig entbehren, wie die Senkrechte in der Geometrie. (Dagegen braucht man die Ergänzung eines Produkts von Punkten nicht.) Ich verstehe dabei unter der Ergänzung des Vektors a, bezeichnet mit $|a$, den Bivektor bc, dessen Faktoren auf a senkrecht, und so beschaffen sind, dass die Maßzahl der Fläche des aus b und c gebildeten Parallelogrammes gleich der Maßzahl der Länge von a ist. Dabei soll der Sinn so sein, dass von a aus gesehen, eine Drehung rechts herum durch einen Winkel $< 180^0$ den Vektor b in die Richtung von c bringt.

---

* Kurze Darstellungen nach origineller Methode finden sich in Peano: Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann. Torino 1888. Deutsch unter dem Titel: Die Grundzüge des geometrischen Kalküls. Deutsche Ausgabe von Schepp. Leipzig 1891. Carvallo: La méthode de Grassmann. Nouv. Annales 3me Série, Bd. 11 (1892) Seite 8. Peano: Saggio di calcolo geometrico. Accad. d. Scienze di Torino 1895/96.

Unter der Ergänzung des Bivektors de, bezeichnet durch $|de$, sei der Vektor f verstanden, für den $|f = de$ ist. Dann gilt für die Ergänzungen das Distributionsgesetz, es ist $a|b = b|a$, $(|ab)|c = abc$ also gleich einer Zahl, nämlich dem Inhalt des von den drei Vektoren abc gebildeten Parallelepipeds, und

$$|(c|ab) = (c|b)a - (a|c)b,$$
$$(ab)|cd = (a|c)(b|d) - (a|d)(b|c) = cd|ab,$$

welche beiden Formeln mit den Nrn. 180 und 176 der zweiten Ausdehnungslehre im Wesen übereinstimmen (Grassmanns Werke 1. Bd. 2. Teil Seite 136).

Die von Peano eingeführte Operation ω bezieht sich auf Formen zweiten und dritten Grades. Eine Form F zweiten Grades kann man stets schreiben

$$F = Pa + bc,$$

wo P ein beliebiger Punkt, a, b, c Vektoren sind. Dabei ist der Vektor a von der Wahl von P nicht abhängig (Grassmann, a. a. O. Nr. 347 Seite 222). Dieser Vektor sei mit ωF bezeichnet. Ist $a = 0$, also F einem Bivektor gleich, so ist $\omega F = 0$ zu setzen.

Eine Form F dritten Grades lässt sich entweder als ein Produkt von drei Vektoren $F = abc$, oder als das Produkt eines Punktes in einen Bivektor $F = Pab$ darstellen (Carvallo Seite 26 Nr. 21). Im ersten Fall werde unter ωF Null, im zweiten Falle, wo der Bivektor ab von der Wahl des Punktes P nicht abhängt, unter ωF eben dieser Bivektor verstanden.

Die Operation ω ist in beiden Fällen distributiv.

Um Klammern zu sparen, habe ich mit Carvallo und Peano die Klammern um ein Produkt von Punkten weggelassen, die Grassmann angewendet hatte, um dieses Produkt von anderen zu unterscheiden. Die Wirkung von $|$ und ω soll sich stets bis zum nächsten Operationszeichen erstrecken, sodass also z. B. $\omega(ab)$ kurz ωab, $\omega \mathfrak{A}(b-c)$ für $\omega[\mathfrak{A}(b-c)]$, $|(a-b)(c-d)$ für $|[(a-b)(c-d)]$ geschrieben ist, wenn kein Missverständnis eintreten kann.

§ 2.

Seien AB, A_1B_1 zwei Paare von Punkten von solcher Lage, dass die Entfernung $\overline{AB}$ der $\overline{A_1B_1}$ gleich ist. Dies drückt sich durch die Gleichung

$$(A_1 - B_1)^2 = (A - B)^2$$

aus, oder durch die

$$(B_1 - A_1 - B + A)|(B_1 - A_1 + B - A) = 0.$$

Bezeichnet man die Mitten der Linien AA_1 und BB_1, also die Punkte $\frac{A+A_1}{2}$, $\frac{B+B_1}{2}$ mit $\mathfrak{A}$ bezw. $\mathfrak{B}$, so schreibt sich diese Gleichung:

$$1) \qquad [B_1 - B - (A_1 - A)]|(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) = 0.$$

Wir nehmen zuerst an, es sei $\mathfrak{B} - \mathfrak{A}$ nicht $= 0$. Dann kann man diese Gleichung ersetzen durch:

2) $$B_1 - B - (A_1 - A) = |(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})a,$$

wo a ein Vektor ist, der nicht vollständig bestimmt ist. Es wäre angenehm, wenn man in dieser Gleichung die Buchstaben A und B sozusagen trennen könnte. Dies geht aber nicht unmittelbar, weil man rechts $|(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})a$ nicht in $|\mathfrak{B}a - |\mathfrak{A}a$ zerlegen darf, da — wenigstens für uns hier — eine Form wie $|\mathfrak{A}a$ keinen Sinn hat. Mit Benutzung eines willkürlichen Punktes P aber kann man

$$(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})a = \omega P(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})a = \omega(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})Pa$$
$$= \omega\mathfrak{B}Pa - \omega\mathfrak{A}Pa$$

schreiben und die vorletzte Gleichung dann in

$$B_1 - B - |\omega\mathfrak{B}Pa = A_1 - A - |\omega\mathfrak{A}Pa$$

zerlegen, in der die Buchstaben getrennt sind. Setzt man den Vektor, der beiden Seiten gleich ist, $= b$, so hat man also:

$$A_1 - A = |\omega\mathfrak{A}Pa + b = |(\omega\mathfrak{A}Pa + |b),$$
$$B_1 - B = |\omega\mathfrak{B}Pa + b = |(\omega\mathfrak{B}Pa + |b),$$

oder, da $\omega(\mathfrak{A}|b) = \omega(\mathfrak{B}|b) = |b$, wenn man

$$Pa + |b = \Gamma$$

setzt,

3) $$\begin{cases} A_1 - A = |\omega\mathfrak{A}\Gamma, \\ B_1 - B = |\omega\mathfrak{B}\Gamma. \end{cases}$$

Diese Formeln gelten auch dann noch, wenn $A_1 - A = B_1 - B$ ist. Dann wird nämlich:

$$a = 0, \quad \Gamma = |b, \quad |\omega\mathfrak{A}\Gamma = |\omega\mathfrak{B}\Gamma = b,$$

also $A_1 - A = B_1 - B = b$, wie es sein muss.

§ 3.

Um die geometrische Bedeutung dieser Formeln zu erkennen, wollen wir zuerst annehmen, ein Punkt P stehe mit einem andern P_1 in der Beziehung:

4) $$P_1 - P = \frac{1}{2}|\omega PQR,$$

wo Q, R gegebene Punkte sind. Schreibt man

$$PQR = P(Q - P)(R - P),$$

so sieht man, dass $\omega PQR = (Q - P)(R - P)$ ist, also gleich einem Bivektor, dessen Faktoren in der Ebene PQR liegen, und dass demnach $|\omega PQR$ ein Vektor ist, der auf der Ebene PQR senkrecht steht. Die Länge dieses Vektors ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogrammes, dessen Seiten PQ und PR sind oder gleich dem doppelten Inhalt des Dreiecks PQR. Was seine Richtung angeht, so ist von

ihm aus gesehen $R - P$ rechts von $Q - P$ gelegen, d. h. wenn man sich in P auf die Ebene PQR senkrecht stellt, sodass man, um von der Richtung PQ in die Richtung PR zu sehen, eine Drehung rechtsherum durch einen Winkel $< 180^0$ machen muss, so geht die Richtung des Vektors von den Füssen nach dem Kopfe. Statt dessen kann man auch sagen, wenn man in QR steht, mit den Füssen in R, dem Kopfe in Q und nach P sieht, so geht die Richtung des Vektors nach links hin.

Fällt man PS senkrecht auf QR, so ist die Grösse von PP_1 gleich $\frac{1}{2}\overline{PS}\cdot\overline{QR}$. Bestimmt man daher einen spitzen Winkel φ aus der Gleichung $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \overline{QR}$, so kann man sagen, die Ebene P_1QR bildet mit der PQR den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ und zwar von QR aus gesehen mit einer Drehung nach links hin.

Nehmen wir zweitens an, die beiden Punkte PP_1 ständen unter sich und mit ihrem Mittelpunkte $\mathfrak{P}$ in dem durch die Gleichung

$$5)\qquad P_1 - P = |\,\omega\mathfrak{P}QR$$

gegebenen Zusammenhang. Da $\mathfrak{P} = \frac{P+P_1}{2}$, so wird

$$P_1 - P = 2(P_1 - \mathfrak{P}) = 2(\mathfrak{P} - P),$$

so dass

$$P_1 - \mathfrak{P} = \quad \frac{1}{2}|\,\omega\mathfrak{P}QR,$$

$$P - \mathfrak{P} = -\frac{1}{2}|\,\omega\mathfrak{P}QR$$

wird.

Es liegen also $P\mathfrak{P}P_1$ in einer geraden, in $\mathfrak{P}$ auf der Ebene $\mathfrak{P}QR$ senkrecht stehenden Linie, die Ebene P_1QR macht mit der Ebene $\mathfrak{P}QR$ nach links, die PQR nach rechts hin den Winkel $\frac{\varphi}{2}$. Von irgend einem Punkte T auf QR haben dabei P und P_1 denselben Abstand. Denn man kann $QR = UT$ setzen, wenn man den Punkt U auf QR passend bestimmt, und dann die Gleichung 5):

$$P_1 - T + T - P = |\,\omega\mathfrak{P}UT$$

schreiben. Aus ihr folgt:

$$(P_1 - T)\,|\,(P_1 - T) + (P_1 - T)\,|\,(T - P) = (P_1 - T)\omega\mathfrak{P}UT$$
$$(T - P)\,|\,(P_1 - T) + (T - P)\,|\,(T - P) = (T - P)\omega\mathfrak{P}UT$$

und durch Subtraktion:

$$\begin{aligned}(P_1 - T)^2 - (P - T)^2 &= (P_1 + P - 2T)\,\omega\mathfrak{P}UT\\ &= 2(\mathfrak{P} - T)\,\omega\mathfrak{P}UT.\end{aligned}$$

Es ist aber $\omega\mathfrak{P}UT = (U - \mathfrak{P})(T - \mathfrak{P})$ und folglich die rechte Seite gleich Null, also $\overline{P_1T} = \overline{PT}$.

Es geht daher P_1 aus P hervor durch eine Drehung um die Axe QR durch den Winkel φ und zwar durch eine Drehung, die von

QR aus gesehen nach links hin erfolgt. Die Grösse und der Sinn der Drehung, und die Axe, sind durch den Linienteil QR vollständig bestimmt.

§ 4.

Man kann die Form zweiten Grades Γ durch Änderung des Punktes P abändern. Denn man kann

$$\Gamma = Qa + (P - Q)a + |b$$

schreiben. Hier ist $(P - Q)a + |b$ ein Bivektor, den man $= |b'$ setzen kann. Man erhält für Γ eine ausgezeichnete Form, wenn b' mit a parallel, also:

$$(P - Q)a + |b = \lambda | a \tag{6}$$

wird, unter λ eine Zahl verstanden.*

Die Multiplikation mit a liefert $a|b = \lambda a | a$, und dann

$$(P - Q)a = \frac{(a|b)|a - (a|a)|b}{a|a} = \frac{1}{a|a} a(|ab),$$

$$\left(P - Q + \frac{|ba}{a|a}\right)a = 0.$$

Der erste Faktor links muss also ein mit a paralleler Vektor sein, den man $= \mu a$ setzen kann, wenn man unter μ eine Zahl versteht. Somit ergiebt sich

$$Q = P + \frac{|ba}{a|a} - \mu a.$$

Durch Einsetzen in Gleichung 6) sieht man, dass μ ganz beliebig bleibt, dass also Q auf einer bestimmten mit a parallelen Linie willkürlich gewählt werden kann. Man hat endlich

$$\Gamma = Qa + \frac{a|b}{a|a} \cdot |a$$

als die Normalform von Γ. Die Formel 3) ergiebt dann

$$A_1 - A = |\omega \mathfrak{A} Qa + \lambda a.$$

Ist nun ϱ eine beliebige Zahl und setzt man

$$A_1 - (\lambda - \varrho)a = A'_1,$$
$$A + \varrho a \qquad = A',$$

so sind A' und A'_1 zwei Punkte, von denen der erste aus A durch eine Verschiebung ϱa parallel a hervorgeht, während man den zweiten um $(\lambda - \varrho)a$ verschieben muss, um A_1 zu erhalten. Damit wird:

$$\mathfrak{A} = \frac{A' + A'_1}{2} + \frac{1}{2}(\lambda - 2\varrho)a,$$

$$\mathfrak{A} Qa = \frac{A' + A'_1}{2} Qa,$$

$$A'_1 - A' = |\omega \frac{A' + A'_1}{2} Qa.$$

---

* Die folgende Reduktion ist mit der Aufsuchung der Centralaxe eines Systems von Kräften identisch, das auch durch eine Form zweiten Grades dargestellt werden kann.

Die letzte Formel zeigt, dass A'_1 aus A' durch eine Drehung um die durch Q gehende mit a parallele Axe, die mit (Q, a) bezeichnet sei, hervorgeht. A_1 entsteht somit aus A durch Verschiebung parallel a und eine Drehung um eine zu a parallele Axe.

Die Form zweiten Grades Γ stellt daher eine Schraubenbewegung dar oder sie repräsentiert einen W i n d e r (wrench).*

Wäre nun Γ' ein zweiter Winder, der ebenfalls, wie Γ, die Punkte AB in A_1B_1 überführte, so müsste

$$7)\qquad \omega\mathfrak{A}\Gamma = \omega\mathfrak{A}\Gamma', \quad \omega\mathfrak{B}\Gamma = \omega\mathfrak{B}\Gamma'$$

sein. Ist aber für eine Form zweiten Grades T

$$\omega\mathfrak{A}T = 0,$$

so sei

$$T = \mathfrak{A}d + ef,$$

wo def Vektoren. Dann verlangt die Gleichung, dass

$$\omega\mathfrak{A}ef = ef = 0,$$

also $T = \mathfrak{A}d$ sei, oder, wenn man den Punkt $\mathfrak{A} + d = R$ setzt, dass $T = \mathfrak{A}R$ sei.

Die Gleichungen 7) sind also erfüllt, wenn

$$\Gamma' - \Gamma = \mathfrak{A}R = \mathfrak{B}S.$$

Diese Beziehung zwischen vier Punkten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}RS$ sagt aber aus, dass sie auf einer geraden Linie liegen, und dass die beiden Vektoren $R - \mathfrak{A}$ und $S - \mathfrak{B}$ gleich sind. Setzt man also

$$R = \mathfrak{A} + \varrho(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}),$$

$$S = \mathfrak{A} + \sigma(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}),$$

so folgt $\varrho = \sigma - 1$,

$$\Gamma' - \Gamma = \varrho\mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

wo ϱ eine beliebige Zahl ist. Jeder Winder von der Form

$$\Gamma + \varrho\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

führt also AB in A_1B_1 über, so dass es ein ganzes Büschel von Windern giebt, die dieses leisten.

§ 5.

Soll unter diesen Windern einer sein, der eine reine Drehung ist, so muss man ϱ so bestimmen können, dass $\Gamma' = \Gamma + \varrho\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gleich einem Linienteil ist.**

Dann ist aber $\Gamma'\Gamma' = 0 = \Gamma\Gamma + 2\varrho(\Gamma\mathfrak{A}\mathfrak{B})$:

$$\varrho = -\frac{\Gamma\Gamma}{2(\Gamma\mathfrak{A}\mathfrak{B})}.$$

Gesetzt ϱ sei so bestimmt. Wenn man dann, mit Hilfe eines Punktes P, Γ' in die Form bringt:

---

* G r a s s m a n n a. a. O. S. 223. Anmerkung.

** Ebenda Nr. 286.

$$\Gamma' = Pa' + |b,$$

wo a' und b Vektoren sind, so folgt aus

$$0 = \Gamma'\Gamma' = 2P(a'|b),$$

dass, wenn $a' \neq 0$, b senkrecht zu a' ist. Dann kann man also

$$b = |a'c$$

setzen, wo c wieder ein Vektor, und es wird

$$\Gamma' = Pa' + a'c = (P - c)a',$$

oder mit $P - c = Q$, $a' = R - Q$, wo Q und R Punkte sind, $\Gamma' = QR$ also in der That ein Linienteil. Ist aber $a' = 0$, so wird $\Gamma' = |b$ und stellt eine reine Verschiebung dar. Es giebt also eine Drehung, die AB in A_1B_1 überführt, wenn $a' = \omega\Gamma' \neq 0$ ist. Es wird aber

$$\omega\Gamma' = \omega\Gamma + \varrho\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \omega\Gamma + \varrho(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}),$$

daher, wenn $\omega\Gamma' = 0$ wäre,

$$\omega\Gamma = \varrho(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$$

wäre. Die Normalform von Γ ist aber

$$\Gamma = Q\omega\Gamma + \lambda|\omega\Gamma,$$

also hier $= Q\varrho(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) + \varrho\lambda|(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$, und mit ihr ergiebt sich

$$\mathfrak{A}\Gamma = -\varrho Q\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \varrho\lambda\mathfrak{A}|(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}),$$
$$\mathfrak{B}\Gamma = -\varrho Q\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \varrho\lambda\mathfrak{B}|(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}),$$
$$\omega\mathfrak{A}\Gamma = -\varrho\omega Q\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \varrho\lambda|(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}),$$
$$\omega\mathfrak{B}\Gamma = -\varrho\omega Q\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \varrho\lambda|(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}),$$

sodass $A_1 - A = B_1 - B$ ist, also nur eine Verschiebung nötig wird.

§ 6.

Die Ableitung der Formel 2) aus der 1) ist nur dann berechtigt, wenn $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ nicht gleich Null ist. Fallen aber die beiden Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zusammen, so bestimme man einen Einheitsvektor a, sodass

$$(A_1 - A)|a = (B_1 - B)|a$$

ist. Ist ϱ der gemeinsame Wert und setzt man

$$A_1 - A = \varrho a + a_1, \quad B_1 - B = \varrho a + b_1,$$

so folgt $a|a_1 = a|b_1 = 0$. Definiert man daher die Punkte A' und B' durch die Gleichungen

$$A' = A + \varrho a, \quad B' = B + \varrho a,$$

so wird $A_1 - A' = a_1$, $B_1 - B' = b_1$ und diese Vektoren sind zu a senkrecht, wenn sie nicht Null sind. Ferner ist

$$A_1 + A' = 2\mathfrak{A} + \varrho a, \quad B_1 + B' = 2\mathfrak{A} + \varrho a.$$

Die Linien A_1A' und B_1B' werden also von der Linie $(\mathfrak{A}, a)$ in ihren Mitten senkrecht getroffen, wenn sie nicht verschwinden. Man kann

folglich AB in A_1B_1 überführen durch eine Schiebung um ϱa allein oder in Verbindung mit einer Drehung durch 180° um die Axe $(\mathfrak{A}, a)$.

§ 7.

Indem wir nun zur Betrachtung von drei Punkten gehen, seien ABC und $A_1B_1C_1$ zwei kongruente Dreiecke. Die Mittelpunkte

$$\tfrac{1}{2}(A+A_1),\quad \tfrac{1}{2}(B+B_1),\quad \tfrac{1}{2}(C+C_1)$$

der drei Linien AA_1, BB_1, CC_1 seien mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichnet; und es werde zuerst angenommen, dass diese drei Punkte nicht in gerader Linie liegen, also auch nicht zwei von ihnen zusammenfallen. Man kann dann die Betrachtungen des § 2 auf die drei Paare von Punkten, AB, BC, CA anwenden und also drei Formen zweiten Grades $\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma$ finden, sodass

$$8)\quad \begin{cases} A_1 - A = |\,\omega\mathfrak{A}\Gamma, & B_1 - B = |\,\omega\mathfrak{B}\mathsf{A}, \quad C_1 - C = |\,\omega\mathfrak{C}\mathsf{B}, \\ B_1 - B = |\,\omega\mathfrak{B}\Gamma, & C_1 - C = |\,\omega\mathfrak{C}\mathsf{A}, \quad A_1 - A = |\,\omega\mathfrak{A}\mathsf{B} \end{cases}$$

ist. Dann muss auch

$$\omega\mathfrak{A}(\Gamma - \mathsf{B}) = 0, \quad \omega\mathfrak{B}(\mathsf{A} - \Gamma) = 0, \quad \omega\mathfrak{C}(\mathsf{B} - \mathsf{A}) = 0$$

sein, also müssen nach dem § 4 drei Punkte PQR existieren, die

$$9)\qquad \Gamma - \mathsf{B} = \mathfrak{A}P, \quad \mathsf{A} - \Gamma = \mathfrak{B}Q, \quad \mathsf{B} - \mathsf{A} = \mathfrak{C}R,$$

ergeben und die somit die Gleichung

$$10)\qquad \mathfrak{A}P + \mathfrak{B}Q + \mathfrak{C}R = 0$$

erfüllen müssen. Multipliziert man mit $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, so folgt

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}P = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}Q = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}R = 0$$

und daher liegen, weil $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ nicht in einer Geraden liegen sollen, PQ und R in der Ebene $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$. Man kann somit

$$P = \alpha\mathfrak{A} + \beta''\mathfrak{B} + \gamma\mathfrak{C}$$

setzen, wo $\alpha\beta''\gamma$ Zahlen sind, die die Bedingung $\alpha + \beta'' + \gamma = 1$ erfüllen, und erhält

$$\mathfrak{A}P = \beta''\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \gamma\mathfrak{C}\mathfrak{A}.$$

Ähnlich giebt es Zahlen $\beta\beta'\gamma'\gamma''$, für die folgt:

$$\mathfrak{B}Q = \beta\mathfrak{B}\mathfrak{C} - \gamma'\mathfrak{A}\mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{C}R = \beta'\mathfrak{C}\mathfrak{A} - \gamma''\mathfrak{B}\mathfrak{C}.$$

Die Gleichung 10) verlangt dann

$$(\beta'' - \gamma')\mathfrak{A}\mathfrak{B} + (\beta - \gamma'')\mathfrak{B}\mathfrak{C} + (\beta' - \gamma)\mathfrak{C}\mathfrak{A} = 0$$

und aus dieser Gleichung folgen durch Multiplikation mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die drei

$$\beta'' - \gamma' = 0, \quad \beta - \gamma'' = 0, \quad \beta' - \gamma = 0,$$

die

$$\Gamma - \mathsf{B} = \beta''\,\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \beta'\,\mathfrak{C}\mathfrak{A},$$
$$\mathsf{A} - \Gamma = \beta\,\mathfrak{B}\mathfrak{C} - \beta''\mathfrak{A}\mathfrak{B},$$
$$\mathsf{B} - \mathsf{A} = \beta'\,\mathfrak{C}\mathfrak{A} - \beta\,\mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

und weiter:

$$\mathsf{A} - \beta\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathsf{B} - \beta'\mathfrak{C}\mathfrak{A} = \Gamma - \beta''\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

ergeben. Bezeichnet man endlich den gemeinsamen Wert dieser drei Formen zweiten Grades mit Σ, so folgt:

$$\mathsf{A} = \Sigma + \beta\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \qquad \mathsf{B} = \Sigma + \beta'\mathfrak{C}\mathfrak{A}, \qquad \Gamma = \Sigma + \beta''\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

und

11) $$A_1 - A = |\,\omega\mathfrak{A}\Sigma, \quad B_1 - B = |\,\omega\mathfrak{B}\Sigma, \quad C_1 - C = |\,\omega\mathfrak{C}\Sigma.$$

Es giebt also einen Winder, der das Dreieck ABC in das kongruente $A_1B_1C_1$ überführt. Gäbe es noch einen zweiten Winder Σ', der das Gleiche leistete, so müsste

$$\omega\mathfrak{A}(\Sigma' - \Sigma) = \omega\mathfrak{B}(\Sigma' - \Sigma) = \omega\mathfrak{C}(\Sigma' - \Sigma) = 0,$$

sein. Es müssten also drei Punkte UVW existieren, sodass

$$\Sigma' - \Sigma = \mathfrak{A}U = \mathfrak{B}V = \mathfrak{C}W$$

wäre. Aus diesen Gleichungen folgt aber

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}U = 0, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{C}U = 0$$

d. h. U ist notwendig mit $\mathfrak{A}$ identisch und daher

$$\Sigma' - \Sigma = 0.$$

Es giebt also nur einen Winder, der den Gleichungen 11) genügt.

§ 8.

Wenn die drei Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in gerader Linie liegen, setze man

$$A = \mathfrak{A} - a, \quad A_1 = \mathfrak{A} + a,$$
$$B = \mathfrak{B} - b, \quad B_1 = \mathfrak{B} + b,$$
$$C = \mathfrak{C} - c, \quad C_1 = \mathfrak{C} + c,$$

wo abc Vektoren sind. Dann müssen die Gleichungen bestehen

12) $$\begin{cases} (\mathfrak{B} - \mathfrak{A})\,|\,(b - a) = 0, \\ (\mathfrak{C} - \mathfrak{B})\,|\,(c - b) = 0, \\ (\mathfrak{A} - \mathfrak{C})\,|\,(a - c) = 0. \end{cases}$$

Weil $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in gerader Linie liegen, sind die drei Vektoren $\mathfrak{B} - \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} - \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} - \mathfrak{C}$ parallel. Ist q ein ihnen paralleler Einheitsvektor, so folgt aus den drei letzten Gleichungen

13) $$a\,|\,q = b\,|\,q = c\,|\,q = \varrho,$$

Wenn man daher

14) $$\begin{cases} a = \varrho q + a_1, \\ b = \varrho q + b_1, \\ c = \varrho q + c_1 \end{cases}$$

setzt, so wird

$$a_1\,|\,q = b_1\,|\,q = c_1\,|\,q = 0.$$

Definiert man jetzt drei Punkte durch die Gleichungen:

$$A' = A + 2\varrho q, \quad B' = B + 2\varrho q, \quad C' = C + 2\varrho q,$$

so ergiebt sich:

$$\frac{A_1 + A'}{2} = \mathfrak{A} + \varrho q, \quad A_1 - A' = 2a_1,$$

$$\frac{B_1 + B'}{2} = \mathfrak{B} + \varrho q, \quad B_1 - B' = 2b_1,$$

$$\frac{C_1 + C'}{2} = \mathfrak{C} + \varrho q, \quad C_1 - C' = 2c_1.$$

Die Linien A_1A', B_1B', C_1C' werden also von der Linie $(\mathfrak{A}, q)$ in ihren Mitten senkrecht getroffen, wenn sie nicht alle gleich Null sind, und daher gehen $A_1B_1C_1$ aus $A'B'C'$ hervor durch Drehung um 180^0 um die Axe $(\mathfrak{A}, q)$, und die $A_1B_1C_1$ entstehen aus ABC durch eine Schiebung um $2\varrho q$ und die eben bezeichnete Drehung. Sind die drei Vektoren $a_1b_1c_1$ Null, so reicht die Schiebung aus. Man hat somit auch hier die Schraubenbewegung. Aber in den Formeln 11) des vorigen Paragraphen ist diese nur als ein Grenzfall enthalten entsprechend der Annäherung von $\frac{\varphi}{2}$ an 90^0.

Auch wenn zwei der Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ zusammenfallen, ist der obige Schluss noch möglich, weil dann zwei von den Gleichungen 12) nicht illusorisch werden und der Vektor q noch bestimmt ist.

Ist aber $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, so bestimme man q so, dass es senkrecht auf den Vektoren $b - a$ und $c - a$ ist. Weil dann

$$(b - a) \mid q = 0, \quad (c - a) \mid q = 0,$$

bestehen die Gleichungen 13) mit ihren weiteren Folgerungen.

q kann unbestimmt werden, wenn die drei Vektoren abc komplanar sind. Nimmt man in diesem Falle q senkrecht zur Ebene abc, so folgt $\varrho = 0$, während alles übrige wie oben bleibt.

Endlich könnte die Ebene abc unbestimmt werden, indem a, b, c parallel werden. Bestimmt man dann q so, dass $a \mid q = 0$ ist, so wird $\varrho = 0$ und es gelten die früheren Resultate.

§ 9.

Nun werde zu den kongruenten Dreiecken ABC und $A_1B_1C_1$ noch ein vierter Punkt D und einer D_1 hinzugenommen, die so liegen, dass

$$\overline{AD} = \overline{A_1D_1}, \quad \overline{BD} = \overline{B_1D_1}, \quad \overline{CD} = \overline{C_1D_1}$$

ist. Die Mitte von DD_1, d. h. der Punkt $\frac{1}{2}(D + D_1)$ sei mit $\mathfrak{D}$ bezeichnet. Zuerst werde vorausgesetzt, dass von den vier Punkten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ keine drei in gerader Linie liegen. Dann kann man die Betrachtungen des § 7 auf jedes der vier Dreiecke ABC, ABD, ACD, BCD anwenden und erhält so die Gleichungen:

$$15)\quad \begin{cases} A_1 - A = |\,\omega\mathfrak{A}\Gamma, & A_1 - A = |\,\omega\mathfrak{A}\mathsf{B}, \quad B_1 - B = |\,\omega\mathfrak{B}\mathsf{A}, \\ B_1 - B = |\,\omega\mathfrak{B}\Gamma, & C_1 - C = |\,\omega\mathfrak{C}\mathsf{B}, \quad C_1 - C = |\,\omega\mathfrak{C}\mathsf{A}, \\ D_1 - D = |\,\omega\mathfrak{D}\Gamma, & D_1 - D = |\,\omega\mathfrak{D}\mathsf{B}, \quad D_1 - D = |\,\omega\mathfrak{D}\mathsf{A}, \end{cases}$$

$$16)\quad A_1 - A = |\,\omega\mathfrak{A}\Sigma, \quad B_1 - B = |\,\omega\mathfrak{B}\Sigma, \quad C_1 - C = |\,\omega\mathfrak{C}\Sigma,$$

wo A, B, Γ, Σ vier Formen zweiten Grades sind.

Die Vergleichung der beiden Werte von $A_1 - A$ und $B_1 - B$ giebt

$$\omega\mathfrak{A}(\Sigma - \Gamma) = 0, \quad \omega\mathfrak{B}(\Sigma - \Gamma) = 0,$$

woraus

$$\Sigma - \Gamma = -\nu\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

folgt, wo ν eine Zahl ist. Ebenso ergiebt die Vergleichung von $B_1 - B$ und $C_1 - C$

$$\Sigma - \mathsf{B} = -\mu\mathfrak{C}\mathfrak{A},$$

und die von $C_1 - C$ und $A_1 - A$:

$$\Sigma - \mathsf{A} = -\lambda\mathfrak{B}\mathfrak{C}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} D_1 - D &= |\,\omega\mathfrak{D}\Sigma + \lambda\,|\,\omega\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{C} \\ &= |\,\omega\mathfrak{D}\Sigma + \mu\,|\,\omega\mathfrak{D}\mathfrak{C}\mathfrak{A} \\ &= |\,\omega\mathfrak{D}\Sigma + \nu\,|\,\omega\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{B}. \end{aligned}$$

Da $\omega\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = (\mathfrak{B} - \mathfrak{D})(\mathfrak{C} - \mathfrak{D}) = \mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{D}\mathfrak{B}$ ist, muss, damit die drei obigen Ausdrücke gleich sind,

$$\begin{aligned} \lambda(\mathfrak{D}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\mathfrak{D}) &= \mu(\mathfrak{D}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{D}) \\ &= \nu(\mathfrak{D}\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\mathfrak{D}) \end{aligned}$$

sein. Multipliziert man mit $\mathfrak{D}$, so folgt:

$$17)\quad \lambda\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} = \mu\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{D} = \nu\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}$$

und die weitere Multiplikation mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ liefert:

$$\lambda\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} = \mu\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} = \nu\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} = 0.$$

Diese Gleichungen können auf zwei Arten erfüllt werden. Entweder ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} \neq 0$. Dann ist $\lambda = \mu = \nu = 0$ und es tritt zu den Gleichungen 16) noch hinzu:

$$16^*)\quad D_1 - D = |\,\omega\mathfrak{D}\Sigma.$$

Das Tetraeder $ABCD$ wird somit durch den Winder Σ in das $A_1 B_1 C_1 D_1$ übergeführt.

Oder es ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} = 0$, und die vier Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ liegen in einer Ebene. Dann kann man die Zahl ϱ so bestimmen, dass $\varrho\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ den drei in 17) gleichgesetzten Produkten gleich wird, und erhält dann:

$$16^{**})\quad D_1 - D = |\,\omega\mathfrak{D}\Sigma + \varrho\,|\,\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}.$$

§ 10.

Das Tetraeder $A_1 B_1 C_1 D_1$ war so angenommen, dass die sechs Entfernungen der vier Ecken den entsprechenden Kantenlängen des Tetraeders $ABCD$ gleich sind. Daher sind die beiden Figuren entweder kongruent oder symmetrisch. Da in den Gleichungen 16) und 16*) die Überführung durch einen Winder Σ ausgeführt wird, sind dann die beiden Tetraeder kongruent; und daher müssen, wenn sie symmetrisch sind, die Gleichungen 16) und 16**) gelten. Diese setzen aber voraus, dass die vier Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ in einer Ebene liegen.

Wir haben also den Satz: Wenn zwei Tetraeder symmetrisch gleich sind, liegen die Mitten der Verbindungslinien entsprechender Ecken in einer und derselben Ebene, die Mittelebene heissen möge.

Dass im ersten Falle die beiden Tetraeder kongruent sind, kann man zeigen, indem man die Gleichung:

$$ABCD = A_1 B_1 C_1 D_1$$

beweist.

Setzen wir, ähnlich wie in § 8,

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathfrak{A} + a, & A &= \mathfrak{A} - a, \\ B_1 &= \mathfrak{B} + b, & B &= \mathfrak{B} - b, \\ C_1 &= \mathfrak{C} + c, & C &= \mathfrak{C} - c, \\ D_1 &= \mathfrak{D} + d, & D &= \mathfrak{D} - d, \end{aligned}$$

so folgt:

$$18)\quad \begin{cases} A_1 B_1 C_1 D_1 - ABCD = 2[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}d - \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}c + \mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}b - \mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}a] \\ \qquad\qquad + 2[\mathfrak{A}bcd - \mathfrak{B}acd + \mathfrak{C}abd - \mathfrak{D}abc]. \end{cases}$$

Weil ein Produkt von vier Vektoren Null ist, ist

$$\mathfrak{B}acd = \mathfrak{B}acd + (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})acd = \mathfrak{A}acd \text{ u. s. w.}$$

und daher die zweite Klammer

$$\begin{aligned} &= \mathfrak{A}(bcd - acd + abd - abc) \\ &= \mathfrak{A}(b - a)(c - a)(d - a). \end{aligned}$$

Sind nun $uvwt$ vier Vektoren, so ist

$$(|ut)(|vt)(|wt) = 0,$$

weil die drei Faktoren Vektoren, die auf t senkrecht stehen, also komplanar sind.

Oder, um einen andern Beweis zu geben, sei $|vt = v'$, $|wt = w'$ gesetzt, so ist:

$$v'w'|ut = (v'|u)(w'|t) - (v'|t)(w'|u).$$

Aber $v'|t = t|v' = tvt$ ist $= 0$, und ebenso $w'|t$, daher ist

$$v'w'|ut = 0$$

und dies ist die zu beweisende Gleichung.

Es ist aber $2(b-a) = |\,\omega(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\Sigma.$

Bringt man daher mit Hilfe eines willkürlichen Punktes den Winder Σ in die Form $Pe+fg$, wo efg Vektoren sind, so folgt:

$$\omega(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\Sigma = e(\mathfrak{B}-\mathfrak{A}),$$

daher

$$b-a = \frac{1}{2}|(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})e,$$

$$c-a = \frac{1}{2}|(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})e,$$

$$d-a = \frac{1}{2}|(\mathfrak{A}-\mathfrak{D})e,$$

sodass nach der eben bewiesenen Formel:

$$(b-a)(c-a)(d-a) = 0$$

ist. Die erste Klammer in Gleichung 18) kann man schreiben:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}(d-a) - \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}(c-a) + \mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}(b-a)$$
$$+ a[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}].$$

Der Koeffizient von a ist gleich $(\mathfrak{A}-\mathfrak{D})(\mathfrak{B}-\mathfrak{D})(\mathfrak{C}-\mathfrak{D})$, daher der zweite Summand als Produkt von vier Vektoren, gleich Null.

Der erste Summand wird aber gleich

$$\frac{1}{2}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\,|(\mathfrak{A}-\mathfrak{D})e - \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}\,|(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})e + \mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\,|(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})e]$$

und, wenn man $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})$ u. s. w. einführt,

$$= \frac{\mathfrak{A}}{2}[(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\,|(\mathfrak{A}-\mathfrak{D})e - (\mathfrak{B}-\mathfrak{A})(\mathfrak{D}-\mathfrak{A})\,|(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})e$$
$$+ (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})(\mathfrak{D}-\mathfrak{A})\,|(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})e].$$

Sind nun wieder $uvwt$ vier beliebige Vektoren, so hat man

$$uv\,|\,wt = (u\,|\,w)(v\,|\,t) - (u\,|\,t)(v\,|\,w),$$
$$vw\,|\,ut = (v\,|\,u)(w\,|\,t) - (v\,|\,t)(w\,|\,u),$$
$$wu\,|\,vt = (w\,|\,v)(u\,|\,t) - (w\,|\,t)(u\,|\,v),$$

daher durch Addition:

$$uv\,|\,wt + vw\,|\,ut + wu\,|\,vt = 0.^*$$

Dieser Gleichung zufolge ist also der Koeffizient von $\frac{1}{2}\mathfrak{A}$ gleich Null und demnach $ABCD = A_1B_1C_1D_1$.

§ 11.

Man kann den Satz über die symmetrischen Tetraeder auch noch auf andere Art beweisen. Wir denken uns von D aus eine Senkrechte auf die Ebene ABC gefällt, deren Fusspunkt in dieser Ebene der Punkt:

* Grassmann a. a. O. Nr. 185.

$$A + \beta(B - A) + \gamma(C - A)$$

sei, wo β und γ Zahlen sind. Da $|\omega ABC$ ein auf der Ebene ABC senkrechter Vektor ist, kann man

19) $$D = A + \beta(B - A) + \gamma(C - A) + \lambda|\omega ABC$$

setzen. Für das kongruente Tetraeder wäre dann

$$D_1 = A_1 + \beta(B_1 - A_1) + \gamma(C_1 - A_1) + \lambda|\omega A_1 B_1 C_1.$$

Daher ist für das symmetrische

19*) $$D_1 = A_1 + \beta(B_1 - A_1) + \gamma(C_1 - A_1) - \lambda|\omega A_1 B_1 C_1$$

also

20) $$\mathfrak{D} = \mathfrak{A} + \beta(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) + \gamma(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) - \frac{\lambda}{2}|\omega(A_1 B_1 C_1 - ABC).$$

Mit den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen ist aber

$$A_1 B_1 C_1 - ABC = 2[\mathfrak{A}\mathfrak{B}c + \mathfrak{B}\mathfrak{C}a + \mathfrak{C}\mathfrak{A}b + abc],$$

also, weil $\omega abc = 0$ ist:

$$\begin{aligned} \omega(A_1 B_1 C_1 - ABC) &= 2\omega[\mathfrak{A}\mathfrak{B}c + \mathfrak{B}\mathfrak{C}a + \mathfrak{C}\mathfrak{A}b] \\ &= 2[(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})c + (\mathfrak{C} - \mathfrak{B})a + (\mathfrak{A} - \mathfrak{C})b] \\ &= 2[\mathfrak{A}(b - c) + \mathfrak{B}(c - a) + \mathfrak{C}(a - b)] \\ &= \mathfrak{A}|(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})e + \mathfrak{B}|(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})e + \mathfrak{C}|(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})e. \end{aligned}$$

Um hiervon die Ergänzung nehmen zu können, muss man die rechte Seite, die eine Summe von Bivektoren ist, auch als solche darstellen. Zu dem Zwecke formt man sie in

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})|(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})e + (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})|(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})e \\ &+ \mathfrak{C}[|(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})e + |(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})e + |(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})e] \end{aligned}$$

um, was, weil die Klammer verschwindet, der ersten Summe gleich ist. Damit folgt:

$$\begin{aligned} |\omega(A_1 B_1 C_1 - ABC) &= |[(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})|(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})e] + |[(\mathfrak{B} - \mathfrak{C})|(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})e] \\ &= [(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})|e](\mathfrak{C} - \mathfrak{B}) - [(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})|(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})]e \\ &+ [(\mathfrak{B} - \mathfrak{C})|e](\mathfrak{A} - \mathfrak{C}) - [(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})|(\mathfrak{B} - \mathfrak{C})]e \\ &= \mathfrak{A}[(\mathfrak{B} - \mathfrak{C})|e] + \mathfrak{B}[(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})|e] \\ &\qquad + \mathfrak{C}[(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})|e]. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck stellt aber einen in der Ebene $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ enthaltenen Vektor vor; addiert man dessen $-\frac{\lambda}{2}$-faches zu dem Punkt

$$\mathfrak{A} + \beta(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) + \gamma(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})$$

der Ebene $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ nach Vorschrift von Gleichung 20), so entsteht in $\mathfrak{D}$ wieder ein Punkt dieser Ebene.

§ 12.

Wenn die beiden symmetrischen Tetraeder $ABCD$ und $A_1 B_1 C_1 D_1$ gegeben sind, so ist der Winder Σ vollständig bestimmt, daher auch die Zahlen $\lambda\mu\nu$ und ϱ in 17) und 16**). Nimmt man aber Σ und

ϱ beliebig an und berechnet dann $A_1 B_1 C_1 D_1$ aus den Gleichungen 16) und 16**), so wird das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ zu ABC kongruent. Ferner wird

$$D_1 - D - (A_1 - A) = |\,\omega(\mathfrak{D} - \mathfrak{A})\Sigma + \varrho|\ \omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C},$$

also

$$\begin{aligned}(D_1 - A_1)^2 - (D - A)^2 &= 2(\mathfrak{D} - \mathfrak{A})\,|\,(D_1 - D - A_1 + A)\\ &= 2\varrho(\mathfrak{D} - \mathfrak{A})\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\\ &= 2\varrho(\mathfrak{D} - \mathfrak{A})(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}).\end{aligned}$$

Somit wird nur dann

$$\overline{D_1 A_1} = \overline{DA} \quad \text{und ebenso} \quad \overline{D_1 B_1} = \overline{DB}, \quad \overline{D_1 C_1} = \overline{DC},$$

wenn entweder $\varrho = 0$ oder die vier Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ in einer Ebene liegen. Nur dann erhält man folglich ein zu $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ kongruentes oder symmetrisches Tetraeder.

Es ergiebt sich nun im letzterem Falle:

$$A_1 B_1 C_1 D_1 + ABCD = 2[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} + abcd + F]$$

wo

$$F = \mathfrak{A}\mathfrak{B}cd - \mathfrak{A}\mathfrak{C}bd + \mathfrak{A}\mathfrak{D}bc + \mathfrak{B}\mathfrak{C}ad - \mathfrak{B}\mathfrak{D}ac + \mathfrak{C}\mathfrak{D}ab.$$

Weil aber $abcd$ als Produkt von vier Vektoren, und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ verschwindet, weil die vier Punkte in einer Ebene liegen, ist nur noch F zu berechnen.

Dies ist gleich

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A}\mathfrak{B}(c - a)(d - a) - \mathfrak{A}\mathfrak{C}(b - a)(d - a) + \mathfrak{A}\mathfrak{D}(b - a)(c - a)\\ &\quad + \mathfrak{A}\mathfrak{B}(ad - ac) - \mathfrak{A}\mathfrak{C}(ad - ab) + \mathfrak{A}\mathfrak{D}(ac - ab)\\ &\quad + \mathfrak{B}\mathfrak{C}ad - \mathfrak{B}\mathfrak{D}ac + \mathfrak{C}\mathfrak{D}ab.\end{aligned}$$

Die sechs letzten Summanden ergeben in anderer Zusammenfassung

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\mathfrak{A})ad + (\mathfrak{B}\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{D}\mathfrak{B})ac\\ &\qquad + (\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{D}\mathfrak{A})ab\\ &= (\mathfrak{A} - \mathfrak{C})(\mathfrak{B} - \mathfrak{C})ad + (\mathfrak{B} - \mathfrak{D})(\mathfrak{A} - \mathfrak{D})ac\\ &\qquad + (\mathfrak{A} - \mathfrak{D})(\mathfrak{C} - \mathfrak{D})ab = 0,\end{aligned}$$

weil jeder Summand als Produkt von vier Vektoren für sich verschwindet.

Wenn man die drei Vektoren $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} - \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A} - \mathfrak{D}$ mit u, v, w bezeichnet, so wird der erste Teil von F gleich

$$\tfrac{1}{4}\mathfrak{A}\{u\,|\,ve(|\,we + \varrho\,|\,uv) - v\,|\,ue(|\,we + \varrho\,|\,uv) + w\,|\,ue\,|\,ve\}.$$

Der Inhalt der Klammer ist $\varrho T_1 + T_2$, wo

$$\begin{aligned}T_1 &= u\,|\,ve\,|\,uv - v\,|\,ue\,|\,uv,\\ T_2 &= u\,|\,ve\,|\,we - v\,|\,ue\,|\,we + w\,.\,ue\,|\,ve.\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}u\,|\,ve\,|\,wt &= wt\,|\,(u\,|\,ve)\\ &= wt\,[v(u\,|\,e) - e(u\,|\,v)],\end{aligned}$$

daher

$$T_1 = -\,uve(u\,|\,v) - vue(v\,|\,u) = 0.$$

Indem man die nämliche Umformung auf T_2 anwendet, findet man

$$T_2 = e[vw(u|e) + wu(v|e) + uv(w|e)].$$

Für beliebige Vektoren uvw verschwindet die Klammer nicht. Hier aber sind diese drei Vektoren komplanar, daher kann man

$$w = \mu u + \nu v$$

setzen, womit sich

$$T_2 = e[\mu\nu u(u|e) + \nu\nu u(v|e) + \mu u v(u|e) + \nu u v(v|e)] = 0$$

ergiebt. Hiermit ist gezeigt, dass

21) $$A_1 B_1 C_1 D_1 = -ABCD$$

ist für jeden beliebigen Wert von ϱ, wenn nur die vier Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ in einer Ebene liegen, dass also dann die Tetraeder symmetrisch sind.

§ 13.

Wenn, wie angenommen, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ in einer Ebene liegen, kann man setzen

22) $$\mathfrak{D} = \mathfrak{A} + \mu(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) + \nu(\mathfrak{C} - \mathfrak{A});$$

dann ergeben die Gleichungen 16) und 16**):

$$D_1 - D = (1 - \mu - \nu)(A_1 - A) + \mu(B_1 - B) + \nu(C_1 - C) + \varrho\,|\,\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C},$$

daher der Vektor

$$D_1 - (1 - \mu - \nu)A_1 - \mu B_1 - \nu C_1$$

dem

$$D - (1 - \mu - \nu)A - \mu B - \nu C + \varrho\,|\,\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

gleich ist. Ist er $= x$, so ergiebt die Gleichung 22):

$$x = \frac{\varrho}{2}\,|\,\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

und dann folgt:

23) $$\begin{cases} D = (1 - \mu - \nu)A + \mu B + \nu C - \frac{\varrho}{2}\,|\,\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \\ D_1 = (1 - \mu - \nu)A_1 + \mu B_1 + \nu C_1 + \frac{\varrho}{2}\,|\,\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}. \end{cases}$$

Ist $\varrho = 0$, so ist also D ein Punkt der Ebene ABC, D_1 der bei kongruenter Transformation entsprechende Punkt der Ebene $A_1B_1C_1$ und die beiden Tetraeder $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ sind dann beide Null.

Die Gleichungen 23) ergeben den Satz: Die von den Ecken D und D_1 auf die Mittelebene gefällten Senkrechten sind gleich lang und treffen die Dreiecke ABC bezw. $A_1B_1C_1$ in entsprechenden Punkten.

Wenn man in Formel 20) den in § 11 gefundenen Wert von

$$|\,\omega(A_1B_1C_1 - ABC)$$

einträgt, folgt:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A} + \beta(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) + \gamma(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) - \frac{\lambda}{2}[\mathfrak{A}(\mathfrak{B} - \mathfrak{C}\,|\,e) + \mathfrak{B}(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}\,|\,e) + \mathfrak{C}(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\,|\,e)].$$

Die Vergleichung mit 22) ergiebt also:

$$1-\mu-\nu=1-\beta-\gamma-\frac{\lambda}{2}(\mathfrak{B}-\mathfrak{C}\,|\,e),$$
$$\mu=\beta-\frac{\lambda}{2}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\,|\,e),$$
$$\nu=\gamma-\frac{\lambda}{2}(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\,|\,e)$$

und damit nach 19) und 19*):

$$D=A+\Big(\mu+\frac{\lambda}{2}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\,|\,e)\Big)(B-A)$$
$$+\Big(\nu+\frac{\lambda}{2}(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\,|\,e)\Big)(C-A)$$
$$+\lambda\,|\,\omega ABC.$$

Ein ähnlicher Ausdruck ergiebt sich für D_1; er entsteht aus dem Vorstehenden, indem man A, B, C durch A_1, B_1, C_1, und $\lambda\,|\,\omega ABC$ durch $-\lambda\,|\,\omega A_1B_1C_1$ ersetzt. Ähnliche Ausdrücke haben wir in 23); es soll nun nachgewiesen werden, dass beide übereinstimmen. Schreibt man den obigen Ausdruck:

$$24)\qquad \begin{cases} D=(1-\mu-\nu)A+\mu B+\nu C+X, \\ D_1=(1-\mu-\nu)A_1+\mu B_1+\nu C_1+Y, \end{cases}$$

so wird:

$$X+Y=\lambda\,|\,\omega(ABC-A_1B_1C_1)$$
$$+\lambda(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\,|\,e)(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})+\lambda(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\,|\,e)(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})$$
$$=\lambda\,[\,|\,\omega(ABC-A_1B_1C_1)+(\mathfrak{B}-\mathfrak{C}|e)\mathfrak{A}+(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}|e)\mathfrak{B}$$
$$+(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\,|\,e)\mathfrak{C}]=0,$$

wie oben in § 11 gezeigt wurde.

Dagegen ist:

$$X-Y=-\lambda(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\,|\,e)(b-a)-\lambda(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\,|\,e)(c-a)$$
$$+\lambda\,|\,\omega(ABC+A_1B_1C_1)$$
$$=\lambda\,|\,\omega(A_1B_1C_1+ABC)-\frac{1}{2}\lambda(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\,|\,e)\,|\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})e$$
$$-\frac{1}{2}\lambda(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\,|\,e)\,|\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})e.$$

Weiter folgt:

$$A_1B_1C_1+ABC=2\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}+2\mathfrak{A}bc+2\mathfrak{B}ca+2\mathfrak{C}ab,$$
$$\omega(A_1B_1C_1+ABC)=2\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}+2(bc+ca+ab)$$
$$=2\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}+2(b-a)(c-a),$$

also

$$X-Y=2\lambda\,|\,\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}+\frac{\lambda}{2}\,|\,[\,|\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})e\cdot|\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})e]$$
$$-\frac{\lambda}{2}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\,|\,e)\,|\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})e-\frac{\lambda}{2}(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\,|\,e)\,|\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})e.$$

Setzt man $\qquad \mathfrak{B}-\mathfrak{A}=u,\quad \mathfrak{C}-\mathfrak{A}=v,$

so ist die rechte Seite oben, soweit sie mit $\frac{\lambda}{2}$ multipliziert ist,

$$|\,(\,|\,ue\cdot|\,ve)+(v\,|\,e)\,|\,ue-(u\,|\,e)\,|\,ve=U.$$

Wenn man in $w|ve = (w|e)|v - (w|v)|e$ für w setzt $|ue$, so folgt:

$$|ue \cdot |ve = -(vue)|e = (euv)|e.$$

Anderseits folgt aus $|(e|uv) = u(v|e) - v(u|e)$:

$$-|e[|e(|uv)] = (v|e)|ue - (u|e)|ve.$$

Die linke Seite ist aber $= -e(euv) + |uv \cdot (e|e)$. Daher ist:

$$U = (euv)e - (euv)e + (e|e)|uv = (e|e)|uv,$$

also

$$X - Y = 2\lambda|\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \frac{\lambda}{2}(e|e)|(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}),$$

oder weil $\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = (\mathfrak{B}-\mathfrak{A})(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})$ ist,

$$X - Y = \frac{\lambda}{2}(4+\varepsilon^2)|\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C},$$

wenn man mit ε die Länge von e bezeichnet. Es wird also:

$$X = -Y = \frac{\lambda(4+\varepsilon^2)}{4}|\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

und die Vergleichung von 23) und 24) liefert

$$\varrho = -\frac{\lambda(4+\varepsilon^2)}{2}.$$

Wenn bei zwei kongruenten Tetraedern die besagten Mitten in einer Ebene liegen, also

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A} + \mu(\mathfrak{B}-\mathfrak{A}) + \nu(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})$$

ist, so ergeben die Gleichungen 16) und 16*):

$$D_1 - D = A_1 - A + \mu(B_1 - B - A_1 + A) + \nu(C_1 - C - A_1 + A)$$

und beide zusammen

$$D = A + \mu(B - A) + \nu(C - A),$$

$$D_1 = A_1 + \mu(B_1 - A_1) + \nu(C_1 - A_1),$$

die aussagen, dass $ABCD$ in einer Ebene liegen.

§ 14.

Die Betrachtungen der §§ 3 und 4 zeigen, dass, wenn Σ eine Form zweiten Grades ist, die Formel:

$$25)\qquad P_1 - P = |\omega\frac{P_1 + P}{2}\Sigma$$

eine kongruente Transformation des Raumes darstellt. Um einen Ausdruck von P_1 durch P aus ihr abzuleiten, nehmen wir an, Σ sei in die Normalform: $\Sigma = Ua + \lambda|e$

gesetzt, wo e ein Einheitsvektor parallel dem Vektor a und λ eine Zahl ist. Dann hat man, da

$$\omega\left(\frac{P_1+P}{2}\,|\,e\right) = {}' e$$

ist,

$$P_1 - P = \lambda e + \tfrac{1}{2}\,|\,\omega P\, U a + \tfrac{1}{2}\,|\,\omega P_1\, U a,$$

oder

26) $$P_1 - U = P - U + \lambda e - \tfrac{1}{2}\,|\,(P - U)a - \tfrac{1}{2}\,|\,(P_1 - U)a.$$

Hieraus folgt:

$$a\,|\,(P_1 - U) = a\,|\,(P - U) + \lambda a\,|\,e$$

$$|\,a(P_1 - U) = |\,a(P - U) - \tfrac{1}{2}\,\{(P - U)(a\,|\,a) - a[a\,|\,(P - U)]\}$$
$$- \tfrac{1}{2}\,\{(P_1 - U)(a\,|\,a) - a[a\,|\,(P_1 - U)]\}.$$

Trägt man 26) ein, so erhält man

$$P_1 - U = P - U + \lambda e - |\,(P - U)a - \tfrac{1}{4}(P - U)(a\,|\,a) + \tfrac{1}{4}a[a\,|\,(P - U)]$$
$$- \tfrac{1}{4}(P_1 - U)(a\,|\,a) + \tfrac{1}{4}a\{[a\,|\,(P - U)] + \lambda(a\,|\,e)\}.$$

Setzt man die Länge des Vektors a gleich $2\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}$, so dass

$$a = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\cdot e$$

ist, so wird:

$$P_1 - U = P - U + \lambda e - 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\,|\,(P - U)e - \mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}(P - U)$$
$$+ \mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}\,e(e\,|\,P - U) - \mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}(P_1 - U)$$
$$+ \mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}\,e\{[e\,|\,(P - U)] + \lambda\},$$

woraus

27) $$\left\{\begin{aligned} P_1 - U = (P - U)\cos\varphi + \lambda e + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,e(e\,|\,P - U) \\ - \sin\varphi\,|\,(P - U)e \end{aligned}\right.$$

folgt.

Setzt man in dieser Gleichung $\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} = \mu$ und geht zu orthogonalen Koordinaten über, so erhält man aus ihr die bekannten Eulerschen Formeln der Transformation dieser Koordinaten.

Während die Formel 25) für $\varphi = 180^0$ ihre Giltigkeit verliert, ist dies bei 27) nicht der Fall. Sie liefert vielmehr

$$\frac{P + P_1}{2} = U + \frac{\lambda}{2}e + e(e\,|\,P - U)$$

also einen Punkt auf der Axe (U, e); und da

$$(P_1 - P)\,|\,e = -2(P - U)\,|\,e + \lambda(e\,|\,e) + (e\,|\,e)[e\,|\,P - U] = \frac{\lambda}{2},$$

so ist die Projektion von $P_1 - P$ auf die Axe konstant, wie es bei einer Drehung um 180^0 sein muss.

In Formel 27) kann man schreiben:

$$(P-U)e = \omega UPe,$$

$$U + (P-U)\cos\varphi + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}e(e\,|\,P-U)$$

$$= P\left(1-2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}U + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}e(e\,|\,P-U)$$

$$= P + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}[e(e\,|\,P-U) - (e\,|\,e)(P-U)]$$

$$= P + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,|\,e[\,|\,e(P-U)].$$

Also folgt:

28) $$P_1 = P - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,|\,e(\,|\,\omega UPe) - \sin\varphi\,|\,\omega UPe + \lambda e,$$

oder, wenn man die Form zweiten Grades Ue mit Π bezeichnet, weil $e = \omega\Pi$ ist,

$$P_1 = P + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,|\,(\omega\Pi\cdot|\,\omega P\Pi) + \sin\varphi\,|\,\omega P\Pi + \lambda\,\omega\Pi.$$

Betrachtet man nun die allgemeinere Form:

29) $$P_1' = P + |\,(\omega\Sigma'\cdot|\,\omega P\Sigma') + \tau\,|\,\omega P\Sigma',$$

wo τ ein Zahlenkoeffizient und Σ' eine Form zweiten Grades ist, deren Normalform

$$\xi Ue + \eta\,|\,e$$

ist, wo ξ und η Zahlen sind, von denen man ξ positiv annehmen kann, so wird

$$P_1' = P + |\,(\xi e(\xi\omega PUe + \eta e) + \tau\,|\,(\xi\omega PUe + \eta\,|\,e)$$

$$= P + \xi^2\,|\,e(\,|\,\omega PUe) + \tau\xi\,|\,\omega PUe + \tau\eta e.$$

Die rechte Seite wird mit der von 28) identisch, wenn

$$\xi^2 = 2\sin^2\frac{\varphi}{2},\quad \tau\xi = \sin\varphi,\quad \tau\eta = \lambda.$$

Man kann also den Winder Σ' und die Zahl τ so bestimmen, dass durch die Formel 29) dieselbe kongruente Transformation dargestellt ist wie durch die Formel 28). Es folgt

$$\xi = \sqrt{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2},\quad \tau = \sqrt{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2},\quad \eta = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\sec\frac{\varphi}{2}.$$

Es stellt also 29) eine Schraubenbewegung vor, wenn $\xi^2 + \tau^2 = 2$ ist.

§ 15.

Es liegt nahe, unter Σ einen beliebigen Winder verstanden, die durch

30) $$P_1 = P + \varrho\,|\,(\omega\Sigma\cdot|\,\omega P\Sigma) + \sigma\,|\,\omega P\Sigma,$$

wo ϱ und σ Zahlen sind, gegebene Raumtransformation zu betrachten.

Ersetzen wir den Punkt P und den ihm entsprechenden P_1 durch ein anderes Paar von zugeordneten Punkten QQ_1, so folgt:

$$Q_1 - P_1 = Q - P + \varrho \,|\, \omega \Sigma \cdot |\, \omega(Q - P) + \sigma \,|\, \omega(Q - P)\Sigma.$$

Sei nun, wie oben angenommen, Σ in der Normalform

$$\Sigma = \xi U e + \eta \,|\, e,$$

so wird

$$\omega(Q - P)\Sigma = \xi(P - Q)e, \quad \omega \Sigma = \xi e;$$

daher

$$\begin{aligned} Q_1 - P_1 &= Q - P + \xi^2 \varrho \,|\, e[\,|\,(P - Q)e] + \sigma \xi \,|\, (P - Q)e \\ &= Q - P + \xi^2 \varrho [P - Q - e(P - Q \,|\, e)] + \sigma \xi \,|\, (P - Q)e \end{aligned}$$

$$|\,(Q_1 - P_1) = |\,(Q - P)(1 - \xi^2 \varrho) - \xi^2 \varrho (P - Q \,|\, e) \,|\, e + \sigma \xi (P - Q)e.$$

Die Multiplikation beider Ausdrücke liefert dann

$$\begin{aligned} &(Q_1 - P_1) \,|\, (Q_1 - P_1) = (Q_1 - P_1)^2 \\ &= (1 - \xi^2 \varrho)^2 (Q - P)^2 + \xi^2 \varrho (1 - \xi^2 \varrho)(P - Q \,|\, e)^2 + \xi^2 \varrho (1 - \xi^2 \varrho)(P - Q \,|\, e)^2 \\ &\qquad + \xi^4 \varrho^2 (P - Q \,|\, e)^2 - \sigma^2 \xi^2 [(P - Q)^2 - (P - Q \,|\, e)^2] \\ &= [(1 - \xi^2 \varrho)^2 + \xi^2 \sigma^2](Q - P)^2 + [2\xi^2 \varrho - \sigma^2 \xi^2 - \xi^4 \varrho^2](P - Q) \,|\, e)^2. \end{aligned}$$

Setzt man

$$1 - \xi^2 \varrho = \lambda \cos \varkappa, \quad \xi \sigma = \lambda \sin \varkappa,$$

so kann man dies

$$(Q_1 - P_1)^2 = (Q - P)^2 \cdot \lambda^2 + (1 - \lambda^2)(P - Q \,|\, e)^2$$

schreiben. Die Formel 30) stellt also nur, wenn $\lambda = 1$ ist, eine kongruente Transformation vor. Da aber

$$e \,|\, (Q_1 - P_1) = (1 - \xi^2 \varrho)(e \,|\, Q - P) - \xi^2 \varrho (P - Q \,|\, e)$$

oder

31) $$(P_1 - Q_1) \,|\, e = (P - Q) \,|\, e$$

ist, so schreibt sich die letzte Gleichung:

32) $$(Q_1 - P_1)^2 - (P_1 - Q_1 \,|\, e)^2 = \lambda^2 [(Q - P)^2 - (Q - P \,|\, e)^2].$$

$(Q - P)^2 - (Q - P \,|\, e)^2$ ist das Quadrat der Projektion der Strecke PQ auf eine Ebene, die zum Vector e senkrecht ist. Daher sagt die Gleichung 32) aus, dass die zu e senkrechte Komponente von $P_1 Q_1$ λ mal so lang ist als die zu e senkrechte Komponente von PQ, während die Gleichung 31) zeigt, dass die zu e parallelen Komponenten dieser Strecken gleich sind. Man kann also sagen, dass die Gleichung 30) eine affine Raumtransformation darstellt, bei der die zu e parallelen Dimensionen ungeändert bleiben, die zu e senkrechten aber auf ihr λ-faches gedehnt werden, während zugleich eine Schraubung um eine zu e parallele Axe stattfindet.

§ 16.

Im § 9 hatten wir angenommen, dass von den vier Punkten $\mathfrak{ABCD}$ keine drei in gerader Linie seien.

Liegen aber die drei $\mathfrak{ABC}$ in gerader Linie, ohne dass zwei zusammenfallen, so müssen zu den drei Gleichungen 12) des § 8 noch die drei

$$(\mathfrak{D} - \mathfrak{A}) \mid d = (\mathfrak{D} - \mathfrak{A}) \mid a,$$
$$(\mathfrak{D} - \mathfrak{B}) \mid d = (\mathfrak{D} - \mathfrak{B}) \mid b,$$
$$(\mathfrak{D} - \mathfrak{C}) \mid d = (\mathfrak{D} - \mathfrak{C}) \mid c$$

hinzukommen, die aussagen, dass der Punkt D_1 von den drei Punkten $A_1 B_1 C_1$ so weit entfernt ist wie D von ABC.

Nun sind zwei Fälle möglich. Entweder liegt $\mathfrak{D}$ ebenfalls auf der Linie $\mathfrak{ABC}$. Ist q ein Einheitsvektor dieser Linie, so sagen die drei obigen Gleichungen aus

$$q \mid a = q \mid b = q \mid c = q \mid d = \varrho,$$

nach der Bezeichnung von 13). Setzt man also

$$d = \varrho q + d_1,$$

so muss $q \mid d_1 = 0$ sein. Definiert man dann den Punkt D' durch die Gleichung

$$D' = D + 2\varrho q,$$

so wird $\frac{D_1 + D'}{2} = \mathfrak{D} + \varrho q$ ein Punkt der Axe $(\mathfrak{A}, q)$ und

$$q \mid (D_1 - D') = 2q \mid d = 0.$$

Die Schiebung $2\varrho q$ und eventuell die Drehung um 180° um die Axe $(\mathfrak{A}, q)$, die nach § 8 ABC in $A_1 B_1 C_1$ überführen, bringen also hiernach auch D mit D_1 zur Deckung.

Liegen aber die vier Punkte $\mathfrak{ABCD}$ nicht in derselben Geraden, so sei (in Übereinstimmung mit § 9) angenommen, dass $\mathfrak{ABD}$ auf einer Geraden liegen, die aber $\mathfrak{C}$ nicht enthält. Dann gelten die beiden letzten Systeme 15) und das 16) und die Vergleichung der verschiedenen Ausdrücke des nämlichen Vektors liefert die Beziehungen:

$$\mathsf{A} = \Sigma + \alpha \mathfrak{BC},$$
$$\mathsf{B} = \Sigma + \beta \mathfrak{AC},$$

die für $A_1 - A$, $B_1 - B$ und $C_1 - C$ dann übereinstimmend die Formeln 16), für $D_1 - D$ aber

$$D_1 - D = \mid \omega \mathfrak{D}\, \Sigma + \alpha \mid \omega\, \mathfrak{DBC},$$
$$= \mid \omega \mathfrak{D}\, \Sigma + \beta \mid \omega\, \mathfrak{DAC}$$

ergeben.

Da $\alpha \mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \beta \mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ sein muss, kann man beide $= \varrho \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und

$$D_1 - D = |\,\omega \mathfrak{D}\, \Sigma + \varrho\,|\,\omega \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

setzen, wie es in 16** gefunden war.

Die Betrachtungen der §§ 12 und 13 gelten dann ungeändert, nur ist im letzten $\nu = 0$ zu setzen.

Im ersten der beiden Fälle, die in diesem Paragraphen behandelt wurden, sind die beiden Tetraeder $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ kongruent, da es eine Schraubung giebt, die das eine in das andere überführt. Somit sind im zweiten Falle die Figuren symmetrisch. Daher kann man den Satz aussprechen: Wenn von den vier Mittelpunkten der Verbindungslinien entsprechender Ecken von zwei kongruenten Tetraedern drei in einer geraden Linie liegen, so liegt der vierte auch in dieser Linie. Bei symmetrischen Tetraedern gilt ein solcher Satz nicht. Um ihn direkt zu beweisen, benutzen wir den Ansatz von § 11, der

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A} + \beta(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) + \gamma(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) + \frac{1}{2}|\,\omega(A_1B_1C_1 + ABC)$$

ergiebt. Nach § 13 ist aber

$$\omega(A_1B_1C_1 + ABC) = 2[\omega \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} + (b-a)(c-a)].$$

Weil $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ in einer Geraden liegen, ist $\omega \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = 0$ und $(b-a)(c-a)$, ist nach Gleichungen 14): $= (b_1 - a_1)(c_1 - a_1)$.

Aber die Vektoren $a_1 b_1 c_1$ stehen auf dem Vektor q senkrecht, daher ist $|\,(b_1 - a_1)(c_1 - a_1)$ ein mit q paralleler Vektor, den man $= \pi q$ setzen kann. Damit folgt:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A} + \beta(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) + \gamma(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) + \pi\lambda q$$

was den Satz beweist.

§ 17.

Die Formeln des vorigen Paragraphen gelten auch dann noch, wenn der Punkt $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ zusammenfällt. Fallen aber von den vier Punkten drei in $\mathfrak{A}$ zusammen und ist der vierte $\mathfrak{D}$, so sind die drei Gleichungen im Beginn des vorigen Paragraphen:

$$33)\quad \begin{cases} (\mathfrak{D} - \mathfrak{A})\,|\,(d-a) = 0, \\ (\mathfrak{D} - \mathfrak{A})\,|\,(d-b) = 0, \\ (\mathfrak{D} - \mathfrak{A})\,|\,(d-c) = 0. \end{cases}$$

Entweder ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}$, oder es sind die drei Vektoren $d-a$, $d-b$, $d-c$ auf $\mathfrak{D} - \mathfrak{A}$ senkrecht und daher komplanar. In diesem zweiten Falle giebt es also drei Zahlen $\alpha\beta\gamma$, so dass

$$\alpha(d-a)+\beta(d-b)+\gamma(d-c)=0$$

ist. Ist $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, so folgt aus dieser Gleichung:

$$D_1-\frac{\alpha A_1+\beta B_1+\gamma C_1}{\alpha+\beta+\gamma}=D-\frac{\alpha A+\beta B+\gamma C}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Diese beiden gleichen Vektoren seien m genannt. Bezeichnet man die beiden Punkte:

$$\frac{\alpha A+\beta B+\gamma C}{\alpha+\beta+\gamma} \text{ mit } E,$$

$$\frac{\alpha A_1+\beta B_1+\gamma C_1}{\alpha+\beta+\gamma} \text{ mit } E_1,$$

so sind E_1 und E entsprechende Punkte der beiden Ebenen $A_1B_1C_1$ und ABC, die bei kongruenter Transformation in einander übergehen.

Man hat dann

$$\frac{E+E_1}{2}=\mathfrak{A},\quad D_1=E_1+m,\quad D=E+m,\quad \mathfrak{D}=\mathfrak{A}+m.$$

Weil

$$m\,|\,(d-a)=m\,|\,(d-b)=m\,|\,(d-c)=0$$

sein muss, muss auch

$$m\,|\,(b-a)=0,\quad m\,|\,(c-a)=0$$

sein, so dass $m \,||\, q$ wird. Setzt man weiter:

$$D'=\frac{\alpha A'+\beta B'+\gamma C'}{\alpha+\beta+\gamma}+m=\frac{\alpha A+\beta B+\gamma C}{\alpha+\beta+\gamma}+2\varrho q+m$$
$$=E+2\varrho q+m,$$

so folgt einerseits:

$$D_1-D'=\frac{\alpha(A_1-A')+\beta(B_1-B')+\gamma(C_1-C')}{\alpha+\beta+\gamma}$$
$$=2\frac{\alpha a_1+\beta b_1+\gamma c_1}{\alpha+\beta+\gamma}$$

mit

$$q\,|\,(D_1-D')=0,$$

anderseits

$$\frac{D_1+D'}{2}=\mathfrak{A}+\varrho q+m.$$

Der Punkt $\frac{D_1+D'}{2}$ ist also auf der Axe $(\mathfrak{A}, q)$ gelegen, die in ihm von der Linie $D'D_1$, wenn sie nicht Null ist, senkrecht getroffen wird, und die in § 8 geschilderte Bewegung führt das Tetraeder $ABCD$ in $A_1B_1C_1D_1$ über, so dass der oben behandelte Fall der der Kongruenz ist. Fällt daher $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{A}$ zusammen, so müssen die beiden Tetraeder symmetrisch sein. Dies ergiebt sich auch aus der Betrachtung der Differenz $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ des § 10, die, weil hier

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}=\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}=\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}=0$$

ist, sich auf

$$2\mathfrak{A}(bcd-acd+abd-dbc)$$

reduziert. Weil aber

$$d=\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{\alpha+\beta+\gamma}$$

ist, folgt:

$$bcd = \frac{\alpha abc}{\alpha+\beta+\gamma}, \quad acd = -\frac{\beta abc}{\alpha+\beta+\gamma},$$

$$abd = \frac{\gamma abc}{\alpha+\beta+\gamma}$$

und damit ergiebt sich:

$$A_1 B_1 C_1 D_1 - ABCD = 0.$$

Ist $\alpha+\beta+\gamma=0$, so ist $\alpha a+\beta b+\gamma c=0$, daher die drei Vektoren abc komplanar. Der Vektor q ist dann auf der Ebene dieser drei Vektoren senkrecht. Aus den Gleichungen 33) folgen

$$(\mathfrak{D}-\mathfrak{A})\,|\,(b-a)=0, \quad (\mathfrak{D}-\mathfrak{A})\,|\,(c-a)=0,$$

die zeigen, dass $\mathfrak{D}-\mathfrak{A}$ zu q parallel ist. Dann liefern die Gleichungen 33):

$$q\,|\,d = q\,|\,a = q\,|\,b = q\,|\,c = 0.$$

Somit reicht eine Drehung um 180° um die Axe $(\mathfrak{A}, q)$ aus, um $ABCD$ in $A_1 B_1 C_1 D_1$ überzuführen.

§ 18.

Die Sätze der §§ 10, 16, 17 über die Mitten der Strecken, welche entsprechende Ecken von zwei kongruenten oder symmetrischen Tetraedern verbinden, ergeben sich auch aus bekannten Eigenschaften der orthogonalen Transformationen mit reellen Koeffizienten, denn jede symmetrische oder kongruente Raumtransformation ist ja orthogonal.

Sind

$$34)\quad \begin{cases} x_1 = A + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y_1 = B + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z_1 = C + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{cases}$$

die Transformationsformeln und ξ, η, ζ die Koordinaten der Mitte der Strecke, die den Punkt (xyz) mit seinem entsprechenden $(x_1 y_1 z_1)$ verbindet, so ist:

$$\begin{cases} 2\xi = A + (a_{11}+1)x + a_{12}y + a_{13}z \\ 2\eta = B + a_{21}x + (a_{22}+1)x + a_{23}z \\ 2\zeta = C + a_{31}x + a_{32}y + (a_{33}+1)z. \end{cases}$$

Die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-s & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-s \end{vmatrix} = \varphi(s)$$

ist die sogenannte charakteristische Funktion der Substitution 34) und es ist bekanntlich:

$$\varphi(0) = \varepsilon = \pm 1,$$

je nachdem die Transformation kongruent oder symmetrisch ist.

Die Gleichung $\varphi(s)=0$ kann $s=+1$ oder $s=-1$, neben komplexen Werten, zu Wurzeln haben. Ist $s=+1$ eine μfache, $s=-1$ eine νfache Wurzel, so ist:

$$\mu + \nu = 1 \quad \text{oder} \quad 3$$
$$(-1)^\nu = \varepsilon$$

und für eine m fache Wurzel verschwinden in der Determinante $\varphi(s)$ alle Unterdeterminanten $(4-m)^{\text{ten}}$ Grades, während die $(3-m)^{\text{ten}}$ Grades nicht alle Null sind.*

Daher sind folgende Fälle möglich:

$$\varepsilon = +1, \quad \nu = 0 \quad \text{oder} \quad 2,$$
$$-1, \quad 1 \quad 3.$$

Es ist aber $\varphi(-1)$ die Determinante der Gleichungen 35). Ist also $\nu = 1$, so verschwindet sie; zwischen den Grössen:

$$2\xi - A, \quad 2\eta - B, \quad 2\zeta - C$$

besteht eine lineare Gleichung oder die Mitten der betrachteten Strecken liegen bei symmetrischer Transformation auf einer Ebene.

Bei $\nu = 3$ ist die Transformation ebenfalls symmetrisch, es verschwinden aber alle Determinanten ersten Grades für $s = -1$, d. h. es ist

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = -1,$$

alle anderen a_{ik} sind Null, daher folgt:

$$2\xi = A, \quad 2\eta = B, \quad 2\zeta = C,$$

oder die Mitten fallen in denselben Punkt.

Bei $\nu = 2$ handelt es sich um kongruente Transformationen, die Unterdeterminanten zweiten Grades verschwinden für $s = -1$, daher bestehen zwischen den Grössen $2\xi - A$, $2\eta - B$, $2\zeta - C$ zwei lineare Gleichungen, und jene Streckenmitten liegen auf einer Linie.

Bei kongruenter Transformation füllen also jene Mittelpunkte entweder den ganzen Raum aus oder sie liegen auf einer Geraden, bei symmetrischer Transformation liegen sie auf einer Ebene oder sie fallen in einen Punkt zusammen.

Diese Sätze ergeben sich auch ohne Schwierigkeit aus den allgemeinen Sätzen über die Überführung eines räumlichen Systems in ein ihm gleiches, die H. Wiener gegeben hat (Berichte d. math.-phys. Klasse d. kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., 1891, Seite 659).

* Stickelberger: Über reelle orthogonale Transformationen. Beilage zum Programm des Polytechnikums, Zürich 1877, Seite VII.

Sur les types les plus généraux d'équations représentables par trois systèmes de cercles ou de droites cotés. Application aux équations quadratiques.

Par

M. d'Ocagne

à Paris.

1. Soient:

α_1) $$a_1(x^2+y^2)+xf_1+y\varphi_1+\psi_1=0,$$

α_2) $$a_2(x^2+y^2)+xf_2+y\varphi_2+\psi_2=0,$$

α_3) $$a_3(x^2+y^2)+xf_3+y\varphi_3+\psi_3=0,$$

les équations de trois systèmes de cercles cotés respectivement au moyen des valeurs des paramètres α_1, α_2 et α_3, équations dans lesquelles f_i, φ_i, ψ_i représentent des fonctions du paramètre $\alpha_i (i=1, 2, 3)$, a_1, a_2, a_3 des constantes qui, en s'annulant, transforment le système de cercles correspondant en un système de droites.

Pour former l'équation en α_1, α_2 et α_3 représentée par l'ensemble de ces trois systèmes cotés il faut éliminer x et y entre ces trois équations. Commençons par éliminer x^2+y^2 entre ces équations prises deux à deux. Cela nous donne

$$\begin{vmatrix} f_1 & a_1 \\ f_2 & a_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} \varphi_1 & a_1 \\ \varphi_2 & a_2 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} a_1 & \psi_1 \\ a_2 & \psi_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_2 & a_2 \\ f_3 & a_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} \varphi_2 & a_2 \\ \varphi_3 & a_3 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} a_2 & \psi_2 \\ a_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_3 & a_3 \\ f_1 & a_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} \varphi_3 & a_3 \\ \varphi_1 & a_1 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} a_3 & \psi_3 \\ a_1 & \psi_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si on additionne ces trois équations après les avoir multipliées respectivement une première fois par φ_1, φ_2, φ_3, et une seconde par f_1, f_2, f_3, on obtient les deux suivantes:

$$\begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & a_1 \\ f_2 & \varphi_2 & a_2 \\ f_3 & \varphi_3 & a_3 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} a_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ a_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ a_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & a_1 \\ f_2 & \varphi_2 & a_2 \\ f_3 & \varphi_2 & a_3 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} f_1 & a_1 & \psi_1 \\ f_2 & a_2 & \psi_2 \\ f_3 & a_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Si, après avoir posé

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix}$$

nous convenons de représenter par D_f, D_φ, D_ψ ce que devient ce déterminant lorsqu' on y remplace les f_i, les φ_i, ou les ψ_i par les a_i, nous voyons que les équations précédendes peuvent s'écrire:

$$D_\psi x - D_f = 0,$$
$$D_\varphi y - D_\varphi = 0.$$

Portant les valeurs tirées de là dans l'équation α_1) on a

$$a_1(D_f^2 + D_\varphi^2) + D_\psi(f_1 D_f + \varphi_1 D_\varphi + \psi_1 D_\psi) = 0$$

or,

$$f_1 D_f = f_1 \begin{vmatrix} a_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ a_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ a_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ 0 & \varphi_2 & \psi_2 \\ 0 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \varphi_1 & \psi_1 \\ a_2 f_1 & \varphi_2 & \psi_2 \\ 0 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \varphi_1 & \psi_1 \\ 0 & \varphi_2 & \psi_2 \\ a_3 f_1 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix},$$

$$\varphi_1 D_\varphi = \varphi_1 \begin{vmatrix} f_1 & a_1 & \psi_1 \\ f_2 & a_2 & \psi_2 \\ f_3 & a_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & a_1 \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & 0 & \psi_2 \\ f_3 & 0 & \psi_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & 0 & \psi_1 \\ f_2 & a_2 \varphi_1 & \psi_2 \\ f_3 & 0 & \psi_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & 0 & \psi_1 \\ f_2 & 0 & \psi_2 \\ f_3 & a_3 \varphi_1 & \psi_3 \end{vmatrix},$$

$$\psi_1 D_\psi = \psi_1 \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & a_1 \\ f_2 & \varphi_2 & a_2 \\ f_3 & \varphi_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & a_1 \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & 0 \\ f_3 & \varphi_2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & 0 \\ f_2 & \varphi_2 & a_2 \psi_1 \\ f_3 & \varphi_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & 0 \\ f_2 & \varphi_2 & 0 \\ f_3 & \varphi_3 & a_3 \psi_1 \end{vmatrix},$$

d'où en additionnant en colonne

$$f_1 D_f + \varphi_1 D_\varphi + \psi_1 D_\psi = \begin{vmatrix} a_1 f_1 & a_1 \varphi_1 & a_1 \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ a_2 f_1 & a_2 \varphi_2 & a_2 \psi_1 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ a_3 f_1 & a_3 \varphi_1 & a_3 \psi_1 \end{vmatrix} = a_1 D.$$

L'équation ci-dessus devient donc

$$D_f^2 + D_\varphi^2 + D_\psi D = 0,$$

ou:

$$1)\quad \left\{ \overline{\begin{vmatrix} a_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ a_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ a_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix}}^2 + \overline{\begin{vmatrix} f_1 & a_1 & \psi_1 \\ f_2 & a_2 & \psi_2 \\ f_3 & a_3 & \psi_3 \end{vmatrix}}^2 + \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & a_1 \\ f_2 & \varphi_2 & a_2 \\ f_3 & \varphi_3 & a_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0. \right.$$

Telle est donc, sous forme symétrique, l'équation en α_1, α_2, α_3 la plus générale représentable par trois systèmes de cercles cotés $\alpha_1)$, $\alpha_2)$, $\alpha_3)$.

Supposons que deux de ces systèmes de cercles se réduisent à des systèmes de droites. Pour cela, faisons $a_1 = a_2 = 0$ et $a_3 = 1$ (puisque a_3 est différent de zéro). L'équation 1) devient alors:

$$2)\quad \left\{ \overline{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{vmatrix}}^2 + \overline{\begin{vmatrix} \psi_1 & f_1 \\ \psi_2 & f_2 \end{vmatrix}}^2 + \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 \\ f_2 & \varphi_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0 \right.$$

Si on pose d'une manière générale:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_1 \end{vmatrix} = |uv|$$

elle peut s'écrire

$$2^{\text{bis}})\quad \left\{ \overline{|\varphi\psi|}^2 + \overline{|\psi f|}^2 + f_3|f\varphi|\,|\varphi\psi| + \varphi_3|f\varphi|\,|\psi f| + \psi_3\overline{|f\varphi|}^2 = 0. \right.$$

2. Examinons dans quels cas, les fonctions f_i, φ_i, ψ_i étant des polynomes du 1er ou du 2me degré, la dernière équation écrite pourra être quadratique, c'est à dire du second degré par rapport à l'ensemble des variables α_1, α_2 et α_3. Pour cela représentons par

λ le degré des polynomes $|\varphi\psi|$ et $|\psi f|$,
μ „ „ „ „ $|f\varphi|$,
ν „ „ „ „ f_3 et φ_3,
π „ „ „ „ ψ_3.

On voit que les deux premiers termes seront du degré 2λ, les deux suivants du degré $\lambda + \mu + \nu$ et le dernier du degré $2\mu + \pi$. Pour que l'équation soit quadratique il faudra donc que l'on ait

$$2\lambda \leq 2, \quad \lambda + \mu + \nu \leq 2, \quad 2\mu + \pi \leq 2,$$

ν et π ne pouvant d'ailleurs être nuls à la fois puis qu' alors α_3 disparaitrait de l'équation donnée. Ces conditions ne peuvent être réalisées que dans les trois hypothèses

$$\lambda = 1, \quad \mu = 0, \quad \nu = 1, \quad \pi = 2,$$
$$\lambda = 0, \quad \mu = 1, \quad \nu = 1, \quad \pi = 0,$$
$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 2, \quad \pi = 2,$$

qui donnent respectivement

$$2\lambda = 2, \quad \lambda + \mu + \nu = 2, \quad 2\mu + \pi = 2,$$

au

$$2\lambda = 0, \quad \lambda + \mu + \nu = 2, \quad 2\mu + \pi = 2.$$

Nous allons faire voir que les deux dernières hypothèses doivent être écartées. Prenant, en effet, les polynomes $f_1, \varphi_1, \psi_1, f_2, \varphi_2, \psi_2$ du premier degré (car s'ils se réduisaient à des constantes les variables α_1 et α_2 disparaitraient de l'équation) cherchons à faire en sorte que les polynomes $|\varphi\psi|$ et $|\psi f|$ se réduisent à des constantes. Si nous posons d'une manière générale:

$$f_i = m_i\alpha_i + n_i, \quad \varphi_i = p_i\alpha_i + q_i, \quad \psi_i = r_i\alpha_i + s_i,$$

nous voyons que la condition requise sera remplie si l'on a

$$3) \qquad m_1r_2 - m_2r_1 = 0,$$
$$4) \qquad p_1r_2 - p_2r_1 = 0,$$
$$5) \qquad m_1s_2 - m_2s_1 = 0,$$
$$6) \qquad n_1r_2 - n_2r_1 = 0,$$
$$7) \qquad p_1s_2 - q_2r_1 = 0,$$
$$8) \qquad q_1r_2 - p_2s_1 = 0.$$

De 3) et 4) on tire

$$9) \qquad \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Si dans 6) et 8) on remplace m_2, p_2, r_2 par les quantités proportionnelles tirées de 9), on a

$$10) \qquad n_1r_1 - m_1s_1 = 0,$$
$$11) \qquad q_1r_1 - p_1s_1 = 0.$$

Les équations 5) et 10) donnent alors

$$\frac{m_1}{r_1} = \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2}{s_2}$$

et de même 7) et 11)

$$\frac{p_1}{r_1} = \frac{q_1}{s_1} = \frac{q_2}{s_2}.$$

Ces deux dernières suites d'égalités donnent à leur tour

$$12) \qquad \frac{n_1}{n_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{s_1}{s_2},$$

et

$$13) \qquad \frac{m_1}{n_1} = \frac{p_1}{q_1} = \frac{r_1}{s_1}.$$

Remplaçant enfin dans cette dernière suite d'égalités m_1, p_1, r_1 et n_1, q_1, s_1 par les quantités proportionnelles tirées respectivement de 9) et de 12), on a

$$14) \qquad \frac{m_2}{n_2} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{r_2}{s_2}.$$

Les trois doubles proportions 9), 13) et 14) constituent un système qui pourrait être substitué à celui que forment les équations de 3) à 8).

Si nous supposons d'abord les divers coefficients non nuls, nous voyons que les égalités 9) et 12) établissent que les faisceaux α_1) et α_2) ont même point de convergence, les égalités 13) et 14) que ce

point est à l'infini. Quelles que soient les valeurs attribuées à α_1 et à α_2 les droites cotées correspondantes se couperaient en ce point situé à l'infini. L'emploi de l'abaque deviendrait illusoire.

Pourrait on maintenant satisfaire au système formé par 9), 13) et 14) au moyen de valeurs nulles pour certains coefficients? Une première manière consisterait à supposer nuls les deux termes d'un des rapports entrant dans 9), par exemple $m_1 = m_2 = 0$; mais alors, en vertu de 13) et 14) on devrait avoir aussi $n_1 = n_2 = 0$ et les systèmes α_1) et α_2) seraient encore parallèles entre eux, hypothèse inadmissible, comme on vient de le voir.

Une seconde manière consisterait à annuler à la fois les termes se correspondant dans une des doubles proportions, comme

$$m_1 = p_1 = r_1 = 0 \quad \text{ou} \quad n_1 = q_1 = s_1 = 0,$$

mais alors la variable correspondante α_1 disparaitrait de l'équation.

Les deux hypothèses pour lesquelles $\lambda = 0$ doivent donc être écartées, et il ne reste que la première ci-dessus que nous allons étudier en détail.

3. La condition $\lambda = 1$ entraine les égalités 3) et 4) ci-dessus réunies en 9) d'où on tire encore

15) $$m_1 p_2 - m_2 p_1 = 0.$$

La condition $\mu = 0$ entraine précisément cette égalité 15), plus

16) $$m_1 q_2 - n_2 p_1 = 0,$$

17) $$n_1 p_2 - m_2 q_1 = 0.$$

Remplaçant dans 17) m_2 et p_2 par les quantités proportionnelles tirees de 9) on a

18) $$n_1 p_1 - m_1 q_1 = 0.$$

De 16) et 18) on tire

19) $$\frac{m_1}{p_1} = \frac{n_1}{q_1} = \frac{n_2}{q_2},$$

et si on tire de là des quantités proportionnelles à n_1 et à q_1 pour les porter dans 17) on a

20) $$n_2 p_2 - m_2 q_2 = 0.$$

Les égalités 18) et 20) peuvent être substituées à 16) et 17) pour former avec 9) l'ensemble des conditions exigées par l'hypothèse $\lambda = 1$, $\mu = 0$. Ces égalités expriment que les centres des faisceaux α_1) et α_2) sont rejetés à l'infini, mais ici dans des directions différentes.

Supposons que l'on y satisfasse par des valeurs non nulles. On tirera alors de 19) l'égalité:

$$n_1 q_2 - n_2 q_1 = 0$$

qui jointe à 15), 16) et 17) montre que $|f\varphi|$ devient identiquement nul, hypothèse inadmissible car alors la variable α_3 n'entrerait plus dans l'équation 2bis).

On ne peut donc ici satisfaire aux égalité 9), 18) et 20) qu'en prenant
$$m_1 = m_2 = p_1 = p_2 = 0.$$

Comme en outre, les coefficients r_1 et r_2 sont nécessaiment différents de zéro, puisque, s'il n'en était pas ainsi, α_1 et α_2 disparaitraient des équations α_1) et α_2), on pourra prendre $r_1 = r_2 = 1$.

En résumé, l'équation 2bis) sera quadratique lorsque à α_1 et à α_2 correspondront les systèmes de droites parallèles

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_1)_1 & n_1 x + q_1 y + s_1 + \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2)_1 & n_2 x + q_2 y + s_2 + \alpha_2 = 0 \end{array}\right\}(\text{avec } n_1 q_2 - n_2 q_1 \neq 0).$$

et à α_3 le système de cercles.

$$\alpha_3)_1 \quad x^2 + y^2 + (m_3\alpha_3 + n_3)x + (p_3\alpha_3 + q_3)y + t_3\alpha_3^2 + r_3\alpha_3 + s_3 = 0.$$

Remarquons que les centres de ces cercles, dont les coordonnées résultent des équations
$$2x + m_3\alpha_3 + n_3 = 0,$$
$$2y + p_3\alpha_3 + \varphi_3 = 0,$$
se trouvent sur la droite
$$2p_3 x - 2m_3 y + n_3 p_3 - m_3 q_3 = 0.$$

L'enveloppe de ces cercles est la conique
$$(m_3 x + p_3 y + r_3)^2 - 4t_3(x^2 + y^2 + n_3 x + q_3 y + s_3) = 0,$$
à laquelle ils sont bitangents, ce qui montre que la droite précédente est un axe de cette conique.

4. On peut se demander si inversement toute équation quadratique telle que

$$Q)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1\alpha_1^2 + A_2\alpha_2^2 + A_3\alpha_3^2 + 2B_1\alpha_2\alpha_3 + 2B_2\alpha_3\alpha_1 + 2B_3\alpha_1\alpha_2 \\ \qquad + 2C_1\alpha_1 + 2C_2\alpha_2 + 2C_3\alpha_3 + D = 0 \end{array}\right.$$

est susceptible d'être ainsi représentée.

Pour nous en rendre compte éliminons α_1 et α_2 entre les équations $\alpha_1)_1$, $\alpha_2)_1$ et Q) et cherchons s'il est possible de déterminer pour les coefficients des deux premières des valeurs réelles telles que l'équation quadratique en x et y résultante représente un cercle.

Si on tire α_1 et α_2 des équations $\alpha_1)_1$ et $\alpha_2)_1$ ci-dessus pour les porter dans l'équation Q), on obtient en égalant entre eux les coefficients des termes en x^2 et y^2 de l'équations obtenue et annulant celui du terme en xy, les équations:

$$A_1 n_1^2 + A_2 n_2^2 + 2B_3 n_1 n_2 = A_1 q_1^2 + A_2 q_2^2 + 2B_3 q_1 q_2,$$
$$A_1 n_1 q_1 + A_2 n_2 q_2 + B_3(n_1 q_2 + n_2 q_1) = 0.$$

De la seconde on tire
$$q_2 = -q_1 \frac{A_1 n_1 + B_3 n^2}{A_2 n_2 + B_3 n_1}.$$

Portant dans la précédente, on trouve, après réduction,
$$q_1^2 = \frac{(A_2 n_2 + B_3 n_1)^2}{A_1 A_2 - B_3^2}.$$

Le numérateur de cette fraction étant positif on voit que la réalité de q_1 exige

21) $$A_1 A_2 - B_3^2 > 0.$$

Comme on peut permuter entre eux les indices affectés aux trois variables, on voit que la condition de réalité peut s'exprimer ainsi: si, dans l'équation Q), les variables α_1, α_2 et α_3 sont considérées comme les coordonnées courantes d'un point de l'espace, il faut que la section par l'un des plans de coordonnées de la quadrique définie par cette équation soit du genre elliptique.

Supposant la condition remplie on a

22) $$q_1 = \pm \frac{A_2 n_2 + B_3 n_1}{\sqrt{A_1 A_2 - B_3^2}}$$

et, par suite,

23) $$q_2 = \mp \frac{A_1 n_1 + B_3 n_2}{\sqrt{A_1 A_2 - B_3^2}}.$$

Le choix de n_1 et n_2 est libre, à cette seule réserve près qu'on ne saurait prendre à la fois $n_1 = n_2 = 0$, parce qu' alors q_1 et q_2 étant nuls aussi, les deux faisceaux de droites α_1) et α_2) seraient tout entiers rejetés à l'infini.

Quant à s_1 et s_2, qui n'entrent pas dans les équations de condition, on peut les choisir arbitrairement. Nous prendrous $s_1 = s_2 = 0$.

Dès lors, n_1 et n_2 étans quelconques mais non nuls à la fois, q_1 et q_2 ayant les valeurs 22) et 23), et l'inégalité de condition 21) étant satisfaite, on pourra représenter l'équation Q) au moyen d'un diagramme coté on abaque constitué par les systèmes de droites

$\alpha_1)_2$ $$n_1 x + q_1 y + \alpha_1 = 0,$$

$\alpha_2)_2$ $$n_2 x + q_2 y + \alpha_2 = 0,$$

et le système de cercles

$\alpha_3)_2$ $$\left\{\begin{aligned} &(A_1 n_1^2 + A_2 n_2^2 + 2 B_3 n_1 n_2)(x^2 + y^2) \\ &\qquad - 2[(B_1 n_2 + B_2 n_1)\alpha_3 + C_1 n_1 + C_2 n_2]x \\ &\qquad - 2[(B_1 q_2 + B_2 q_1)\alpha_3 + C_1 q_1 + C_2 q_2]y \\ &\qquad + A_3 \alpha_3^2 + 2 C_3 \alpha_3 + D = 0. \end{aligned}\right.$$

Nous terminerons par la remarque que voici: Puisque les cercles α_3) ont leurs centres en ligne droite, on doit pouvoir, en prenant cette droite connue axe des y, faire en sorte que l'équation de ces cercles ne contienne pas de terme en x. Or, il semble ne pas pouvoir en être ainsi dans le cas général, puisque nous venons de voir que n_1 et n_2 ne sauraient être nuls à la fois. Mais cette contradiction n'est qu'apparente. Il ne faut pas oublier, en effet, que nous avons pris $s_1 = s_2 = 0$. En rétablissant pour l'un de ces coefficients une valeur quelconque on verrait que l'on peut en disposer de façon à annuler le coefficient du terme en x.

5. Le calcul effectué au n° 1 permet encore d'obtenir la forme des équations représentables au moyen de trois points cotés pris respectivement dans trois systèmes α_1), α_2), α_3), et qui se trouvent simultanément sur un cercle de rayon R tracé sur un transparent mobile.

Si, en effet, le point α_i) est défini par les coordonnée

$$x = f_i, \quad y = \varphi_i,$$

où f_i et φ_i désignent, comme précédemment, des fonctions de α_i, on doit avoir, en désignant par ξ et η les coordonnées du centre mobile, les trois équations:

$$(f_i - \xi)^2 + (\varphi_i - \eta)^2 = R^2 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ou

$$\xi^2 + \eta^2 - 2f_i\xi - 2\varphi_i\eta + f_i^2 + \varphi_i^2 - R^2 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Pour éliminer ξ et η entre ces trois équations, il suffit, après avoir posé d'une manière générale

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = |a_i b_i c_i|,$$

et en remarquant que

$$|1 \ \ a_i \ \ f_i^2 + \varphi_i^2 - R^2| = |1 \ \ a_i \ \ f_i^2 + \varphi_i^2|,$$

d'appliquer l'équation 1) du n° 1, ce qui donne

$$\overline{|1 \ \ -2\varphi_i \ \ f_i^2 + \varphi_i^2|}^2 + \overline{|-2f_i \ \ 1 \ \ f_i^2 + \varphi_i^2|}^2$$
$$+ |-2f_i \ \ -2\varphi_i \ \ 1| \, |-2f_i \ \ -2\varphi_i \ \ f_i^2 + \varphi_i^2 - R^2| = 0$$

ou

$$24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{|1 \varphi_i \ \ f_i^2 + \varphi_i^2|}^2 + \overline{|f_i \ \ 1 \ \ f_i^2 + \varphi_i^2|}^2 + 4|f_i \ \ \varphi_i \ \ 1| \\ \qquad [|f_i \ \ \varphi_i \ \ f_i^2 + \varphi_i^2| - R^2 |f_i \ \ \varphi_i \ \ 1|] = 0, \end{array} \right.$$

qu'on peut encore écrire, en posant

$$f_i^2 + \varphi_i^2 = \psi_i,$$

et employant la notation abrégée du n° 1,

$$D_f^2 + D_\varphi^2 + 4D_\psi(D - R^2 D_\psi) = 0.$$

En particulier, si les points α_1) et α_2) sont distribués sur Ox et les points α_3) sur Oy, cette équation, toutes réductions faites, prend la forme simple

$$\varphi_3^2[(f_1 + f_2)^2 - 4R^2] + (\varphi_3^2 - f_1 f_2)^2 = 0.$$

On peut même supposer que le transparent porte une série de cercles concentriques donc le rayon R soit fonction d'un quatrième paramètre α_4. La forme correspondante de l'équation représentée s'obtient en remplaçant R par f_4.

Enfin si R devient infini l'équation 24) se réduit à

$$|f_i \varphi_i \ \ 1| = 0,$$

et on retombe sur la méthode des points alignés que nous avons signalée ailleurs.*

* Nomogaphie, Paris 1891, chap. IV.

Über die automorphe Transformation einer Summe von Quadraten mit Hilfe infinitesimaler Transformationen und höherer komplexer Zahlen.

Von

Professor Beez

in Plauen i. V.

Schluss.

§ 3.

Die automorphe Transformation einer Summe von vier Quadraten.

Um die Summe von vier Quadraten in sich selbst zu transformieren, hat man in den Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} x_0' = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3, \\ x_1' = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' = a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

die Koeffizienten a_{ik} mit Hilfe von sechs unabhängigen Parametern so zu bestimmen, dass

$$2)\quad \sum_i a_{i\varkappa}^2 = 1, \quad \sum_i a_{i\varkappa} a_{il} = 0, \qquad i, \varkappa, l = 0, 1, 2, 3.$$

Die identische Transformation tritt ein bei

$$a_{00} = a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1, \quad a_{i\varkappa} = 0, \quad i \gtrless \varkappa;$$

durch Variation der Gleichungen 1) mit Berücksichtigung von 2), bei welchen

$$\delta a_{ii} = 0, \quad \delta a_{i\varkappa} + \delta a_{\varkappa i} = 0, \quad \varkappa \gtrless i$$

wird, findet man:

$$3)\quad \begin{cases} \delta x_0 = \phantom{-x_0\delta a_{01}} x_1 \delta a_{01} + x_2 \delta a_{02} + x_3 \delta a_{03}, \\ \delta x_1 = - x_0 \delta a_{01} + x_2 \delta a_{12} + x_3 \delta a_{13}, \\ \delta x_2 = - x_0 \delta a_{02} - x_1 \delta a_{12} + x_3 \delta a_{23}, \\ \delta x_3 = - x_0 \delta a_{03} - x_1 \delta a_{13} - x_2 \delta a_{23}. \end{cases}$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} \delta a_{01} = \lambda_1 \delta t, \quad \delta a_{02} = \lambda_2 \delta t, \quad \delta a_{03} = \lambda_3 \delta t, \\ \delta a_{12} = \lambda_4 \delta t, \quad \delta a_{13} = \lambda_5 \delta t, \\ \delta a_{23} = \lambda_6 \delta t, \end{aligned}$$

wo die λ sechs von einander unabhängige Parameter bedeuten, so gehen die Gleichungen 3) über in:

$$4)\quad \begin{cases} \delta x_0 = (\quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)\delta t, \\ \delta x_1 = (-\lambda_1 x_0 + \lambda_4 x_2 + \lambda_5 x_3)\delta t, \\ \delta x_2 = (-\lambda_2 x_0 - \lambda_4 x_1 + \lambda_6 x_3)\delta t, \\ \delta x_3 = -(\lambda_3 x_0 + \lambda_5 x_1 + \lambda_6 x_2)\delta t. \end{cases}$$

Die Variation einer beliebigen Funktion $f(x_0, x_1, x_2, x_3, t)$ ergiebt sich alsdann:

$$5)\quad \delta f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_0}\frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} \right\}\delta t.$$

Hieraus findet sich mit Berücksichtigung von 4) das Symbol der allgemeinen infinitesimalen Transformation φf:

$$6)\quad \begin{cases} \varphi f = \dfrac{df}{dt} = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)\dfrac{\partial f}{\partial x_0} + (-\lambda_1 x_0 + \lambda_4 x_2 + \lambda_5 x_3)\dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \qquad + (-\lambda_2 x_0 - \lambda_4 x_1 + \lambda_6 x_3)\dfrac{\partial f}{\partial x_2} - (\lambda_3 x_0 + \lambda_5 x_1 + \lambda_6 x_2)\dfrac{\partial f}{\partial x_3}, \end{cases}$$

oder nach den willkürlichen Parametern geordnet:

$$7)\quad \begin{cases} \varphi f = \lambda_1\left(x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_0} - x_0 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right) + \lambda_2\left(x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_0} - x_0 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \lambda_3\left(x_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_0} - x_0 \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right) \\ \quad + \lambda_4\left(x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \lambda_5\left(x_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right) + \lambda_6\left(x_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right). \end{cases}$$

Die allgemeine infinitesimale Transformation φf ist also aus den folgenden sechs speziellen Transformationen zusammengesetzt:

$$8)\quad \begin{cases} \varphi_1 f = x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_0} - x_0 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \\ \varphi_2 f = x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_0} - x_0 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \\ \varphi_3 f = x_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_0} - x_0 \dfrac{\partial f}{\partial x_3} \\ \varphi_4 f = x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \\ \varphi_5 f = x_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_3}, \\ \varphi_6 f = x_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_3}. \end{cases}$$

Diese sechs infinitesimalen Transformationen bilden eine sechsgliedrige Gruppe, denn für beliebige i und $\varkappa$ ist:

$$(\varphi_i \varphi_k) = \sum_1^6{}_s c_{i\varkappa s} \varphi_s,$$

insbesondere:

$$\begin{aligned}
&(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_4, \quad (\varphi_1\varphi_3) = \varphi_5, \quad (\varphi_1\varphi_4) = -\varphi_2, \quad (\varphi_1\varphi_5) = -\varphi_3, \quad (\varphi_1\varphi_6) = 0,\\
&\qquad (\varphi_2\varphi_3) = \varphi_6, \quad (\varphi_2\varphi_4) = \varphi_1, \quad (\varphi_2\varphi_5) = 0, \quad (\varphi_2\varphi_6) = -\varphi_3,\\
&\qquad\qquad (\varphi_3\varphi_4) = 0, \quad (\varphi_3\varphi_5) = \varphi_1, \quad (\varphi_3\varphi_6) = \varphi_2,\\
&\qquad\qquad\qquad (\varphi_4\varphi_5) = \varphi_6, \quad (\varphi_4\varphi_6) = -\varphi_5,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (\varphi_5\varphi_6) = \varphi_4.
\end{aligned}$$

Durch sie wird eine sechsgliedrige Gruppe von endlichen Transformationen erzeugt, die nicht mit einander vertauscht werden können, da nicht alle $(\varphi_i\varphi_\varkappa) = 0$ sind. Zur Auffindung dieser endlichen Transformationen benutzen wir wiederum die drei verschiedenen Methoden, welche wir bereits bei der automorphen Transformation zweier oder dreier Quadrate in Anwendung gebracht haben.

I. Setzen wir $t = 1$, so erhalten wir eine kanonische Form der endlichen Transformation:

$$x_i' = x_i + \varphi x_i + \frac{1}{1\cdot 2}\varphi^2 x_i + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\varphi^3 x_i + \cdots$$

Nun ist für $i = 0$:

$$10)\quad \begin{cases}
\varphi x_0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3,\\
\varphi^2 x_0 = -(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)x_0 - (\lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_5)x_1 + (\lambda_1\lambda_4 - \lambda_3\lambda_6)x_2\\
\qquad\qquad + (\lambda_1\lambda_5 + \lambda_2\lambda_6)x_3,\\
\varphi^3 x_0 = -h^2\varphi x_0 + f^2\varphi' x_0,
\end{cases}$$

worin

$$h^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2, \quad f^2 = \lambda_1\lambda_6 - \lambda_2\lambda_5 + \lambda_3\lambda_4,$$

$$\varphi' x_0 = \lambda_6 x_1 - \lambda_5 x_2 + \lambda_4 x_3,$$

$$\begin{aligned}
\varphi^4 x_0 &= -h^2\varphi^2 x_0 - f^4 x_0,\\
\varphi^5 x_0 &= (h^4 - f^4)\varphi x_0 - h^2 f^2 \varphi' x_0,\\
\varphi^6 x_0 &= (h^4 - f^4)\varphi^2 x_0 + h^2 f^4 x_0,\\
\varphi^7 x_0 &= -(h^6 - 2h^2 f^4)\varphi x_0 + (h^4 - f^4) f^2 \varphi' x_0,\\
\varphi^8 x_0 &= -(h^6 - 2h^2 f^4)\varphi^2 x_0 - (h^4 - f^4) f^4 x_0,\\
\varphi^9 x_0 &= (h^8 - 3h^4 f^4 + f^8)\varphi x_0 - (h^6 - 2h^2 f^4) f^2 \varphi' x_0,\\
\varphi^{10} x_0 &= (h^8 - 3h^4 f^4 + f^8)\varphi^2 x_0 + (h^6 - 2h^2 f^4) f^4 x_0.
\end{aligned}$$

Setzt man nun:

$$1 - \frac{h^2}{3!} + \frac{h^4 - f^4}{5!} - \frac{h^6 - 2h^2 f^4}{7!} + \frac{h^8 - 3h^4 f^4 + f^8}{9!} - \cdots = \alpha,$$

$$\frac{1}{2!} - \frac{h^2}{4!} + \frac{h^4 - f^4}{6!} - \frac{h^6 - 2h^2 f^4}{8!} + \frac{h^8 - 3h^4 f^4 + f^8}{10!} - \cdots = \beta,$$

$$f^2\left(\frac{1}{3!} - \frac{h^2}{5!} + \frac{h^4 - f^4}{7!} - \frac{h^6 - 2h^2 f^4}{9!} + \frac{h^8 - 3h^4 f^4 + f^8}{11!} - \cdots\right) = \gamma,$$

$${}^4\left(-\frac{1}{4!} + \frac{h^2}{6!} - \frac{h^4 - f^4}{8!} + \frac{h^6 - 2h^2 f^4}{10!} - \frac{h^8 - 2h^4 f^4 + f^8}{12!} + \cdots\right) = \delta,$$

so wird:

$$x'_0 = x_0 + \alpha\varphi x_0 + \beta\varphi^2 x_0 + \gamma\varphi' x_0 + \delta x_0,$$

worin φx_0, $\varphi^2 x_0$, $\varphi' x_0$ die in 10) angegebene Bedeutung haben. Durch Einführung dieser Werte wird:

$$11)\quad \begin{cases} x_0' = x_0[1+\delta-\beta(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)] + x_1[\alpha\lambda_1 - \beta(\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_5)+\gamma\lambda_6] \\ \quad + x_2[\alpha\lambda_2+\beta(\lambda_1\lambda_4-\lambda_3\lambda_6)-\gamma\lambda_5] + x_3[\alpha\lambda_3+\beta(\lambda_1\lambda_5+\lambda_2\lambda_6)+\gamma\lambda_4]. \end{cases}$$

Setzt man hierin:

$$\lambda_1 = a,\ \ \lambda_2 = b,\ \ \lambda_3 = c,\ \ \lambda_4 = h,\ \ \lambda_5 = -g,\ \ \lambda_6 = f,\ \ \alpha = -2\omega,\ \ \gamma = -2\vartheta,$$
$$\omega^2 + a^2 + b^2 + c^2 + h^2 + g^2 + f^2 + \vartheta^2 = 1$$

und nimmt an — was noch zu beweisen ist — dass

$$\beta = 2, \quad \delta = -2\vartheta^2$$

sei, so kommt:

$$12_0)\quad \begin{cases} x_0' = [(\omega^2-\vartheta^2)+(f^2-a^2)+(g^2-b^2)+(h^2-c^2)]x_0 \\ \qquad + 2(-a\omega - f\vartheta + cg - bh)x_1 \\ \qquad + 2(-b\omega - cf - g\vartheta + ah)x_2 \\ \qquad + 2(-c\omega + bf - ag - h\vartheta)x_2. \end{cases}$$

Ebenso erhält man

$$x_1' = x_1 + \alpha\varphi x_1 + \beta\varphi^2 x_1 - \gamma\varphi' x_1 + \delta x_1$$

Setzt man hierin für φx_1, $\varphi^2 x_1$, $\varphi' x_1$ ihre Werte:

$$\begin{cases} \varphi x_1 = -\lambda_1 x_0 + \lambda_4 x_2 + \lambda_5 x_3, \\ \varphi^2 x_1 = -x_0(\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_5) - x_1(\lambda_1^2+\lambda_4^2+\lambda_5^2) \\ \qquad\quad - x_2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_5\lambda_6) + x_3(-\lambda_1\lambda_3+\lambda_4\lambda_6), \\ \varphi' x_1 = \quad \lambda_6 x_0 - \lambda_3 x_2 + \lambda_2 x_3, \end{cases}$$

so kommt:

$$\begin{aligned} x_1 = x_0[-\alpha\lambda_1 - \beta(\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_5) - \gamma\lambda_6] + x_1[1+\delta-\beta(\lambda_1^2+\lambda_4^2+\lambda_5^2)] \\ + x_2[\alpha\lambda_4 - \beta(\lambda_1\lambda_2+\lambda_5\lambda_6) + \gamma\lambda_3] \\ + x_3[\alpha\lambda_5 + \beta(-\lambda_1\lambda_3+\lambda_4\lambda_6) - \gamma\lambda_2], \end{aligned}$$

und nach Einsetzung der Werte von α, β, γ, δ:

$$12_1)\quad \begin{cases} x_1' = 2(a\omega + f\vartheta - bh + cg)x_0 + [(\omega^2-\vartheta^2)+(f^2-a^2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -(g^2-b^2)-(h^2-c^2)]x_1 \\ \qquad + 2(-h\omega + fg - ab - c\vartheta)x_2 + 2(g\omega + fh + b\vartheta - ca)x_3. \end{cases}$$

Desgleichen:

$$x_2' = x_2 + \alpha\varphi x_2 + \beta\varphi^2 x_2 + \gamma\varphi' x_3 + \delta x_2,$$

worin

$$\varphi x_2 = -\lambda_2 x_0 - \lambda_4 x_1 + \lambda_6 x_3,$$
$$\varphi^2 x_2 = (\lambda_1\lambda_4 - \lambda_3\lambda_6)x_0 - (\lambda_1\lambda_2+\lambda_5\lambda_6)x_1 - (\lambda_2^2+\lambda_4^2+\lambda_6^2)x_2$$
$$\qquad - (\lambda_2\lambda_3 + \lambda_4\lambda_5)x_3,$$
$$\varphi x_2' = \lambda_5 x_0 - \lambda_3 x_1 + \lambda_1 x_3.$$

Hieraus weiter:

$$12_2)\quad\left\{\begin{aligned} x'_2 = {} & x_0[-\alpha\lambda_2+\beta(\lambda_1\lambda_4-\lambda_3\lambda_6)+\gamma\lambda_5] \\ & +x_1[-\alpha\lambda_4-\beta(\lambda_1\lambda_2+\lambda_5\lambda_6)-\gamma\lambda_3] \\ & +x_2[1+\delta-\beta(\lambda_2^2+\lambda_4^2+\lambda_6^2)] \\ & +x_3[\alpha\lambda_6-\beta(\lambda_2\lambda_3+\lambda_4\lambda_5)+\gamma\lambda_1] \\ = {} & 2(b\omega+g\vartheta-cf+ah)x_0+2(h\omega+fg+c\vartheta-ab)x_1 \\ & +[(\omega^2-\vartheta^2)-(f^2-a^2)+(g^2-b^2)-(h^2-c^2)]x_2 \\ & +2(-f\omega+gh-bc-a\vartheta)x_3. \end{aligned}\right.$$

Endlich:

$$\begin{aligned} x'_3 &= x_3+\alpha\varphi x_3+\beta\varphi^2x_3-\gamma\varphi' x_3+\delta x_3, \\ \varphi x_3 &= -(\lambda_3x_0+\lambda_5x_1+\lambda_6x_2), \\ \varphi^2x_3 &= (\lambda_1\lambda_5+\lambda_2\lambda_6)x_0+(-\lambda_1\lambda_3+\lambda_4\lambda_6)x_1-(\lambda_2\lambda_3+\lambda_4\lambda_5)x_2 \\ & \qquad -(\lambda_3^2+\lambda_5^2+\lambda_6^2)x_3 \\ \varphi' x_3 &= \lambda_4x_0-\lambda_2x_1+\lambda_1x_2. \end{aligned}$$

Dies giebt:

$$12_3)\quad\left\{\begin{aligned} x_3' = {} & x_0[-\alpha\lambda_3+\beta(\lambda_1\lambda_5+\lambda_2\lambda_6)-\gamma\lambda_4] \\ & +x_1[-\alpha\lambda_5+\beta(-\lambda_1\lambda_3+\lambda_4\lambda_6)+\gamma\lambda_2] \\ & +x_2[-\alpha\lambda_6-\beta(\lambda_2\lambda_3+\lambda_4\lambda_5)-\gamma\lambda_1] \\ & +x_3[1+\delta-\beta(\lambda_3^2+\lambda_5^2+\lambda_6^2)] \\ = {} & 2(c\omega+h\vartheta-ag+bf)x_0+2(-g\omega+fh-ac-b\vartheta)x_1 \\ & +2(f\omega+gh+a\vartheta-bc)x_2 \\ & +[(\omega^2-\vartheta^2)-(f^2-a^2)-(g^2-b^2)+(h^2-c^2)]x_3. \end{aligned}\right.$$

Es ist mir nicht gelungen die unendlichen Reihen für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in geschlossene Ausdrücke umzusetzen. Dass $\alpha = -2\omega$, $\gamma = -2\vartheta$ als neue überzählige Parameter eingeführt werden, ist jedenfalls gestattet.*

Dagegen ist nicht bewiesen, dass $\beta = 2$ und $\delta = -2\vartheta^2$ gesetzt werden darf. Zu der Annahme $\beta = 2$ wird man leicht geführt, wenn man den speziellen Fall $f = 0$, also auch $\gamma = 0$, $\delta = 0$ in Betracht zieht. Dann wird:

$$\alpha = 1-\frac{h^2}{3!}+\frac{h^4}{5!}-\frac{h^6}{7!}+\cdots = \frac{\sin h}{h}$$

$$\beta = \frac{1}{2!}-\frac{h^2}{4!}+\frac{h^4}{6!}+\cdots = \frac{1-\cos h}{h^2}.$$

Durch Einführung von $\frac{h}{2}$ wird hieraus:

$$13)\qquad \alpha = \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{h}{2}}{h}, \quad \beta = \frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h^2}.$$

---

* Siehe diese Zeitschrift Jahrgang 41, S. 82.

Wenn $\gamma = 0$, $\delta = 0$ ist, so entsteht aus 11):

$$14)\quad \begin{cases} x'_0 = x_0[1-\beta(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)] + x_1[\alpha\lambda_1 - \beta(\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_5)] \\ \qquad\qquad + x_2[\alpha\lambda_2 + \beta(\lambda_1\lambda_4 - \lambda_3\lambda_6)] \\ \qquad\qquad + x_3[\alpha\lambda_3 + \beta(\lambda_1\lambda_5 + \lambda_2\lambda_6)]. \end{cases}$$

Führt man in diese Gleichung die Werte von α und β aus 13) ein und setzt:

$$\cos\frac{1}{2}h = -\omega,\quad \frac{\lambda_1}{h}\sin\frac{1}{2}h = a,\quad \frac{\lambda_2}{h}\sin\frac{1}{2}h = b,$$
$$\frac{\lambda_3}{h}\sin\frac{1}{2}h = c,\quad \frac{\lambda_4}{h}\sin\frac{1}{2}h = h,\quad \frac{\lambda_5}{h}\sin\frac{1}{2}h = -g,$$
$$\frac{\lambda_6}{h}\sin\frac{1}{2}h = f,$$

so kommt

$$15)\quad \begin{cases} x'_0 = x_0[1-2(a^2+b^2+c^2)] + 2x_1(-a\omega - bh + cg) \\ \qquad\qquad + 2x_2(-b\omega + ah - cf) \\ \qquad\qquad + 2x_3(-c\omega - ag + bf)], \end{cases}$$

welche Gleichung auch ohne weiteres aus 14) abgeleitet werden kann, sobald man $\alpha = -2\omega$, $\beta = 2$ darin substituiert. Aus 12_0) entsteht die Gleichung 15), sobald dort $\vartheta = 0$ gesetzt wird.

II. Bei Anwendung der zweiten Integrationsmethode hat man die Differentialgleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_0'}{\lambda_1 x_1'+\lambda_2 x_2'+\lambda_3 x_3'} = \dfrac{dx_1'}{-\lambda_1 x_0'+\lambda_4 x_2'+\lambda_5 x_3'} = \dfrac{dx_2'}{-\lambda_2 x_0'-\lambda_4 x'_1+\lambda_6 x'_3} \\ \qquad = -\dfrac{dx_3'}{\lambda_3 x_0'+\lambda_5 x_1'+\lambda_6 x_2'} = dt \end{cases}$$

so zu integrieren, dass für $t = 0 \ldots x_0' = x_0$, $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3$ werde. Man hat zu diesem Zwecke drei von t unabhängige Integrale aufzustellen, welche zugleich Lösungen der partiellen Differentialgleichung:

$$2)\quad \begin{cases} (\lambda_1 x_1'+\lambda_2 x_2'+\lambda_3 x_3')\dfrac{\partial f}{\partial x'_0} + (-\lambda_1 x_0' + \lambda_4 x_2' + \lambda_5 x_3')\dfrac{\partial f}{\partial x'_1} \\ \qquad + (-\lambda_2 x_0' - \lambda_4 x_1' + \lambda_6 x_3')\dfrac{\partial f}{\partial x'_2} \\ \qquad - (\lambda_3 x_0' + \lambda_5 x_1' + \lambda_6 x_2')\dfrac{\partial f}{\partial x'_3} = 0 \end{cases}$$

sein werden. Ein solches Integral oder eine solche Lösung ist:

$$3)\quad x_0'^2 + x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = c.$$

Eine Lösung in linearer Form, etwa

$$4)\quad e_0x_0' + e_1x_1' + e_2x_2' + e_3x_3' = c',$$

worin die e homogene, symmetrische Funktionen der λ_i sein müssten, existiert nicht, denn dann wäre:

$$5)\quad \begin{cases} (\lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \lambda_3 x_3')e_0 + (-\lambda_1 x_0' + \lambda_4 x_2' + \lambda_5 x_3')e_1 \\ \qquad + (-\lambda_2 x_0' - \lambda_4 x_1' + \lambda_6 x_3')e_2 \\ \qquad - (\lambda_3 x_0' + \lambda_5 x_1' + \lambda_6 x_2')e_3 = 0, \end{cases}$$

folglich müssten die e den Gleichungen:

$$6)\quad\left\{\begin{array}{llll} . & -\lambda_1 e_1 & -\lambda_2 e_2 & -\lambda_3 e_3 = 0, \\ \lambda_1 e_0 & . & -\lambda_4 e_2 & -\lambda_5 e_3 = 0, \\ \lambda_2 e_0 & +\lambda_4 e_1 & . & -\lambda_6 e_3 = 0, \\ \lambda_3 e_0 & +\lambda_5 e_1 & +\lambda_6 e_2 & . \quad = 0 \end{array}\right.$$

genügen, was nur dann möglich ist, wenn die Determinante:

$$7)\quad\begin{vmatrix} 0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & -\lambda_4 & -\lambda_5 \\ \lambda_2 & \lambda_4 & 0 & -\lambda_6 \\ \lambda_3 & \lambda_5 & \lambda_6 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda_1\lambda_6 - \lambda_2\lambda_5 + \lambda_3\lambda_4)^2 = f^4$$

verschwindet. In diesem Falle verschwinden aber auch sämtliche e. Es scheint demnach die Integration der Gleichungen 1), so lange die λ sämtlich von einander unabhängig sind, unmöglich zu sein.

III. Um endlich die dritte Methode der Integration — die Methode von D'Alembert — anwenden zu können, hat man das simultane System:

$$1)\quad\left\{\begin{aligned} \frac{dx_0'}{dt} &= \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \lambda_3 x_3', \\ \frac{dx_1'}{dt} &= -\lambda_1 x_0' + \lambda_4 x_2' + \lambda_5 x_3', \\ \frac{dx_2'}{dt} &= -\lambda_2 x_0' - \lambda_4 x_1' + \lambda_6 x_3', \\ \frac{dx_3'}{dt} &= -\lambda_3 x_0' - \lambda_5 x_1' - \lambda_6 x_2' \end{aligned}\right.$$

mit der Bedingung zu integrieren, dass für $t = 0 \ldots\ x_0' = x_0,\ x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3$ werde. Man setze:

$$2)\quad u' = e_0 x_0' + e_1 x_1' + e_2 x_2' + e_3 x_3'$$

und

$$3)\quad \frac{du'}{dt} = \varrho u',$$

worin e_0, e_1, e_2, e_3 und ϱ noch zu bestimmende Konstante bedeuten.

Aus 3) folgt durch Integration:

$$4)\quad u' = u'_{t=0} e^{\varrho t},$$

oder

$$5)\quad e_0 x_0' + e_1 x_1' + e_2 x_2' + e_3 x_3' = (e_0 x_0 + e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3) e^{\varrho t}.$$

Durch Berücksichtigung von 2) und 1) geht 3) über in:

$$\begin{aligned} \varrho(e_0 x_0' + e_1 x_1' + e_2 x_2' + e_3 x_3') = e_0(&\ \ \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \lambda_3 x_3') \\ + e_1(&-\lambda_1 x_0' + \lambda_4 x_2' + \lambda_5 x_3') \\ + e_2(&-\lambda_2 x_0' - \lambda_4 x_1' + \lambda_6 x_3') \\ - e_3(&\ \ \lambda_3 x_0' + \lambda_5 x_1' + \lambda_6 x_2'). \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn gleichzeitig:

$$6)\quad \begin{cases} \varrho e_0 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0, \\ -\lambda_1 e_0 + \varrho e_1 + \lambda_4 e_2 + \lambda_5 e_3 = 0, \\ -\lambda_2 e_0 - \lambda_4 e_1 + \varrho e_2 + \lambda_6 e_3 = 0, \\ -\lambda_3 e_0 - \lambda_5 e_1 - \lambda_6 e_2 + \varrho e_3 = 0 \end{cases}$$

ist. Damit diese Gleichungen neben einander stattfinden können, ist notwendig, dass die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \varrho & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & \varrho & \lambda_4 & \lambda_5 \\ -\lambda_2 & -\lambda_4 & \varrho & \lambda_6 \\ -\lambda_3 & -\lambda_5 & -\lambda_6 & \varrho \end{vmatrix} = \varrho^4 + \varrho^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2) + (\lambda_1\lambda_6 - \lambda_2\lambda_5 + \lambda_3\lambda_4)^2$$

verschwinde. Es gilt daher für ϱ die Gleichung:

$$7)\quad \varrho^4 + \varrho^2 h^2 + f^4 = 0,$$

welche die vier Wurzeln hat:

$$7^*)\quad \varrho = \pm\sqrt{\pm\sqrt{\frac{h^4}{4} - f^4} - \frac{h^2}{2}}.$$

Die Grössen e_0, e_1, e_2, e_3 stehen dann in dem Verhältnis:

$$8)\quad \begin{cases} e_0 : e_1 : e_2 : e_3 = \varrho^3 + \varrho(\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2) : -\lambda_1\varrho^2 + \varrho(\lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_5) - \lambda_6 f^2 \\ \qquad : \lambda_2\varrho^2 + \varrho(\lambda_1\lambda_4 - \lambda_3\lambda_6) - \lambda_5 f^2 \\ \qquad : -\lambda_3\varrho^2 - \varrho(\lambda_1\lambda_5 + \lambda_2\lambda_6) - \lambda_4 f^2. \end{cases}$$

Setzt man nun in die Gleichung 5) für x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 ihre Werte:

$$x_0' = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3,$$
$$x_1' = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$x_2' = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$x_3' = a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,$$

so kommt wegen der Unabhängigkeit der x von einander:

$$9)\quad \begin{cases} e_0(a_{00} - e^{\varrho t}) + e_1 a_{10} + e_2 a_{20} + e_3 a_{30} = 0, \\ e_0 a_{01} + e_1(a_{11} - e^{\varrho t}) + e_2 a_{21} + e_3 a_{31} = 0, \\ e_0 a_{02} + e_1 a_{12} + e_2(a_{22} - e^{\varrho t}) + e_3 a_{32} = 0, \\ e_0 a_{03} + e_1 a_{13} + e_2 a_{23} + e_3(a_{33} - e^{\varrho t}) = 0. \end{cases}$$

In diese Gleichungen hat man weiter aus 8) die Werte der e und aus 7*) die vier Werte von ϱ einzuführen, so dass man zur Bestimmung der sechzehn Koeffizienten a_{ix} sechzehn Gleichungen erhält. So entsteht aus der ersten Gleichung in 9) zunächst durch Elimination der e:

$$10)\quad \begin{cases} a_{00}[\varrho^3 + \varrho(\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2)] + a_{10}[-\lambda_1\varrho^2 + \varrho(\lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_5) - \lambda_6 f^2] \\ \qquad + a_{20}[\lambda_2\varrho^2 + \varrho(\lambda_1\lambda_4 - \lambda_3\lambda_6) - \lambda_5 f^2] \\ \qquad + a_{30}[-\lambda_3\varrho^2 - \varrho(\lambda_1\lambda_5 + \lambda_2\lambda_6) - \lambda_4 f^2] \\ \qquad = e^{\varrho t}[\varrho^3 + \varrho(\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2)]. \end{cases}$$

Setzt man in diese Gleichung nacheinander die Werte der vier Wurzeln von ϱ:

$$\varrho_1 = \sqrt{\sqrt{\frac{h^4}{4} - f^4} - \frac{h^2}{2}},$$

$$\varrho_2 = \sqrt{-\sqrt{\frac{h^4}{4} - f^4} - \frac{h^2}{2}},$$

$$\varrho_3 = -\sqrt{\sqrt{\frac{h^4}{4} - f^4} - \frac{h^2}{2}},$$

$$\varrho_4 = -\sqrt{-\sqrt{\frac{h^4}{4} - f^4} - \frac{h^2}{2}},$$

so erhält man zur Bestimmung der vier Koeffizienten a_{00}, a_{10}, a_{20}, a_{30} vier Gleichungen. Es dürfte sich aber wohl kaum lohnen, die Rechnung noch weiter zu führen.

Wenn es nun auch unmöglich erscheint mit Hilfe der infinitesimalen Transformationen die automorphe Transformation von vier Quadraten in einfacher Weise zu bewerkstelligen, so kann man doch wenigstens mit ziemlicher Leichtigkeit die endlichen Transformationen zweier in der allgemeinen sechsgliedrigen Gruppe 8) enthaltene dreigliedrige Untergruppen auffinden. Setzt man zur Abkürzung $\frac{\partial f}{\partial x_i} = p_i$, so lassen sich die sechs speziellen infinitesimalen Transformationen 8) kurz schreiben:

$$\varphi)\quad \begin{cases} \varphi_1 = x_1 p_0 - x_0 p_1, & \varphi_4 = x_2 p_1 - x_1 p_2, \\ \varphi_2 = x_2 p_0 - x_0 p_2, & \varphi_5 = x_3 p_1 - x_1 p_3, \\ \varphi_3 = x_3 p_0 - x_0 p_3, & \varphi_6 = x_3 p_2 - x_2 p_3. \end{cases}$$

Man bilde aus ihnen die infinitesimalen Transformationen:

$$\text{A)}\quad \begin{cases} A_1 = \varphi_1 - \varphi_6 = x_1 p_0 - x_0 p_1 - (x_3 p_2 - x_2 p_3), \\ A_2 = \varphi_2 + \varphi_5 = x_2 p_0 - x_0 p_2 + (x_3 p_1 - x_1 p_3), \\ A_3 = \varphi_3 - \varphi_4 = x_3 p_0 - x_0 p_3 - (x_2 p_1 - x_1 p_2) \end{cases}$$

und

$$\text{B)}\quad \begin{cases} B_1 = \varphi_1 + \varphi_6 = x_1 p_0 - x_0 p_1 + (x_3 p_2 - x_2 p_3), \\ B_2 = \varphi_2 - \varphi_5 = x_2 p_0 - x_0 p_2 - (x_3 p_1 - x_1 p_3), \\ B_3 = \varphi_3 + \varphi_4 = x_3 p_0 - x_0 p_3 + (x_2 p_1 - x_1 p_2). \end{cases}$$

Da

$$(A_1 A_2) = -2A_3, \quad (A_1 A_3) = 2A_2, \quad (A_2 A_3) = -2A_1,$$

und

$$(B_1 B_2) = 2B_3, \quad (B_1 B_3) = -2B_2, \quad (B_2 B_3) = 2B_1,$$

so bilden sowohl A als B eine dreigliedrige Gruppe. Die Transformationen der Gruppe A) sind nicht mit einander vertauschbar, ebensowenig die der Gruppe B). Da aber

$$(A_1 B_1) = (A_1 B_2) = (A_1 B_3) = 0,$$

$$(A_2 B_1) = (A_2 B_2) = (A_2 B_3) = 0,$$

$$(A_3 B_1) = (A_3 B_2) = (A_3 B_3) = 0,$$

so sind die Transformationen der Gruppe A) mit denen der Gruppe B) vertauschbar und A) und B) sind reziproke Gruppen. Um die durch A) erzeugten endlichen Transformationen zu finden, bilde man die allgemeine infinitesimale Transformation:

$$A(f) = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3,$$

worin λ_1, λ_2, λ_3 die drei wesentlichen Parameter der dreigliedrigen Gruppe darstellen. Es ist also

$$11)\quad \begin{cases} Af = \lambda_1(x_1 p_0 - x_0 p_1 - x_3 p_2 + x_2 p_3) \\ \quad + \lambda_2(x_2 p_0 - x_0 p_2 + x_3 p_1 - x_1 p_3) \\ \quad + \lambda_3(x_3 p_0 - x_0 p_3 - x_2 p_1 + x_1 p_2) \\ = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) p_0 + (-\lambda_1 x_0 - \lambda_3 x_2 + \lambda_2 x_3) p_1 \\ \quad + (-\lambda_2 x_0 + \lambda_3 x_1 - \lambda_1 x_3) p_2 \\ \quad + (-\lambda_3 x_0 - \lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2) p_3. \end{cases}$$

Setzen wir nun wieder:

$$x'_0 = x_0 + Ax_0 + \frac{A^2 x_0}{2!} + \frac{A^3 x_0}{3!} + \cdots$$

so wird:

$$Ax_0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3,$$
$$A^2 x_0 = -h^2 x_0, \quad h^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2,$$
$$A^3 x_1 = -h^2 A x_0, \quad A^4 x_0 = h^4 x_0, \quad A^5 x_0 = h^4 A x_0, \quad A^6 x_0 = -h^6 x_0,$$

folglich:

$$12_1)\quad x'_0 = x_0 \cos h + x_1 \lambda_1 \frac{\sin h}{h} + x_2 \lambda_2 \frac{\sin h}{h} + x_3 \lambda_3 \frac{\sin h}{h}.$$

Ebenso findet man:

$$12_2)\quad \begin{cases} x'_1 = -x_0 \lambda_1 \frac{\sin h}{h} + x_1 \cos h - x_2 \lambda_3 \frac{\sin h}{h} + x_3 \lambda_2 \frac{\sin h}{h}, \\ x'_2 = -x_0 \lambda_2 \frac{\sin h}{h} + x_1 \lambda_3 \frac{\sin h}{h} + x_2 \cos h - x_3 \lambda_1 \frac{\sin h}{h}, \\ x'_3 = -x_0 \lambda_3 \frac{\sin h}{h} - x_1 \lambda_2 \frac{\sin h}{h} + x_2 \lambda_1 \frac{\sin h}{h} + x_3 \cos h. \end{cases}$$

Setzt man in diesen Gleichungen:

$$\cos h = a_0, \quad \lambda_1 \frac{\sin h}{h} = -a_1, \quad \lambda_2 \frac{\sin h}{h} = -a_2, \quad \lambda_3 \frac{\sin h}{h} = -a_3,$$

wobei

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

ist, so erhält man die einfachere Form:

$$13)\quad \begin{cases} x_0' = a_0 x_0 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3, \\ x_1' = a_1 x_0 + a_0 x_1 + a_3 x_2 - a_2 x_3, \\ x_2' = a_2 x_0 - a_3 x_1 + a_0 x_2 + a_1 x_3, \\ x_3' = a_3 x_0 + a_2 x_1 - a_1 x_2 + a_0 x_3. \end{cases}$$

Auf dieselbe Weise findet man, dass die endlichen Transformationen der Gruppe B) folgende Gestalt annehmen, wenn man statt $a_0, a_1, a_2, a_3 \cdots$ b_0, b_1, b_2, b_3 schreibt:

$$14)\quad \begin{cases} x'_0 = b_0 x_0 - b_1 x_1 - b_2 x_2 - b_3 x_3, \\ x'_1 = b_1 x_0 + b_0 x_1 - b_3 x_2 + b_2 x_3, \\ x'_2 = b_2 x_0 + b_3 x_1 + b_0 x_2 - b_1 x_3, \\ x'_3 = b_3 x_0 - b_2 x_1 + b_1 x_2 + b_0 x_3, \end{cases}$$

wobei ebenfalls:
$$b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b^2_3 = 1$$

ist. Man erkennt leicht, dass die Transformationen 13) in die Quaternionengleichung:

$$15)\qquad x' = a x$$

zusammengefasst werden können, wenn

$$a = a_0 + i a_1 + k a_2 + k i a_3,$$
$$x = x_0 + i x_1 + k x_2 + k i x_3,$$
$$x' = x_0' + i x_1' + k x_2' + k i x_3',$$
$$i^2 = k^2 = -1, \quad k i = -i k$$

gesetzt ist, und ebenso die Gleichungen 14) sich in die eine Gleichung:

$$16)\qquad x' = x b$$

zusammenziehen lassen, worin

$$b = b_0 + i b_1 + k b_2 + k i b_3,$$
$$b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1.$$

Die Transformationen der Gruppe 13) sind nicht mit einander vertauschbar, ebensowenig die der Gruppe 14), wohl aber die Transformationen der Gruppe 13) und 14) untereinander. Denn aus

$$x' = a x,$$
$$x'' = a' x',$$

folgt

$$x'' = a' a x;$$

aus

$$x' = a' x,$$
$$x' = a x',$$

aber

$$x'' = a a' x.$$

Da a und a' nicht vertauschbar sind, so gilt dasselbe auch von der Gruppe 13). Ebenso schliesst man aus der Gleichung 16), da b und b' in dem Produkt bb' sich nicht vertauschen lassen, ohne dass der Wert desselben geändert wird, dass die Transformationen der Gruppe 14) nicht vertauschbar sind. Dagegen hat man, wenn man zuerst die a, dann die b Transformation anwendet:

$$x' = a x,$$
$$x'' = x' b,$$

folglich:

$$x'' = (a x) b$$

und bei umgekehrter Anordnung:

$$x' = xb,$$
$$x'' = ax',$$

also

$$x'' = a(xb),$$

so schliesst man aus dem Umstand, dass

$$(ax)b = a(xb)$$

infolge der Geltung der assoziativen Gesetzes ist, auf die Vertauschbarkeit der Transformationen der Gruppe 13) mit denen der Gruppe 14). Die beiden Gruppen 13) und 14) sind also reziproke Gruppen.

In den Gruppen 13) und 14) treten die Parameter nur unilinear auf. Aus ihnen setzt sich eine Gruppe zusammen, welche ebenfalls die Summe von vier Quadraten in sich selbst überführt, aber die Parameter in bilinearer Zusammensetzung enthält. Es ist die Gruppe:

17) $$x' = axb$$

oder ausgeführt:

$$\begin{aligned}
x_0' = {} & (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) x_0 \\
& + (-a_0 b_1 - a_1 b_0 - a_2 b_3 + a_3 b_2) x_1 \\
& + (-a_0 b_2 + a_1 b_3 - a_2 b_0 - a_3 b_1) x_2 \\
& + (-a_0 b_3 - a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_3 b_0) x_3, \\
x_1' = {} & (a_1 b_0 + a_0 b_1 + a_3 b_2 - a_2 b_3) x_0 \\
& + (-a_1 b_1 + a_0 b_0 + a_3 b_3 + a_2 b_2) x_1 \\
& + (-a_1 b_2 - a_0 b_3 + a_3 b_0 - a_2 b_1) x_2 \\
& + (-a_1 b_3 + a_0 b_2 - a_3 b_1 - a_2 b_0) x_3, \\
x_2' = {} & (a_2 b_0 - a_3 b_1 + a_0 b_2 + a_1 b_3) x_0 \\
& + (-a_2 b_1 - a_3 b_0 + a_0 b_3 - a_1 b_2) x_1 \\
& + (-a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_0 b_0 + a_1 b_1) x_2 \\
& + (-a_2 b_3 - a_3 b_2 - a_0 b_1 + a_1 b_0) x_3, \\
x_3' = {} & (a_3 b_0 + a_2 b_1 - a_1 b_2 + a_0 b_3) x_0 \\
& + (-a_3 b_1 + a_2 b_0 - a_1 b_3 - a_0 b_2) x_1 \\
& + (-a_3 b_2 - a_2 b_3 - a_1 b_0 + a_0 b_1) x_2 \\
& + (-a_3 b_3 + a_2 b_2 + a_1 b_1 + a_0 b_0) x_3.
\end{aligned}$$

Von dieser Gruppe nicht wesentlich verschieden ist die Gruppe

17*) $$x' = bxa$$

oder ausgeführt:

$$\begin{aligned}
x_0' = {} & (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) x_0 \\
& + (-a_1 b_0 - a_0 b_1 - a_3 b_2 + a_2 b_3) x_1 \\
& + (-a_2 b_0 + a_3 b_1 - a_0 b_2 - a_1 b_3) x_2 \\
& + (-a_3 b_0 - a_2 b_1 + a_1 b_2 - a_0 b_3) x_3, \\
x_1' = {} & (a_1 b_0 + a_0 b_1 - a_3 b_2 + a_2 b_3) x_0 \\
& + (a_0 b_0 - a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) x_1 \\
& + (-a_3 b_0 - a_2 b_1 - a_1 b_2 + a_0 b_3) x_2 \\
& + (a_2 b_0 - a_3 b_1 - a_0 b_2 - a_1 b_3) x_3,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x'_2 = {} & (a_2 b_0 + a_3 b_1 + a_0 b_2 - a_1 b_3) x_0 \\
& + (a_3 b_0 - a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_0 b_3) x_1 \\
& + (a_0 b_0 + a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3) x_2 \\
& + (-a_1 b_0 + a_0 b_1 - a_3 b_2 - a_2 b_3) x_3, \\
x'_3 = {} & (a_3 b_0 - a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3) x_0 \\
& + (-a_2 b_0 - a_3 b_1 + a_0 b_2 - a_1 b_3) x_1 \\
& + (a_1 b_0 - a_0 b_1 - a_2 b_3 - a_3 b_2) x_2 \\
& + (a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3) x_3.
\end{aligned}
$$

Dass die Transformationen, welche durch die Gleichung 17) repräsentiert werden, eine Gruppe bilden, ist leicht nachzuweisen. Die Aufeinanderfolge der beiden nach gleichem Gesetz gebildeten Formeln:

$$x' = axb,$$

$$x'' = a'x'b'$$

ergiebt:

$$x'' = a'axbb'.$$

Da sowohl $a'a$ als bb' wiederum Quaternionen sind, so kann man diese Gleichung auch schreiben:

$$x'' = a''xb''.$$

Die Transformation 17) hat also die Eigentümlichkeit, zwei von einander getrennte und verschiedene Parametergruppen zu besitzen, nämlich:

$$a'' = a'a$$

und

$$b'' = bb',$$

von denen die erste nach dem Typus 16), die zweite nach dem Typus 15) gebildet ist. Die Gruppen 17) und 17*) sind nicht wesentlich verschieden, da man sie durch Vertauschung der Parameter a_i mit den Parametern b_i in einander überführen kann. Dies ergiebt sich auch daraus, dass sie gleiche infinitesimale Transformationen besitzen. Es sind dieselben, wie die der beiden reziproken Untergruppen 13) und 14), nämlich $-A_1$, $-A_2$, $-A_3$, $-B_1$, $-B_2$, $-B_3$, siehe oben S. 285 unter A) und B). Lässt man auf die Transformation:

$$x' = axb$$

folgen

$$x'' = bx'a,$$

so erhält man

$$x'' = baxba,$$

eine Schar von Transformationen, welche die Form:

$$x'' = axa \tag{18}$$

haben. Man hat also nur in 17) oder 17*) $b = a$ zu setzen, um die expliziten Formeln zu erhalten. Sie lauten:

$$
\begin{aligned}
x_0' &= (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) x_0 - 2a_0 a_1 x_1 - 2a_0 a_2 x_2 - 2a_0 a_3 x_3, \\
x_1' &= 2a_0 a_1 x_0 + (a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) x_1 - 2a_1 a_2 x_2 - 2a_1 a_3 x_3, \\
x_2' &= 2a_0 a_2 x_0 - 2a_1 a_2 x_1 + (a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 + a_3^2) x_2 - 2a_2 a_3 x_3, \\
x_3' &= 2a_0 a_3 x_0 - 2a_1 a_3 x_1 - 2a_2 a_3 x_2 + (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_3^2) x_3.
\end{aligned}
$$

Diese Transformationen bilden keine Gruppe, denn die Aufeinanderfolge zweier mit den Parametern a und a' giebt, da:

$$x' = axa,$$
$$x'' = a'x'a'$$

ist:

$$x'' = a'axaa',$$

welche Gleichung nicht wieder die Form 18) besitzt, da $a'a$ und aa' verschieden sind. Die infinitesimalen Transformationen sind:

$$\varphi_1(f) = -2x_1 \frac{\partial f}{\partial x_0} + 2x_0 \frac{\partial f}{\partial x_1},$$
$$\varphi_2(f) = -2x_2 \frac{\partial f}{\partial x_0} + 2x_0 \frac{\partial f}{\partial x_2},$$
$$\varphi_3(f) = -2x_3 \frac{\partial f}{\partial x_0} + 2x_0 \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Hieraus findet man die Klammerausdrücke $(\varphi_i \varphi_k)$:

$$(\varphi_1 \varphi_2) = 4\left(x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right),$$
$$(\varphi_1 \varphi_3) = 4\left(x_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right),$$
$$(\varphi_2 \varphi_3) = 4\left(x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right).$$

Da dieselben nicht aus φ_1, φ_2, φ_3 linear zusammengesetzt sind, so bilden die letzeren keine Gruppe von infinitesimalen Transformationen.

Setzt man in den Formeln 17) und 17*):

$$19)\quad \begin{cases} a_0 = \omega + \vartheta, \\ a_1 = a - f, \\ a_2 = b - g, \\ a_3 = c - h, \\ b_0 = \omega - \vartheta, \\ b_1 = a + f, \\ b_2 = b + g, \\ b_3 = c + h, \end{cases}$$

und berücksichtigt man, dass aus den Gleichungen:

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1,$$
$$b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$$

durch Einführung vorstehender Werte sich ergiebt:

$$19^*)\quad \begin{cases} \omega^2 + \vartheta^2 + a^2 + f^2 + b^2 + g^2 + c^2 + h^2 = 1, \\ \omega\vartheta - af - bg - ch = 0, \end{cases}$$

so findet man wieder die Formeln 12) und daneben die gleichberechtigte Transformation:

$$20)\begin{cases} x'_0=[(\omega^2-\vartheta^2)+(f^2-a^2)+(g^2-b^2)+(h^2-c^2)]x_0+2(-a\omega-f\vartheta+bh-cg)x_1 \\ \quad +2(-b\omega+cf-g\vartheta-ah)x_2+2(-c\omega-bf+ag-h\vartheta)x_3, \\ x'_1=2(a\omega+f\vartheta+bh-cg)x_0+[(\omega^2-\vartheta^2)+(f^2-a^2)-(g^2-b^2)-(h^2-c^2)]x_1 \\ \quad +2(h\omega+fg-ab+c\vartheta)x_2+(-g\omega+fh-b\vartheta-ca)x_3, \\ x'_2=2(b\omega+g\vartheta+cf-ah)x_0+2(-h\omega+fg-c\vartheta-ab)x_1 \\ \quad +[(\omega^2-\vartheta^2)-(f^2-a^2)+(g^2-b^2)-(h^2-c^2)]x_2+2(f\omega+gh-bc+a\vartheta)x_3 \\ x'_3=2(c\omega+h\vartheta+ag-bf)x_0+2(g\omega+hf-ac+b\vartheta)x_1 \\ \quad +2(-f\omega+gh-a\vartheta-bc)x_2+[(\omega^2-\vartheta^2)-(f^2-a^2)-(g^2-b^2)+(h^2-c^2)]x_3 \end{cases}$$

Noch sei bemerkt, dass

$$\begin{cases} Na\cdot Nb=[(\omega+\vartheta)^2+(a-f)^2+(b-g)^2+(c-h)^2]. \\ \qquad [(\omega-\vartheta)^2+(a+f)^2+(b+g)^2+(c-h)^2] \\ \quad =(\omega^2+\vartheta^2+a^2+f^2+b^2+g^2+c^2+h^2)^2 \\ \quad -4(\omega\vartheta-af-bg-hc)^2=1 \end{cases}$$

wird, übereinstimmend mit 19).

Die Transformationen 12) (Seite 280/81) und 20) gehen in einander über, wenn man die Parameter ϑ, f, g, h beziehentlich mit

$$-\vartheta,\quad -f,\quad -g,\quad -h$$

vertauscht, wobei die Gleichungen 19) bestehen bleiben.

Nimmt man in 17*):

$$b=a_0-ia_1-ka_2-kia_3,$$

so wird:

$$\begin{aligned} x'_0&=x_0, \\ x'_1&=(a_0^2+a_1^2-a_2^2-a_3^2)x_1+2(-a_0a_3+a_1a_2)x_2+2(a_0a_2+a_1a_3)x_3, \\ x'_2&=2(a_0a_3+a_1a_2)x_1+(a_0^2-a_1^2+a_2^2-a_3^2)x_2+2(-a_0a_1+a_2a_3)x_3, \\ x'_3&=2(-a_0a_2+a_1a_3)x_1+2(a_0a_1+a_2a_3)x_2+(a_0^2-a_1^2-a_2^2+a_3^2)x_3. \end{aligned}$$

Sieht man von der ersten Gleichung ab, oder setzt $a_0=0$, so erhält man wieder die Eulersche ternäre orthogonale Substitution, bei welcher ausser dem Nullpunkt der Vektor $a_1+ia_2+ka_3$ und die Ebene $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=c$ bestehen bleiben. Eine andere Form dieser Transformation wird gefunden, wenn man eine der Grössen b z. B. $b_i=-a_i$, die übrigen $b_k=a_k$ setzt. Sei z. B. $b_0=a_0$, $b_1=-a_1$, $b_2=a_2$, $b_3=a_3$, so giebt die Entwickelung des Produktes:

$$\begin{aligned} &(a_0-ia_1+ka_2+kia_3)(x_0+ix_1+kx_2+kix_3)(a_0+ia_1+ka_2+kia_3) \\ &\qquad =x_0'+ix_1'+kx_2'+kix_3', \\ &x_0'=(a_0^2+a_1^2-a_2^2-a_3^2)x_0+2(-a_0a_2-a_1a_3)x_2+2(-a_0a_3+a_1a_2)x_3, \\ &x_1'=x_1, \\ &x_2'=2(a_0a_2-a_1a_3)x_0+(a_0^2-a_1^2-a_2^2+a_3^2)x_2+2(-a_0a_1-a_2a_3)x_3, \\ &x_3'=2(a_0a_3+a_1a_2)x_0+2(a_0a_1-a_2a_3)x_2+(a_0^2-a_1^2+a_2^2-a_3^2)x_3. \end{aligned}$$

Durch diese Transformation geht der Vektor $a_0 - i a_1 - k a_2$ in den Vektor $a_0 + i a_1 + k a_2$ über. Man kann diese Transformation in die vorhergehende überführen, wenn man x_1 mit x_0, x_3 mit x_2 und dem entsprechend x_1' mit x_0', x_3' mit x_2', ausserdem noch a_1 und a_2 beziehentlich mit $-a_1$ und $-a_2$ vertauscht.

§ 4.

Die automorphe Transformation einer Summe von 8, 6 und 4 Quadraten mit Hilfe der Quaternionen von acht Einheiten.

Sei

$$a = a_0 + i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3 + i_1 i_2 a_4 + i_1 i_3 a_5 + i_2 i_3 a_6 + i_1 i_2 i_3 a_7,$$

$$x = x_0 + i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3 + i_1 i_2 x_4 + i_1 i_3 x_5 + i_2 i_3 x_6 + i_1 i_2 i_3 x_7,$$

$$x' = x_0' + i_1 x_1' + i_2 x_2' + i_3 x_3' + i_1 i_2 x_4' + i_1 i_3 x_5' + i_2 i_3 x_6' + i_1 i_2 i_3 x_7'.$$

Setzt man die acht Einheiten dieser Zahlen der Reihe nach gleich $e_0, e_1 \cdots e_7$, so lässt sich, wenn

$$i_l^2 = -1, \quad i_l i_m = - i_m i_l$$

angenommen wird, folgende Multiplikationstafel aufstellen:

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	$\bar{0}$	4	5	$\bar{2}$	$\bar{3}$	7	$\bar{6}$
2	2	$\bar{4}$	$\bar{0}$	6	1	$\bar{7}$	$\bar{3}$	5
3	3	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	7	1	2	$\bar{4}$
4	4	2	$\bar{1}$	7	$\bar{0}$	6	$\bar{5}$	$\bar{3}$
5	5	3	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	4	2
6	6	7	3	$\bar{2}$	5	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
7	7	$\bar{6}$	5	4	$\bar{3}$	2	$\bar{1}$	0

Bildet man nun zunächst das Produkt:

1) $$x' = a x$$

und setzt die Koeffizienten gleicher Einheiten auf beiden Seiten gleich, nimmt überdies an, dass die Grössen a den beiden Bedingungen:

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 = 1$$

und

$$a_0 a_7 - a_1 a_6 + a_2 a_5 - a_3 a_4 = 0$$

entsprechen, so erhält man zur Transformation der Summe von 8 Quadraten in sich selbst die Formeln:

$$
1^*)\left\{\begin{aligned}
x_0' &= a_0x_0 - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 - a_4x_4 - a_5x_5 - a_6x_6 + a_7x_7,\\
x_1' &= a_1x_0 + a_0x_1 - a_4x_2 - a_5x_3 + a_2x_4 + a_3x_5 - a_7x_6 - a_6x_7,\\
x_2' &= a_2x_0 + a_4x_1 + a_0x_2 - a_6x_3 - a_1x_4 + a_7x_5 + a_3x_6 + a_5x_7,\\
x_3' &= a_3x_0 + a_5x_1 + a_6x_2 + a_0x_3 - a_7x_4 - a_1x_5 - a_2x_6 - a_4x_7,\\
x_4' &= a_4x_0 - a_2x_1 + a_1x_2 - a_7x_3 + a_0x_4 - a_6x_5 + a_5x_6 - a_3x_7,\\
x_5' &= a_5x_0 - a_3x_1 + a_7x_2 + a_1x_3 + a_6x_4 + a_0x_5 - a_4x_6 - a_2x_7,\\
x_6' &= a_6x_0 - a_7x_1 - a_3x_2 + c_2x_3 - a_5x_4 + a_4x_5 + a_0x_6 - a_1x_7,\\
x_7' &= a_7x_0 + a_6x_1 - a_5x_2 + a_4x_3 + a_3x_4 - a_2x_5 + a_1x_6 + a_0x_7.
\end{aligned}\right.
$$

Eine zweite Transformation erhält man aus der Gleichung:

$$2)\qquad x' = xb,$$

worin

$$b = b_0 + i_1b_1 + i_2b_2 + i_3b_3 + i_1i_2b_4 + i_1i_3b_5 + i_2i_3b_6 + i_1i_2i_3b_7,$$

wenn zugleich

$$b^2_0 + b^2_1 + b^2_2 + b^2_3 + b^2_4 + b^2_5 + b^2_6 + b^2_7 = 1,$$

$$b_0b_7 - b_1b_6 + b_2b_5 - b_3b_4 = 0$$

gesetzt wird, nämlich

$$
2^*)\left\{\begin{aligned}
x_0' &= b_0x_0 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_3x_3 - b_4x_4 - b_5x_5 - b_6x_6 + b_7x_7,\\
x_1' &= b_1x_0 + b_0x_1 + b_4x_2 + b_5x_3 - b_2x_4 - b_3x_5 - b_7x_6 - b_6x_7,\\
x_2' &= b_2x_0 - b_4x_1 + b_0x_2 + b_6x_3 + b_1x_4 + b_7x_5 - b_3x_6 + b_5x_7,\\
x_3' &= b_3x_0 - b_5x_1 - b_6x_2 + b_0x_3 - b_7x_4 + b_1x_5 + b_2x_6 - b_4x_7,\\
x_4' &= b_4x_0 + b_2x_1 - b_1x_2 - b_7x_3 + b_0x_4 + b_6x_5 - b_5x_6 - b_3x_7,\\
x_5' &= b_5x_0 + b_3x_1 + b_7x_2 - b_1x_3 - b_6x_4 + b_0x_5 + b_4x_6 + b_2x_7,\\
x_6' &= b_6x_0 - b_7x_1 + b_3x_2 - b_2x_3 + b_5x_4 - b_4x_5 + b_0x_6 - b_1x_7,\\
x_7' &= b_7x_0 + b_6x_1 - b_5x_2 + b_4x_3 + b_3x_4 - b_2x_5 + b_1x_6 + b_0x_7.
\end{aligned}\right.
$$

Die Transformationen 1) bilden eine Gruppe, denn zwei aufeinander folgende geben eine Transformation von derselben Art:

$$x' = ax,$$

$$x'' = a'x',$$

folgt:

$$x' = a'ax$$

$$x = a''x.$$

Die Parametergruppe:

$$a'' = a'a$$

ist ebenso zusammengesetzt, wie die Gruppe $x' = ax$. Zwei Transformationen der Gruppe 1*) sind nicht vertauschbar, da die Faktoren des Produktes $a'a$ nicht vertauschbar sind, ohne dass der Wert des Produktes geändert wird. Ebenso ist es mit den Transformationen 2*). Dagegen sind die Transformationen der Gruppe 1*) mit denen der Gruppe 2*) vertauschbar. Denn lässt man auf die a Transformation

$$x' = ax$$

die b Transformation folgen, so ergiebt sich:

$$x'' = (ax)b;$$

verfährt man umgekehrt, so erhält man:

$$x'' = a(xb);$$

da das assoziative Gesetz besteht, so ist

$$(ax)b = a(xb).$$

Beide Gruppen sind sechsgliedrig und enthalten ausser den sechs wesentlichen Parametern noch zwei überzählige. Beide Transformationen enthalten die Parameter unilinear. Um die bilineare Form zu gewinnen, hat man die Gruppe:

3) $$x' = axb$$

zu bilden. Ist

$$x'' = a'x'b',$$

so kommt:

$$x'' = (a'a)x(bb').$$

Es existieren also zwei verschiedene Parametergruppen:

3*) $$a'' = a'a, \quad b'' = bb',$$

in welchen die Parameter a und b vollständig getrennt auftreten.

Die Entwickelung von $x' = axb$ ergiebt nun:

$$\begin{aligned}
x_0' = (\ \ & a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4 - a_5b_5 - a_6b_6 + a_7b_7)x_0 \\
+ (- & a_0b_1 - a_1b_0 + a_2b_4 + a_3b_5 - a_4b_2 - a_5b_3 + a_6b_7 + a_7b_6)x_1 \\
+ (- & a_0b_2 - a_1b_4 - a_2b_0 + a_3b_6 + a_4b_1 - a_5b_7 - a_6b_3 - a_7b_5)x_2 \\
+ (- & a_0b_3 - a_1b_5 - a_2b_6 - a_3b_0 + a_4b_7 + a_5b_1 + a_6b_2 + a_7b_4)x_3 \\
+ (- & a_0b_4 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_7 - a_4b_0 + a_5b_6 - a_6b_5 + a_7b_3)x_4 \\
+ (- & a_0b_5 + a_1b_3 - a_2b_7 - a_3b_1 - a_4b_6 - a_5b_0 + a_6b_4 - a_7b_2)x_5 \\
+ (- & a_0b_6 + a_1b_7 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_5 - a_5b_4 - a_6b_0 + a_7b_1)x_6 \\
+ (\ \ & a_0b_7 + a_1b_6 - a_2b_5 + a_3b_4 + a_4b_3 - a_5b_2 + a_6b_1 + a_7b_0)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1' = (\ \ & a_1b_0 + a_0b_1 - a_4b_2 - a_5b_3 + a_2b_4 + a_3b_5 - a_7b_6 - a_6b_7)x_0 \\
+ (- & a_1b_1 + a_0b_0 + a_4b_4 + a_5b_5 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_7b_7 - a_6b_6)x_1 \\
+ (- & a_1b_2 + a_0b_4 - a_4b_0 + a_5b_6 - a_2b_1 + a_3b_7 - a_7b_3 + a_6b_5)x_2 \\
+ (- & a_1b_3 + a_0b_5 - a_4b_6 - a_5b_0 - a_2b_7 - a_3b_1 + a_7b_2 - a_6b_4)x_3 \\
+ (- & a_1b_4 - a_0b_2 - a_4b_1 + a_5b_7 + a_2b_0 - a_3b_6 - a_7b_5 - a_6b_3)x_4 \\
+ (- & a_1b_5 - a_0b_3 - a_4b_7 - a_5b_1 + a_2b_6 + a_3b_0 + a_7b_4 + a_6b_2)x_5 \\
+ (- & a_1b_6 - a_0b_7 + a_4b_3 - a_5b_2 - a_2b_5 + a_3b_4 - a_7b_0 - a_6b_1)x_6 \\
+ (\ \ & a_1b_7 - a_0b_6 - a_4b_5 + a_5b_4 - a_2b_3 + a_3b_2 + a_7b_1 - a_6b_0)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2' = (\ \ & a_2b_0 + a_4b_1 + a_0b_2 - a_6b_3 - a_1b_4 + a_7b_5 + a_3b_6 + a_5b_7)x_0 \\
+ (- & a_2b_1 + a_4b_0 - a_0b_4 + a_6b_5 - a_1b_2 + a_7b_3 - a_3b_7 + a_5b_6)x_1 \\
+ (- & a_2b_2 + a_4b_4 + a_0b_0 + a_6b_6 + a_1b_1 + a_7b_7 + a_3b_3 - a_5b_5)x_2 \\
+ (- & a_2b_3 + a_4b_5 + a_0b_6 - a_6b_0 + a_1b_7 - a_7b_1 - a_3b_2 + a_5b_4)x_3 \\
+ (- & a_2b_4 - a_4b_2 + a_0b_1 + a_6b_7 - a_1b_0 - a_7b_6 + a_3b_5 + a_5b_3)x_4 \\
+ (- & a_2b_5 - a_4b_3 + a_0b_7 - a_6b_1 - a_1b_6 + a_7b_0 - a_3b_4 - a_5b_2)x_5 \\
+ (- & a_2b_6 - a_4b_7 - a_0b_3 - a_6b_2 + a_1b_5 + a_7b_4 + a_3b_0 + a_5b_1)x_6 \\
+ (\ \ & a_2b_7 - a_4b_6 + a_0b_5 + a_6b_4 + a_1b_3 + a_7b_2 - a_3b_1 + a_5b_0)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3' = (&\quad a_3b_0 + a_5b_1 + a_6b_2 + a_0b_3 - a_7b_4 - a_1b_5 - a_2b_6 - a_4b_7)x_0 \\
+ (&- a_3b_1 + a_5b_0 - a_6b_4 - a_0b_5 - a_7b_2 - a_1b_3 + a_2b_7 - a_4b_6)x_1 \\
+ (&- a_3b_2 + a_5b_4 + a_6b_0 - a_0b_6 + a_7b_1 - a_1b_7 - a_2b_3 + a_4b_5)x_2 \\
+ (&- a_3b_3 + a_5b_5 + a_6b_6 + a_0b_0 + a_7b_7 + a_1b_1 + a_2b_2 - a_4b_4)x_3 \\
+ (&- a_3b_4 - a_5b_2 + a_6b_1 - a_0b_7 - a_7b_0 + a_1b_6 - a_2b_5 - a_4b_3)x_4 \\
+ (&- a_3b_5 - a_5b_3 + a_6b_7 + a_0b_1 - a_7b_6 - a_1b_0 + a_2b_4 + a_4b_2)x_5 \\
+ (&- a_3b_6 - a_5b_7 - a_6b_3 + a_0b_2 + a_7b_5 - a_1b_4 - a_2b_0 - a_4b_1)x_6 \\
+ (&\quad a_3b_7 - a_5b_6 + a_6b_5 - a_0b_4 + a_7b_3 - a_1b_2 + a_2b_1 - a_4b_0)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_4' = (&\quad a_4b_0 - a_2b_1 + a_1b_2 - a_7b_3 + a_0b_4 - a_6b_5 + a_5b_6 - a_3b_7)x_0 \\
+ (&- a_4b_1 - a_2b_0 - a_1b_4 + a_7b_5 + a_0b_2 - a_6b_3 - a_5b_7 - a_3b_6)x_1 \\
+ (&- a_4b_2 - a_2b_4 + a_1b_0 + a_7b_6 - a_0b_1 - a_6b_7 + a_5b_3 + a_3b_5)x_2 \\
+ (&- a_4b_3 - a_2b_5 + a_1b_6 - a_7b_0 - a_0b_7 + a_6b_1 - a_5b_2 - a_3b_4)x_3 \\
+ (&- a_4b_4 + a_2b_2 + a_1b_1 + a_7b_7 + a_0b_0 + a_6b_6 + a_5b_5 - a_3b_3)x_4 \\
+ (&- a_4b_5 + a_2b_3 + a_1b_7 - a_7b_1 + a_0b_6 - a_6b_0 - a_5b_4 + a_3b_2)x_5 \\
+ (&- a_4b_6 + a_2b_7 - a_1b_3 - a_7b_2 - a_0b_5 - a_6b_4 + a_5b_0 - a_3b_1)x_6 \\
+ (&\quad a_4b_7 + a_2b_6 + a_1b_5 + a_7b_4 - a_0b_3 - a_6b_2 - a_5b_1 - a_3b_0)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_5' = (&\quad a_5b_0 - a_3b_1 + a_7b_2 + a_1b_3 + a_6b_4 + a_0b_5 - a_4b_6 + a_2b_7)x_0 \\
+ (&- a_5b_1 - a_3b_0 - a_7b_4 - a_1b_5 + a_6b_2 + a_0b_3 + a_4b_7 + a_2b_6)x_1 \\
+ (&- a_5b_2 - a_3b_4 + a_7b_0 - a_1b_6 - a_6b_1 + a_0b_7 - a_4b_3 - a_2b_5)x_2 \\
+ (&- a_5b_3 - a_3b_5 + a_7b_6 + a_1b_0 - a_6b_7 - a_0b_1 + a_4b_2 + a_2b_4)x_3 \\
+ (&- a_5b_4 + a_3b_2 + a_7b_1 - a_1b_7 + a_6b_0 - a_0b_6 - a_4b_5 + a_2b_3)x_4 \\
+ (&- a_5b_5 + a_3b_3 + a_7b_7 + a_1b_1 + a_6b_6 + a_0b_0 + a_4b_4 - a_2b_2)x_5 \\
+ (&- a_5b_6 + a_3b_7 - a_7b_3 + a_1b_2 - a_6b_5 + a_0b_4 - a_4b_0 + a_2b_1)x_6 \\
+ (&\quad a_5b_7 + a_3b_6 + a_7b_5 - a_1b_4 - a_6b_3 + a_0b_2 + a_4b_1 + a_2b_0)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_6' = (&\quad a_6b_0 - a_7b_1 - a_3b_2 + a_2b_3 - a_5b_4 + a_4b_5 + a_0b_6 - a_1b_7)x_0 \\
+ (&- a_6b_1 - a_7b_0 + a_3b_4 - a_2b_5 - a_5b_2 + a_4b_3 - a_0b_7 - a_1b_6)x_1 \\
+ (&- a_6b_2 - a_7b_4 - a_3b_0 - a_2b_6 + a_5b_1 + a_4b_7 + a_0b_3 + a_1b_5)x_2 \\
+ (&- a_6b_3 - a_7b_5 - a_3b_6 + a_2b_0 + a_5b_7 - a_4b_1 - a_0b_2 - a_1b_4)x_3 \\
+ (&- a_6b_4 + a_7b_2 - a_3b_1 - a_2b_7 - a_5b_0 - a_4b_6 + a_0b_5 - a_1b_3)x_4 \\
+ (&- a_6b_5 + a_7b_3 - a_3b_7 + a_2b_1 - a_5b_6 + a_4b_0 - a_0b_4 + a_1b_2)x_5 \\
+ (&- a_6b_6 + a_7b_7 + a_3b_3 + a_2b_2 + a_5b_5 + a_4b_4 + a_0b_0 - a_1b_1)x_6 \\
+ (&\quad a_6b_7 + a_7b_6 - a_3b_5 - a_2b_4 + a_5b_3 + a_4b_2 - a_0b_1 - a_1b_0)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_7' = (&\quad a_7b_0 + a_6b_1 - a_5b_2 + a_4b_3 + a_3b_4 - a_2b_5 + a_1b_6 + a_0b_7)x_0 \\
+ (&- a_7b_1 + a_6b_0 + a_5b_4 - a_4b_5 + a_3b_2 - a_2b_3 - a_1b_7 + a_0b_6)x_1 \\
+ (&- a_7b_2 + a_6b_4 - a_5b_0 - a_4b_6 - a_3b_1 - a_2b_7 + a_1b_3 - a_0b_5)x_2 \\
+ (&- a_7b_3 + a_6b_5 - a_5b_6 + a_4b_0 - a_3b_7 + a_2b_1 - a_1b_2 + a_0b_4)x_3 \\
+ (&- a_7b_4 - a_6b_2 - a_5b_1 - a_4b_7 + a_3b_0 + a_2b_6 + a_1b_5 + a_0b_3)x_4 \\
+ (&- a_7b_5 - a_6b_3 - a_5b_7 + a_4b_1 + a_3b_6 - a_2b_0 - a_1b_4 - a_0b_2)x_5 \\
+ (&- a_7b_6 - a_6b_7 + a_5b_3 + a_4b_2 - a_3b_5 - a_2b_4 + a_1b_0 + a_0b_1)x_6 \\
+ (&\quad a_7b_7 - a_6b_6 - a_5b_5 - a_4b_4 - a_3b_3 - a_2b_2 - a_1b_1 + a_0b_0)x_7,
\end{aligned}$$

Die vorstehenden Formeln vereinfachen sich bedeutend, wenn $b = a$ angenommen wird. In diesem Falle ergiebt die Ausführung des Produktes:

$$4) \qquad x' = axa,$$

$$\begin{aligned}
x_0' = {} & (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 - a_5^2 - a_6^2 + a_7^2)x_0 + 2(-a_0a_1 + a_6a_7)x_1 \\
& + 2(-a_0a_2 - a_5a_7)x_2 + 2(-a_0a_3 + a_4a_7)x_3 + 2(-a_0a_4 + a_3a_7)x_4 \\
& + 2(-a_0a_5 - a_2a_7)x_5 + 2(-a_0a_6 + a_1a_7)x_6 \\
& + 2(a_0a_7 + a_1a_6 - a_2a_5 + a_3a_4)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1' = {} & 2(a_1a_0 - a_6a_7)x_0 + (-a_1^2 + a_0^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_7^2 - a_6^2)x_1 \\
& + 2(-a_1a_2 + a_5a_6)x_2 + 2(-a_1a_3 - a_4a_6)x_3 + 2(-a_1a_4 - a_3a_6)x_4 \\
& + 2(-a_1a_5 + a_2a_6)x_5 + 2(-a_1a_6 - a_0a_7 - a_2a_5 + a_3a_4)x_6 \\
& + 2(a_1a_7 - a_0a_6)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2' = {} & 2(a_2a_0 + a_5a_7)x_0 + 2(-a_2a_1 + a_5a_6)x_1 \\
& + (-a_2^2 + a_4^2 + a_0^2 + a_6^2 + a_1^2 + a_7^2 + a_3^2 - a_5^2)x_2 + 2(-a_2a_3 + a_4a_5)x_3 \\
& + 2(-a_2a_4 + a_3a_5)x_4 + 2(-a_2a_5 - a_3a_4 + a_0a_7 - a_1a_6)x_5 \\
& + 2(-a_2a_6 + a_1a_5)x_6 + 2(a_2a_7 + a_0a_5)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3' = {} & 2(a_3a_0 - a_4a_7)x_0 + 2(-a_3a_1 - a_4a_6)x_1 + 2(-a_3a_2 + a_4a_5)x_2 \\
& + (-a_3^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_0^2 + a_7^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_4^2)x_3 \\
& + 2(-a_3a_4 - a_2a_5 + a_1a_6 - a_0a_7)x_4 + 2(-a_3a_5 + a_2a_4)x_5 \\
& + 2(-a_3a_6 - a_1a_4)x_6 + 2(a_3a_7 - a_0a_4)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_4' = {} & 2(a_4a_0 - a_3a_7)x_0 + 2(-a_4a_1 - a_3a_6)x_1 + 2(-a_4a_2 + a_3a_5)x_2 \\
& + 2(-a_4a_3 + a_1a_6 - a_0a_7 - a_2a_5)x_3 \\
& + (-a_4^2 + a_2^2 + a_1^2 + a_7^2 + a_0^2 + a_6^2 + a_5^2 - a_3^2)x_4 \\
& + 2(-a_4a_5 + a_2a_3)x_5 + 2(-a_4a_6 - a_1a_3)x_6 + 2(a_4a_7 - a_0a_3)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_5' = {} & 2(a_5a_0 + a_2a_7)x_0 + 2(-a_5a_1 + a_2a_6)x_1 \\
& + 2(-a_5a_2 - a_3a_4 + a_0a_7 - a_1a_6)x_2 \\
& + 2(-a_5a_3 + a_2a_4)x_3 + 2(-a_5a_4 + a_2a_3)x_4 \\
& + 2(-a_5^2 + a_3^2 + a_7^2 + a_1^2 + a_6^2 + a_0^2 + a_4^2 - a_2^2)x_5 \\
& + 2(-a_5a_6 + a_1a_2)x_6 + 2(a_5a_7 + a_0a_2)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_6' = {} & 2(a_6a_0 - a_1a_7)x_0 + 2(-a_6a_1 + a_3a_4 - a_2a_5 - a_0a_7)x_1 \\
& + 2(-a_6a_2 + a_1a_5)x_2 + 2(-a_6a_3 - a_1a_4)x_3 + 2(-a_6a_4 - a_1a_3)x_4 \\
& + 2(-a_6a_5 + a_1a_2)x_5 + (-a^2_6 + a^2_7 + a^2_3 + a^2_2 + a^2_5 + a^2_4 + a^2_0 - a^2_1)x_6 \\
& + 2(a_6a_7 - a_0a_1)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_7' = {} & 2(a_7a_0 + a_6a_1 - a_5a_2 + a_4a_3)x_0 + 2(-a_7a_1 + a_0a_6)x_1 \\
& + 2(-a_7a_2 - a_0a_5)x_2 + 2(-a_7a_3 + a_0a_4)x_3 + 2(-a_7a_4 + a_0a_3)x_4 \\
& + 2(-a_7a_5 - a_0a_2)x_5 + 2(-a_7a_6 + a_0a_1)x_6 \\
& + (a_7^2 - a_6^2 - a_5^2 - a_4^2 - a_3^2 - a_2^2 - a_1^2 + a_0^2)x_7.
\end{aligned}$$

Die Transformationen, welche durch die Gleichung $x' = axa$ repräsentiert werden, bilden keine Gruppe und sind auch nicht mit

einander vertauschbar. Denn die Aufeinanderfolge zweier mit den Parametern a und a' giebt:

$$x' = axa$$

$$x'' = a'x'a'$$

$$x'' = a'axaa'. \tag{5}$$

Da die Produkte $a'a$ und aa' verschieden sind, so lässt sich dieser Gleichung nicht die Gestalt:

$$x'' = a''xa''$$

geben und die Vertauschung von a' mit a ändert den Wert des Produktes 5).

Durch anderweite Spezialisierung von b kann man leicht die Formeln erhalten, vermöge welcher eine Summe von sechs Quadraten in sich übergeführt wird. Sei

$$b_0 = a_0,\quad b_1 = -a_1,\quad b_2 = -a_2,\quad b_3 = -a_3,\quad b_4 = -a_4,$$
$$b_5 = -a_5,\quad b_6 = -a_6,\quad b_7 = a_7$$

und bedeuten a, x, x' (wie oben S. 292) Quaternionen von 8 Einheiten, so ist also

$$x' = ax\frac{1}{a}. \tag{5}$$

Die Entwickelung giebt:

$$\begin{aligned}
x_0' &= (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2)x_0 \\
&= x_0, \\
x_1' &= (a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 - a_5^2 + a_6^2 + a_7^2)x_1 \\
&\quad + 2(-a_0a_4 + a_1a_2 + a_3a_7 - a_5a_6)x_2 \\
&\quad + 2(-a_0a_5 + a_1a_3 - a_2a_7 + a_4a_6)x_3 \\
&\quad + 2(a_0a_2 + a_1a_4 + a_3a_6 + a_5a_7)x_4 \\
&\quad + 2(a_0a_3 + a_1a_5 - a_2a_6 - a_4a_7)x_5 \\
&\quad + 2(-a_0a_7 + a_1a_6 + a_2a_5 - a_3a_4)x_6, \\
x_2' &= 2(a_0a_4 + a_1a_2 - a_3a_7 - a_5a_6)x_1 \\
&\quad + (a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 + a_5^2 - a_6^2 + a_7^2)x_2 \\
&\quad + 2(-a_0a_6 + a_1a_7 + a_2a_3 - a_4a_5)x_3 \\
&\quad + 2(-a_0a_1 + a_2a_4 - a_3a_5 + a_6a_7)x_4 \\
&\quad + 2(a_0a_7 + a_1a_6 + a_2a_5 + a_3a_4)x_5 \\
&\quad + 2(a_0a_3 - a_1a_5 + a_2a_6 - a_4a_7)x_6, \\
x_3' &= 2(a_0a_5 + a_1a_3 + a_2a_7 + a_4a_6)x_1 \\
&\quad + 2(a_0a_6 - a_1a_7 + a_2a_3 - a_4a_5)x_2 \\
&\quad + (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 - a_6^2 + a_7^2)x_3 \\
&\quad + 2(-a_0a_7 - a_1a_6 + a_2a_5 + a_3a_4)x_4 \\
&\quad + 2(-a_0a_1 - a_2a_4 + a_3a_5 + a_6a_7)x_5 \\
&\quad + 2(-a_0a_2 + a_1a_4 + a_3a_6 - a_5a_7)x_6,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x'_4 = {} & 2(-a_0a_2 + a_1a_4 + a_3a_6 - a_5a_7)x_1 \\
& + 2(a_0a_1 + a_2a_4 - a_3a_5 - a_6a_7)x_2 \\
& + 2(-a_0a_7 - a_1a_6 + a_2a_5 + a_3a_4)x_3 \\
& + (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 - a_6^2 + a_7^2)x_4 \\
& + 2(-a_0a_6 + a_1a_7 - a_2a_3 + a_4a_5)x_5 \\
& + 2(a_0a_5 + a_1a_3 + a_2a_7 + a_4a_6)x_6, \\
x'_5 = {} & 2(-a_0a_3 + a_1a_5 - a_2a_6 + a_4a_7)x_1 \\
& + 2(a_0a_7 + a_1a_6 + a_2a_5 + a_3a_4)x_2 \\
& + 2(a_0a_1 - a_2a_4 + a_3a_5 - a_6a_7)x_3 \\
& + 2(a_0a_6 - a_1a_7 - a_2a_3 + a_4a_5)x_4 \\
& + (a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 + a_5^2 - a_6^2 + a_7^2)x_5 \\
& + 2(-a_0a_4 - a_1a_2 + a_3a_7 + a_5a_6)x_6 \\
x'_6 = {} & 2(-a_0a_7 + a_1a_6 + a_2a_5 - a_3a_4)x_1 \\
& + 2(-a_0a_3 - a_1a_5 + a_2a_6 + a_4a_7)x_2 \\
& + 2(a_0a_2 + a_1a_4 + a_3a_6 + a_5a_7)x_3 \\
& + 2(-a_0a_5 + a_1a_3 - a_2a_7 + a_4a_6)x_4 \\
& + 2(a_0a_4 - a_1a_2 - a_3a_7 + a_5a_6)x_5 \\
& + (a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 - a_5^2 + a_6^2 + a_7^2)x_6.
\end{aligned}
$$

Da x_7 aus den Formeln herausfällt und $x'_7 = 0$ wird, so kann man zwar die Transformation:

$$x' = ax\frac{1}{a},$$

worin a, x, x' Quaternionen von 8 Einheiten bedeuten, als eine automorphe Transformation von 7 Quadraten ansehen. Da aber für $x_0 = 0$ auch $x'_0 = 0$ wird, so reduziert sich dieselbe auf eine Transformation von 6 Quadraten in sich selbst. Die Gruppeneigenschaft desselben erhellt sofort aus obiger Gleichung.

Denn die Aufeinanderfolge zweier Transformationen:

$$x' = ax\frac{1}{a},$$

$$x'' = a'x'\frac{1}{a'}$$

ergiebt:

$$x'' = a'ax\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a'}$$

$$= a''x\frac{1}{a''}.$$

Da a' und a nicht vertauschbar sind, so gilt dasselbe auch von den Transformationen der Gruppe. Die Parametergruppe lautet:

$$a'' = a'a.$$

Die identische Transformation tritt ein bei $a = 1$ oder $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0 \ldots a_7 = 0$. Die inverse Transformation wird dargestellt durch die Gleichung:

$$x' = \frac{1}{a}xa.$$

Für $x = a$ wird $x' = a$ und für $x = \frac{1}{a} x'$ ebenfalls $= \frac{1}{a}$. Dies besagt, dass bei der Transformation $x' = ax\frac{1}{a}$ der Punkt:

$$x_0 = a_0, \quad x_1 = a_1, \ldots x_7 = a_7$$

unverändert bleibt, ebenso aber auch der Punkt:

$$x_0 = a_0, \quad x_1 = -a_1 \ldots x_6 = -a_6, \quad x_7 = a_7.$$

Endlich kann auch die automorphe Transformation von 4 Quadraten aus der Gleichung 1) abgeleitet werden.

Setzen wir nämlich in derselben:

$$x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0,$$

und zugleich $b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1, \quad b_2 = a_2, \quad b_3 = a_3,$

dagegen $b_4 = -a_4, \quad b_5 = -a_5, \quad b_6 = -a_6, \quad b_7 = -a_7,$

so verschwinden auch die Koeffizienten von x_0, x_1, x_2, x_3 in der Entwickelung von x_4', x_5', x_6', x_7', und es bleibt:

$$\begin{aligned}
x_0' = &(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 - a_7^2)x_0\\
&+ 2(-a_0a_1 - a_2a_4 - a_3a_5 - a_6a_7)x_1\\
&+ 2(-a_0a_2 + a_1a_4 - a_3a_6 + a_5a_7)x_2\\
&+ 2(-a_0a_3 + a_1a_5 + a_2a_6 - a_4a_7)x_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1' = &2(a_0a_1 - a_2a_4 - a_3a_5 + a_6a_7)x_0\\
&+ (a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 - a_5^2 + a_6^2 + a_7^2)x_1\\
&+ 2(-a_0a_4 - a_1a_2 - a_3a_7 - a_5a_6)x_2\\
&+ 2(-a_0a_5 - a_1a_3 + a_2a_7 + a_4a_6)x_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2' = \quad &2(a_0a_2 + a_1a_4 - a_3a_6 - a_5a_7)x_0\\
&+ 2(a_0a_4 - a_1a_2 + a_3a_7 - a_5a_6)x_1\\
&+ (a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + a_5^2 - a_6^2 - a_7^2)x_2\\
&+ 2(-a_0a_6 - a_1a_7 - a_2a_3 - a_4a_5)x_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3' = &2(a_0a_3 + a_1a_5 + a_2a_6 + a_4a_7)x_0\\
&+ 2(a_0a_5 - a_1a_3 - a_2a_7 + a_4a_6)x_1\\
&+ 2(a_0a_6 + a_1a_7 - a_2a_3 - a_4a_5)x_2\\
&+ (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 - a_6^2 - a_7^2)x_3.
\end{aligned}$$

Diese Transformationen werden in der Gleichung

6) $$x' = ax\bar{a}$$

zusammengefasst, worin $\bar{a}$ aus a auf die oben angegebene Weise entsteht. Setzt man hierin:

$$a_0 = \omega, \quad a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_3 = c,$$
$$a_4 = h, \quad a_5 = -g, \quad a_6 = f, \quad a_7 = \vartheta,$$

so erhält man die Transformation § 3, 12), die Transformation § 3, 20) dagegen, sobald man:

$$a_0 = \omega, \quad a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_3 = c,$$
$$a_4 = -h, \quad a_5 = g, \quad a_6 = -f, \quad a_7 = -\vartheta$$

einführt. Die Transformationen 12) und 20) sind invers zu denjenigen, welche man nach der Cayleyschen Methode beziehentlich aus den schiefen Determinanten:

$$B = \begin{vmatrix} \omega & a & b & c \\ -a & \omega & h & -g \\ -b & -h & \omega & f \\ -c & g & -f & \omega \end{vmatrix}$$

und

$$B = \begin{vmatrix} \omega & -a & -b & -c \\ a & \omega & -h & g \\ b & h & \omega & -f \\ c & -g & f & \omega \end{vmatrix}$$

ableitet. Die inverse Transformation findet man einfach durch Vertauschung von ω mit $-\omega$ und ϑ mit $-\vartheta$. Es ergiebt sich dies sehr leicht aus den Quaternionendarstellungen, die wir für die quaternäre orthogonale Substitution aufgestellt haben. Die eine lautete:

$$\begin{aligned} x' = {} & [(\omega + \vartheta) + i(a - h) + k(b - g) + ki(c - f)] \\ & \cdot (x_0 + ix_1 + kx_2 + kix_3) \\ & \cdot [(\omega - \vartheta) + i(a + h) + k(b + g) + ki(c + f)]. \end{aligned}$$

Die hierzu inverse Transformation ist:

$$\begin{aligned} x' = {} & [(\omega + \vartheta) - i(a - h) - k(b - g) - ki(c - f)] \\ & \cdot (x_0 + ix_1 + kx_2 + kix_3) \\ & \cdot [(\omega - \vartheta) - i(a + h) - k(b + g) - ki(c + f)]. \end{aligned}$$

Multipliziert man dieses Produkt rechts- und linksseitig mit -1, so erhält man wieder die ursprüngliche Form, nur dass $\omega + \vartheta$ in $-(\omega + \vartheta)$ und $\omega - \vartheta$ in $-(\omega - \vartheta)$ übergegangen ist. Die zweite Quaternionendarstellung hatte die Form:

$$\begin{aligned} x' = {} & (\omega + i_1 a + i_2 b + i_3 c + i_1 i_2 h - i_1 i_3 g + i_2 i_3 f + i_1 i_2 i_3 \vartheta) \\ & \cdot (x_0 + i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3) \\ & \cdot (\omega + i_1 a + i_2 b + i_3 c - i_1 i_2 h + i_1 i_3 g - i_2 i_3 f - i_1 i_2 i_3 \vartheta). \end{aligned}$$

Hierzu ist die inverse Transformation:

$$\begin{aligned} x' = {} & (\omega - i_1 a - i_2 b - i_3 c - i_1 i_2 h + i_1 i_3 g - i_2 i_3 f - i_1 i_2 i_3 \vartheta) \\ & \cdot (x_0 + i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3) \\ & \cdot (\omega - i_1 a - i_2 b - i_3 c + i_1 i_2 h - i_1 i_3 g + i_2 i_3 f + i_1 i_2 i_3 \vartheta). \end{aligned}$$

Multipliziert man auch hier die beiden äusseren Faktoren mit -1, so erhält man die ursprüngliche Form wieder, nur dass darin statt ω und ϑ, $-\omega$ und $-\vartheta$ auftreten.

Auch die Parametergruppe der Euler-Cayleyschen quaternären orthogonalen Substitution lässt sich mit Hilfe von Quaternionen übersichtlich darstellen. Die Gruppe 17) in § 3:

$$x' = axb$$

hat die beiden getrennten Parametergruppen:

$$a'' = a'a \quad \text{und} \quad b'' = bb'.$$

Diese Gleichungen geben nach bekannten Regeln entwickelt:

$$\begin{aligned}
a_0'' &= a_0'a_0 - a_1'a_1 - a_2'a_2 - a_3'a_3,\\
a_1'' &= a_1'a_0 + a_0'a_1 + a_3'a_2 - a_2'a_3,\\
a_2'' &= a_2'a_0 - a_3'a_1 + a_0'a_2 + a_1'a_3,\\
a_3'' &= a_3'a_0 + a_2'a_1 - a_1'a_2 + a_0'a_3
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
b_0'' &= b_0'b_0 - b_1'b_1 - b_2'b_2 - b_3'b_3,\\
b_1'' &= b_1'b_0 + b_0'b_1 - b_3'b_2 + b_2'b_3,\\
b_2'' &= b_2'b_0 + b_3'b_1 + b_0'b_2 - b_1'b_3,\\
b_3'' &= b_3'b_0 - b_2'b_1 + b_1'b_2 + b_0'b_3.
\end{aligned}$$

Setzt man hierin

$$a_0 = \omega + \vartheta, \quad a_1 = a - f, \quad a_2 = b - g, \quad a_3 = c - h,$$
$$b_0 = \omega - \vartheta, \quad b_1 = a + f, \quad a_2 = b + g, \quad b_3 = c + h,$$

und ebenso die entsprechenden Werte für a'_i, a''_i und b'_i, b''_i, so ergeben sich für die acht Parameter folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\omega'' &= \omega'\omega - a'a - b'b - c'c - h'h - g'g - f'f + \vartheta'\vartheta,\\
a'' &= a'\omega + \omega'a - h'b + b'h + g'c - c'g - \vartheta'f - f'\vartheta,\\
b'' &= b'\omega + \omega'b + h'a - a'h - f'c + c'f - \vartheta'g - g'\vartheta,\\
c'' &= c'\omega + \omega'c - g'a + a'g + f'h - h'f - \vartheta'h - h'\vartheta,\\
h'' &= h'\omega + \omega'h + a'b - b'a + f'g - g'f - \vartheta'c - c'\vartheta,\\
g'' &= g'\omega + \omega'g + c'a + a'c - f'h + h'f - \vartheta'b - b'\vartheta,\\
f'' &= f'\omega + \omega'f - c'b + b'c + g'h - h'g - \vartheta'a - a'\vartheta,\\
\vartheta'' &= \vartheta'\omega + \omega'\vartheta + f'a + a'f + g'b + b'g + h'c + g'h.
\end{aligned}$$

Man erkennt leicht, dass diese acht Gleichungen sich in die eine Quaternionengleichung zusammenfassen lassen:

$$\begin{aligned}
&(\omega'' + i_1a'' + i_2b'' + i_3c'' + i_1i_2h'' - i_1i_3g'' + i_2i_3f'' + i_1i_2i_3\vartheta'')\\
&= (\omega' + i_1a' + i_2b' + i_3c' + i_1i_2h' - i_1i_3g' + i_2i_3f' + i_1i_2i_3\vartheta')\\
&\quad\cdot(\omega + i_1a + i_2b + i_3c + i_1i_2h - i_1i_3g + i_2i_3f + i_1i_2i_3\vartheta),
\end{aligned}$$

welche nach dem Typus 1):

$$x' = ax.$$

gebildet ist und also die Parametergruppe der in Rede stehenden Euler-Cayleyschen Transformation darstellt. Schreibt man sie in der abgekürzten Form:

6*) $$a'' = a'a.$$

wie oben S. 294, Gleichung 3*), so kann man der zweiten Parametergruppe $b'' = bb'$ der Transformation 6) die Gestalt:

6**) $$\bar{a}'' = \bar{a}\bar{a}'$$

geben. Beide Gruppen sind identisch; die Entwickelung der Gleichung 6**) liefert dieselbe Transformation wie 6*).

Lässt man auf die Transformation $x' = ax\bar{a}$ eine zweite folgen, so ergiebt sich

$$x'' = a'ax\bar{a}\bar{a}',$$

oder

$$x'' = a''x\bar{a}'',$$

woraus folgt, dass $x' = ax\bar{a}$ den Gruppencharakter besitzt. Es sind scheinbar zwei Parametergruppen vorhanden, nämlich:

$$a'' = a'a$$

und

$$\bar{a}'' = \bar{a}\bar{a}'.$$

Da diese Gleichungen aber nach dem Vorigen dieselben Transformationen liefern, so reduzieren sich dieselben auf eine einzige Parametergleichung, in der sämtliche Parameter auftreten.

Zum Schluss mag noch einer sehr einfachen Klasse von automorphen Transformationen gedacht werden, welche zwar keinen Gruppencharakter besitzen, aber dafür ohne Schwierigkeit für jede beliebige Zahl von Quadraten aufgestellt werden können. Bedeuten a und x Vektoren von n Einheiten, deren Produkte nicht auf die ursprünglichen Einheiten zurückgeführt werden können, sei also z. B.:

$$a = a_0 + i_1 a_1 + i_2 a_2 + \cdots + i_{n-1} a_{n-1},$$

$$x = x_0 + i_1 x_1 + i_2 x_2 + \cdots + i_{n-1} x_{n-1},$$

worin $i_1 i_2 \ldots i_{n-1}$ primitive imaginäre Einheiten sind, für welche nur die Bedingungen:

$$i_p^2 = -1, \quad i_q i_p = -i_p i_q$$

existieren, so lässt sich erweisen, dass das Produkt:

$$x' = axa$$

wiederum ein Vektor ist, indem sämtliche Produkte, die $i_p i_q$ und $i_p i_q i_r$ enthalten, verschwinden.

Es findet sich nämlich zu jedem Produkt:

$$a_0 (i_r x_r)(i_s a_s)$$

ein zweites entgegengesetzt gleiches

$$(i_s a_s)(i_r x_r) a_0,$$

ebenso zu

$$(i_r a_r) x_0 (i_s a_s)$$

ein entgegengesetzt gleiches:

$$(i_s a_s) x_0 (i_r a_r)$$

und drittens zu

$$(i_p a_p)(i_r x_r)(i_s a_s)$$

ein entgegengesetzt gleiches:

$$(i_s a_s)(i_r x_r)(i_p a_p),$$

da $i_s i_r = - i_r i_s$, $i_p i_r i_s = - i_s i_r i_p$ ist.

Für $n = 2, 3, 4, 5$ erhält man folgende Transformationsgleichungen, deren Bildungsgesetz ohne Mühe erkannt wird:

$$n = 2, \quad a_0^2 + a_1^2 = 1,$$
$$x_0' = (a_0^2 - a_1^2)x_0 - 2a_0 a_1 x_1,$$
$$x_1' = 2a_0 a_1 x_0 + (a_0^2 - a_1^2)x_1,$$
$$n = 3, \quad a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 = 1,$$
$$x_0' = (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2)x_0 - 2a_0 a_1 x_1 - 2a_0 a_2 x_2,$$
$$x_1' = 2a_0 a_1 x_0 + (a_0^2 - a_1^2 + a_2^2)x_1 - 2a_1 a_2 x_2,$$
$$x_2' = 2a_0 a_2 x_0 - 2a_1 a_2 x_1 + (a_0^2 + a_1^2 - a_2^2)x_2,$$

$n = 4$ siehe oben,

$$n = 5, \quad a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1,$$
$$x_0' = (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - a_4^2)x_0 - 2a_0 a_1 x_1 - 2a_0 a_2 x_2 - 2a_0 a_3 x_3 - 2a_0 a_4 x_4,$$
$$x_1' = 2a_0 a_1 x_0 + (a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)x_1 - 2a_1 a_2 x_2 - 2a_1 a_3 x_3 - 2a_1 a_4 x_4,$$
$$x_2' = 2a_0 a_2 x_0 - 2a_1 a_2 x_1 + (a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)x_2 - 2a_2 a_3 x_3 - 2a_2 a_4 x_4,$$
$$x_3' = 2a_0 a_3 x_0 - 2a_1 a_3 x_1 - 2a_2 a_3 x_2 + (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2)x_3 - 2a_3 a_4 x_4,$$
$$x_3' = 2a_0 a_4 x_0 - 2a_1 a_4 x_1 - 2a_2 a_4 x_2 - 2a_3 a_4 x_3 + (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2)x_4.$$

Diese Transformationen bilden mit Ausnahme der **ersten** keine Gruppen. Denn die Aufeinanderfolge zweier solcher Transformationen:

$$x' = axa$$

und

$$x'' = a'x'a'$$

giebt:

$$x'' = a'axaa'.$$

Die Produkte $a'a$ und aa' sind für $n > 2$ keine Vektoren, auch ist $a'a$ nicht gleich aa'. Deshalb giebt es für diese Transformationen auch keine Parametergleichung.

Bemerkenswerteste Druckfehler der ersten beiden Teile.

Seite 67 Zeile 4 v. u. lies: $\frac{a_{00} - a_{11}}{a_{01}} = \frac{b_{00} - b_{11}}{b_{01}}$.

„ 69 „ 7 v. o. lies: 11).

„ 69 „ 19 v. u. lies: $x_1' = x_1$.

„ 71 „ 2 v. o. lies: $-x_1 \sin(\overline{t_4 - t_3} + \overline{t_2 - t_1})$.

„ 72 „ 12 v. o. lies: $-l \sin t$.

„ 74 Formel 28*) lies: $\frac{dx_0'}{dt} = -x_1'$, $\frac{dx_1'}{dt} = x_0'$.

Seite 74 Zeile 12 v. u. lies: $\left(\frac{d^3 x_0'}{dt^3}\right)_0 = x_1$, $\left(\frac{d^4 x_0'}{dt^4}\right)_0 = x_0$.

„ 75 „ 4 v. o. lies: φt.

„ 75 Formel 27) lies: $x_0'^2 + x_1'^2 = c^2$.

„ 75 „ 28) lies: $\arcsin \frac{x_0'}{c} + t = c'$.

„ 76 „ 32) lies: $\frac{du'}{dt}$.

„ 77 Zeile 9 v. o. lies: $\varrho_2 a_{00}$.

„ 77 „ 12 v. o. lies: $\varrho_2 a_{01}$.

„ 77 Formel 37, 2) lies: $-a_{01} = a_{10}$ etc.

„ 79 Zeile 14 v. u. lies: $x' = xb$.

„ 79 „ 1 v. u. lies: $(b_0^2 - b_{12}^2) x_1$.

„ 121 „ 8 v. u. ist zur Determinante der Exponent 2 zu setzen.

„ 121 „ 3 v. u. lies: $a_{00} = a_{11} = a_{22} = 1$.

„ 123 Formel 7*, 2) lies: $\varphi^2 x_0 = -(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) x_0 + \lambda_0 \lambda_1 x_1 + \lambda_0 \lambda_2 x_2$.

„ 124 Zeile 1 v. o. lies: $x_0 \left(\lambda_0 \lambda_1 \frac{1 - \cos ht}{h^2} - \lambda_2 \frac{\sin ht}{h}\right)$ etc.

„ 124 „ 3 v. o. lies: $x_0 \left(\lambda_0 \lambda_2 \frac{1 - \cos ht}{h^2} + \lambda_1 \frac{\sin ht}{h}\right)$ etc.

„ 124 „ 9 v. o. lies: $\lambda_1 = -y_1$, $\lambda_2 = -z_1$.

„ 126 „ 1 v. o. lies: ζ_{ki}.

„ 126 „ 14 v. o. lies: $\frac{H^2}{t^2}$.

„ 127 „ 4 v. o. lies: $t = 1$.

„ 129 „ 14 v. u. lies: $\mp \frac{\lambda_1 \sqrt{M}}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$.

„ 129 Formel 7) lies:

$$\lambda_2 x_1' - \lambda_1 x_2' = \sqrt{M} = \sqrt{[c(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - c_1^2 - h^2 x_0'^2 + 2 c_1 \lambda_0 x_0]}.$$

„ 129 Zeile 3 v. u. ändere den Nenner dementsprechend ab.

„ 132 „ 9 v. o. lies: 8).

Über elliptische Anamorphose in der dioptrischen Abbildung.

Von
Prof. Dr. LUDWIG MATTHIESSEN
in Rostock.

Die dioptrischen und katoptrischen Abbildungen von Objekten durch centrierte, sphärische Flächensysteme unter Voraussetzung der bekannten Gaussschen Beschränkungen reduzieren sich in den Handbüchern der Optik meistens auf die Konstruktion und Berechnung der Bildgrössen sehr kleiner geradliniger senkrecht zur Centrale stehender, axialer oder paraxialer Objekte. Da aber in Wirklichkeit die Bilder von realen Objekten ebenfalls Raumgebilde sind, wie es die Erfahrung im Gebrauche der Fernrohre lehrt, indem diese den Tiefendimensionen des Raumes akkommodiert werden müssen, so scheint es von Interesse, die Theorie der Abbildung in dieser Richtung zu erweitern. Die Dimensionen und Koordinaten sind mit Rücksicht auf die von uns gemachte Annahme der Gaussschen Beschränkungen im allgemeinen von der Ordnung der Kleinheit der Differentiale ∂r, $\partial \vartheta$, ∂x, ∂y, ∂z u. s. w.; in der Regel aber erweitert man dieselben noch so weit zu endlichen Grössen, als sie noch die Bedingung erfüllen, dass sie sehr klein gegen die Abscissen x_0, x_1 und die Krümmungsradien $r_1, r_2, \ldots$ der brechenden Flächen sind, sowie dass die Glieder höherer Ordnung ebenfalls gegen die der ersten Ordnung der Kleinheit verschwinden. Die mathematische Behandlung des vorgesetzten Problems kann demgemäss mit Anwendung der Differentialrechnung geschehen. Indem wir die Kenntnis der Theorie der geometrischen oder graphischen Dioptrik von Systemen centrierter Flächen voraussetzen, schicken wir zunächst einige leitende Grundsätze voraus.

1. Die Centrale eines brechenden Systems centrierter sphärischer Flächen ist die optische Axe, in der selbst oder in ihrer unmittelbaren Nähe die abzubildenden Objekte und ihre Teile sich befinden.

2. In der optischen Axe sind bemerkenswert die beiden Hauptbrennpunkte, die beiden Hauptpunkte und die beiden Knotenpunkte. Die letzteren beiden Kardinalpunktepaare haben gleiche Interstitien

und liegen paarweise zu den Brennpunkten symmetrisch. Sie sind beide bipolare Abscissenanfangspunkte für konjugierte Punkte und zwar gelten die Relationen:

$$1) \qquad (H_\alpha H_\beta),\ \frac{f}{x_0}+\frac{\varphi}{x_1}=1,\quad (K_\alpha K_\beta),\ \frac{-\varphi}{k_0}+\frac{-f}{k_1}=1.$$

3. Für die Abscissen der Objekt- und Bildpunkte in Bezug auf einen beliebigen Anfangspunkt derselben normieren die Differentiale ∂x_0 und ∂x_1, ∂k_0 und ∂k_1; für seitliche Dimensionen wie Ordinaten oder rad. vect. ∂y_0 und ∂y_1, r_0 und r_1 oder ∂r_0 und ∂r_1 u. s. w. Ist P_0 ein als Anfangspunkt angenommener Punkt des Objekts, so ist sein Bild P_1 Anfangspunkt der Abscissen des Gesamtbildes. Ihre Örter sind an die Gleichungen 1) gebunden.

4. Wenn von allen Punkten des als ein sehr kleines Raumgebilde gedachten Objektes Strahlen nach dem ersten Knotenpunkt K_α gezogen werden und von dem zweiten Knotenpunkte K_β zu jedem dieser parallele Strahlen, so sind die einzelnen Strahlenpaare Strahlen konjugierter Punkte. Der zweite Strahlenkegel ist mit dem ersten entweder völlig kongruent oder symmetrisch.

5. Wenn man mit einer durch den ersten Knotenpunkt gehenden Erzeugungsgeraden einen Umhüllungskegel des Objekts beschreibt, so ist der zweite Knotenpunkts-Strahlenkegel auch Umhüllungskegel des Bildes. Ist also z. B. das Objekt ein gegen die Knotenpunktsaxe $K_\alpha P_0$ geneigter Kreis, so ist sein Bild entweder ein Kreis oder eine Ellipse.

6. Die beiden Knotenpunkts-Strahlenkegel können als perspektivische Strahlenbündel mit zwei getrennten versetzten Polen angesehen werden. Irgend ein konjugiertes Strahlenpaar kann als eine optische Nebenaxe betrachtet werden, wenn man nur Knotenpunktsabscissen k_0 und k_1 anwendet.

7. Ist das Objekt eine sehr kleine Gerade r_0 oder ∂r_0 und zieht man alle möglichen Knotenpunktsstrahlen ihrer Punkte nach K_α, so bilden sie einen Strahlenfächer. Das Bild der Linie ist nun ebenfalls eine kleine Gerade r_1 oder ∂r_1, deren nach K_β gezogene Knotenpunktsstrahlen einen kongruenten, homothetischen oder antithetischen Fächer bilden. Die Neigungswinkel der beiden Linien sind indes verschieden gross, und zwar ist:

$$2) \qquad \tan\beta_0 : \tan\beta_1 = x_1 : x_0 = -\varphi k_1 : f k_0.$$

Zum Beweise dieses Theorems beachte man, dass für ein aufrechtes, senkrecht zur optischen Hauptaxe oder auch senkrecht zu einer Nebenaxe stehendes Objekt (Linie) folgende Beziehungen zu seinem gleichfalls aufrechten Linienbilde bestehen:*

---

* Matthiessen, Beiträge zur Dioptrik der Kristalllinse in: Berlin-Eversbuschs Zeitschrift für vergleichende Augenheilkunde IV, I § 2, 1887. — Grundriss der Dioptrik geschichteter Linsensysteme, Leipzig 1877.

$$\text{I)} \qquad \frac{\partial y_0}{\partial y_1} = \frac{\partial r_0 \sin\beta_0}{\partial r_1 \sin\beta_1} = \frac{f - x_0}{f} = \frac{\varphi}{\varphi - x_1} = \frac{-\varphi x_0}{f x_1},$$

$$\text{II)} \qquad \frac{\partial y_0}{\partial y_1} = \frac{\partial r_0 \sin\beta_0}{\partial r_1 \sin\beta_1} = \frac{\varphi + k_0}{-f} = \frac{-\varphi}{f + k_1} = \frac{k_0}{k_1};$$

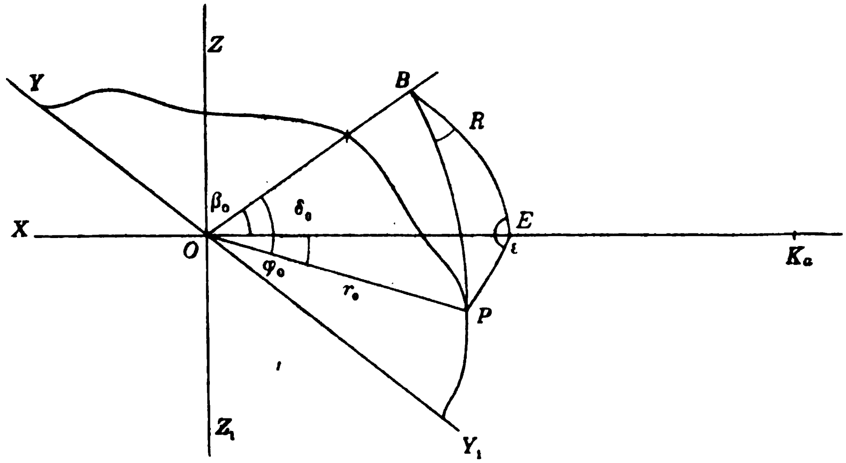
und weiter beachte man, dass für Linienelemente in der Hauptaxe oder einer Nebenaxe folgende Gleichungen bestehen:

$$\text{III)} \qquad \frac{\partial x_0}{\partial x_1} = \frac{\partial r_0 \cos\beta_0}{\partial r_1 \cos\beta_1} = \frac{x_0 - f}{\varphi - x_1} = \frac{-\varphi x_0^2}{f x_1^2},$$

$$\text{IV)} \qquad \frac{\partial x_0}{\partial x_1} = \frac{\partial r_0 \cos\beta_0}{\partial r_1 \cos\beta_1} = -\frac{\varphi + k_0}{f + k_1} = \frac{-f k_0^2}{\varphi k_1^2}.$$

Aus I) und III), beziehungsweise aus II) und IV) ergeben sich die Relationen in 2).

8. Als Abscissenaxe kann man die optische Axe wählen mit den Abscissen x_0 und x_1 und ihren Differentialen, wenn der Hauptobjektpunkt (x_0) in ihr liegt. Liegt er seitlich, so wähle man die beiden durch ihn und seinen Bildpunkt gehenden konjugierten Knotenpunkts-



strahlen k_0 und k_1. Diese auf die optische Axe projiziert, unterscheiden sich nur um Grössen der Kleinheit zweiter Ordnung, weil

$$k'_0 = \sqrt{k_0^2 + \partial y_0^2} = k_0 + \frac{1}{2}\,\frac{\partial y_0^2}{k_0}.$$

Die Abscissenaxen degenerieren dann in zwei parallele Nebenaxen, welche wir unseren späteren Betrachtungen immer zu grunde legen werden, da die Vorstellungen von der Abbildung hierdurch viel klarer werden.

Wir wenden uns nunmehr der Theorie der Abbildung zu, indem wir uns als Objekt eine beliebige geschlossene krumme Oberfläche denken mit einem Pole O ihrer Polarkoordinaten. Man verbinde O mit dem ersten Knotenpunkte durch eine Gerade $K_a O$, welche wir als vordere Nebenaxe und zugleich als X-Axe eines rechtwinkligen

Koordinatensystems annehmen wollen. Es sei $K_a OB$ (s. die Figur) der Neigungswinkel β eines durch O gelegten Ebenenschnittes gegen die Axe, P ein beliebiger Punkt seiner Peripherie mit dem Polarwinkel $BOP = \varphi_0$. Konstruiert man noch YOY_1 senkrecht zu $K_a OB$ und OZ senkrecht zu $K_a OY$, dann sind OY und OZ die beiden übrigen Koordinatenaxen; r_0 oder ∂r_0, ∂k_0, ∂y_0, ∂z_0, sowie r_1 oder ∂r_1, ∂k_1, ∂y_1, ∂z_1 die Koordinaten der beiden getrennten rechtwinkligen, dreiaxigen Koordinatensysteme. Wir denken uns ferner um O durch den Punkt P der krummen Oberfläche ein sphärisches Dreieck PBE gelegt; dann ist $BP = \varphi_0$, $BE = \beta_0$, $EP = \delta_0$,

$$B\hat{E}P = \varepsilon \quad \text{und} \quad E\hat{B}P = R.$$

Es sei nun die Gleichung der gegebenen Oberfläche der Einfachheit wegen explizit $r_0 = F(\beta, \varphi)$. Bezeichnet man das Bild des sphärischen Dreiecks mit $P_1 B_1 E_1$, so ist in Berücksichtigung des Umstandes, dass die Seiten dieser Dreiecke in parallelen Knotenpunkts-Strahlenfächern liegen,

$$BEP = B_1 E_1 P_1 = \varepsilon.$$

Weiter ist:

$$\sin \beta_0 = \tan \varphi_0 \cdot \cot \varepsilon, \quad \sin \beta_1 = \tan \varphi_1 \cdot \cot \varepsilon,$$

folglich:

3) $$\tan \varphi_0 : \tan \varphi_1 = \sin \beta_0 : \sin \beta_1.$$

Ferner ist

$$\cos \delta_0 = \cos \beta_0 \cdot \cos \varphi_0, \quad \cos \delta_1 = \cos \beta_1 \cdot \cos \varphi_1.$$

Da immer r_0 als eine sehr kleine Grösse vorausgesetzt wird, so kann man setzen:

$$r_0 \cos \delta_0 = \partial k_0, \quad r_1 \cos \delta_1 = \partial k_1,$$

und weil aus IV) folgt:

$$\frac{\partial x_0}{\partial x_1} = \frac{\partial k_0}{\partial k_1} = -\frac{\varphi + k_0}{f + k_1} = \frac{-f k_0^2}{\varphi k_1^2},$$

so wird:

$$r_0 \cos \delta_0 = \frac{-f k_0^2}{\varphi k_1^2} r_1 \cos \delta_1 = -\frac{\varphi + k_0}{f + k_1} r_1 \cos \delta_1,$$

oder:

4) $$r_1 = \frac{-\varphi k_1^2}{f k_0^2} r_0 \frac{\cos \beta_0 \cdot \cos \varphi_0}{\cos \beta_1 \cos \varphi_1} = -\frac{f + k_1}{\varphi + k_0} r_0 \frac{\cos \beta_0 \cdot \cos \varphi_0}{\cos \beta_1 \cos \varphi_1}.$$

Dieses ist die Polargleichung der Bildfläche.

Wenn es sich nun um die Abbildung einer krummen Oberfläche oder einer Kurve handelt, werden die Polarkoordinaten r_0, β_0 und φ_0 in die des Bildes r_1, β_1 und φ_1 zu verwandeln sein. Handelt es sich dagegen um die Abbildung singulärer Linien und Punkte z. B. der Kanten und Ecken eines Polyeders, so sind die partikulären Gleichungen 2), 3) und 4) nach β_1, φ_1 und r_1 aufzulösen. Wir wollen hier zunächst das erste Verfahren entwickeln und gehen aus vom Quadrate der Gleichung 4):

$$r_1^2 = \left(\frac{-\varphi}{f}\right)^2 \frac{k_1^4}{k_0^4} r_0^2 \frac{\cos \beta_0^2 \cos \varphi_0^2}{\cos \beta_1^2 \cos \varphi_1^2}.$$

Es ist nun

$$5)\quad \cos\beta_0^2 = \frac{1}{1+\tan\beta_0^2} = \frac{1}{1+\tan\beta_1^2\left(\frac{-\varphi k_1}{f k_0}\right)^2} = \frac{\left(\frac{f k_0}{-\varphi k_1}\right)^2 \cos\beta_1^2}{1-\cos\beta_1^2\left[1-\left(\frac{f k_0}{-\varphi k_1}\right)^2\right]},$$

$$6)\quad \cos\varphi_0^2 = \frac{1}{1+\tan\varphi_0^2} = \frac{1}{1+\tan\varphi_1^2\,\frac{\sin\beta_0^2}{\sin\beta_1^2}} = \frac{\cos\varphi_1^2\left[1-\cos\beta_1^2\left\{1-\left(\frac{f k_0}{-\varphi k_1}\right)^2\right\}\right]}{1-\cos\varphi_1^2\cos\beta_1^2\left[1-\left(\frac{f k_0}{-\varphi k_1}\right)^2\right]}.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung 4) ein, so erhält man:

$$r_1^2 = \left(\frac{k_1}{k_0}\right)^2 r_0^2 \, \frac{1}{1-\cos\varphi_1^2\cos\beta_1^2\left[1-\left(\frac{f k_0}{-\varphi k_1}\right)^2\right]}$$

oder

$$7)\qquad r_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{\frac{1}{1-\cos\varphi_1^2\cos\beta_1^2\left[1-\left(\frac{f k_0}{-\varphi k_1}\right)^2\right]}}.$$

Da dies die Gleichung eines Rotationsellipsoides ist, so ist der Abbildungskoeffizient des rad. vect. in jedem Falle ein elliptischer und man kann deshalb die dioptrische Abbildung von Objekten eine elliptische Anamorphose nennen. Zur vollständigen Darstellung der Abbildung hat man noch die Gleichung:

$$r_0 = F(\beta_0, \varphi_0)$$

einzusetzen und die Koordinaten β_0 und φ_0 in die des Bildes β_1 und φ_1 zu transformieren. Wir wollen dies Verfahren an einem Beispiele erläutern.

Es sei das Objekt ein kleines dreiaxiges Ellipsoid. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, dass seine längste Axe $2a$ mit der Knotenpunktaxe $K_a P_0$ zusammenfalle, und wählen die mittlere Axe $2b$ als Y-Axe und die kleinste $2c$ als Z-Axe. Dann wird bei Anwendung derselben Polarkoordinaten die Gleichung des Ellipsoids:

$$r_0 = \frac{b}{\sqrt{1+\cos\varphi_0^2\left(\frac{b^2}{c^2}-1\right)-\cos\varphi_0^2\cos\beta_0^2\left(\frac{b^2}{c^2}-\frac{b^2}{a^2}\right)}}.$$

Wir drücken alle Elemente dieser Gleichung durch die des Bildes aus; dabei ist:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{-f k_0^2}{\varphi k_1^2}, \quad \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{k_0}{k_1},$$

folglich

$$b = b_1\frac{k_0}{k_1}, \quad \frac{b^2}{c^2} = \frac{b_1^2}{c_1^2}, \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{b_1^2}{a_1^2}\left(\frac{\varphi k_1}{-f k_0}\right)^2,$$

mithin

$$r_0 = \frac{k_0}{k_1}\,\frac{b_1}{\sqrt{1+\cos\varphi_0^2\left(\frac{b_1^2}{c_1^2}-1\right)-\cos\varphi_0^2\cos\beta_0^2\left[\frac{b_1^2}{c_1^2}-\frac{b_1^2}{a_1^2}\left(\frac{\varphi k_1}{-f k_0}\right)^2\right]}}.$$

Hieraus lassen sich die Koordinaten β_0 und φ_0 mittelst der Relationen 5) und 6) in β_1 und φ_1 verwandeln. Substituiert man noch:

$$\frac{b_1^2}{c_1^2} - 1 = \lambda^2, \quad \frac{a_1^2}{c_1^2} - 1 = \lambda_1^2$$

und verbindet die Gleichung des Ellipsoides mit der Gleichung 7), so erhält man:

$$\left\{\begin{aligned} r_1 &= \frac{a_1 b_1}{\sqrt{a_1^2 + a_1^2\lambda^2\cos\varphi_1^2 - a_1^2(1+\lambda^2)\cos\varphi_1^2\cos\beta_1^2\left[1-\left(\frac{fk_0}{\varphi k_1}\right)^2\right] - b_1^2\left[1+\lambda_1^2-\left(\frac{\varphi k_1}{-fk_0}\right)^2\right]\cos\varphi_1^2\cos\beta_1^2\left(\frac{fk_0^2}{\varphi k_1}\right)}} \\ &= \frac{b_1}{\sqrt{1+\lambda^2\cos\varphi_1^2 - (1+\lambda^2)\cos\varphi_1^2\cos\beta_1^2\left[1-\left(\frac{fk_0}{\varphi k_1}\right)^2\right] - \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_1^2}\left[1+\lambda_1^2-\left(\frac{\varphi k_1}{-fk_0}\right)\right]\cos\varphi_1^2\cos\beta_1^2\left(\frac{fk_0^2}{\varphi k_1}\right)}}, \end{aligned}\right.$$

welches ebenfalls die Gleichung eines dreiaxigen Ellipsoides ist.

Wenn das Objekt eine Kugelfläche, also $r_0 =$ konst. ist, so ergiebt die Gleichung 7) die Abbildung und zwar ein Rotationsellipsoid mit den Halbaxen:

$$a_1 = \frac{-\varphi k_1^2}{fk_0^2} r_0,$$

$$b_1 = c_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0.$$

Wenn hierbei der Mittelpunkt der Kugel im ersten Knotenpunkt liegt, hat man zu setzen $k_0 = k_1 = 0$ und nach IV) und II):

$$a_1 = \frac{-f}{\varphi} r_0, \quad b_1 = c_1 = \frac{-f}{\varphi} r_0,$$

d. h. das Bild ist auch eine Kugel. Liegt dagegen der Mittelpunkt der Objektkugel im ersten Hauptpunkte, so hat man zu setzen $x_0 = x_1 = 0$ und nach III) und I):

$$a_1 = \frac{-\varphi}{f} r_0, \quad b_1 = c_1 = r_0,$$

d. h. das Bild ist ein Rotationsellipsoid.

Wenn das Objekt ein Gitter oder ein Polyeder ist, so kann man die Polarkoordinaten r_1, β_1 und φ_1 ausdrücken durch r_0, β_0 und φ_0.

Es ist ganz analog den Formeln 5) und 6):

$$\text{8)} \quad \cos\beta_1^2 = \frac{1}{1+\tan\beta_0^2\left(\frac{fk_0}{-\varphi k_1}\right)^2} = \frac{\left(\frac{\varphi k_1}{-fk_0}\right)^2\cos\beta_0^2}{1-\cos\beta_0^2\left[1-\left(\frac{\varphi k_1}{-fk_0}\right)^2\right]},$$

$$\text{9)} \quad \cos\varphi_1^2 = \frac{1}{1+\tan\varphi_0^2\frac{\sin\beta_1^2}{\sin\beta_0^2}} = \frac{\cos\varphi_0^2\left[1-\cos\beta_0^2\left\{1-\left(\frac{\varphi k_1}{-fk_0}\right)^2\right\}\right]}{1-\cos\varphi_0^2\cos\beta_0^2\left[1-\left(\frac{\varphi k_1}{-fk_0}\right)^2\right]},$$

$$10)\qquad r_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \cos\varphi_0^2 \cos\beta_0^2 \left[1 - \left(\frac{\varphi k_1}{-f k_0}\right)^2\right]}};$$

Da es sich im vorliegenden Falle im allgemeinen nur um die Abbildung einzelner Punkte handelt und nicht um Ebenenschnitte durch die Y-Axe, so kann man auch einfach ausgehen von den Relationen 4) und 2):

$$r_1 = \frac{-\varphi k_1^2}{f k_0^2} r_0 \frac{\cos\delta_0}{\cos\delta_1} = -\frac{f + k_1}{\varphi_0 + k_0} r_0 \frac{\cos\delta_0}{\cos\delta_1},$$

$$\tan\delta_0 : \tan\delta_1 = -\varphi k_1 : f k_0,$$

woraus folgt:

$$11)\qquad r_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{\frac{1}{1 - \cos\delta_0^2 \left[1 - \left(\frac{\varphi k_1}{-f k}\right)^2\right]}}.$$

Die Gleichung:

$$12)\qquad \tan\delta_1 = \left(\frac{-f k_0}{\varphi k_1}\right) \cdot \tan\delta_0$$

giebt die Neigung des rad. vect. eines Punktes z. B. einer Ecke des Polyeders gegen die Hauptaxe (Knotenpunktsaxe) und die Gleichung 11) die Länge des rad. vect. oder den Abstand des abgebildeten Punktes von dem Koordinatenanfangspunkte des Bildes.

Über den Traktoriographen von Kleritj und das Stangenplanimeter.

Von

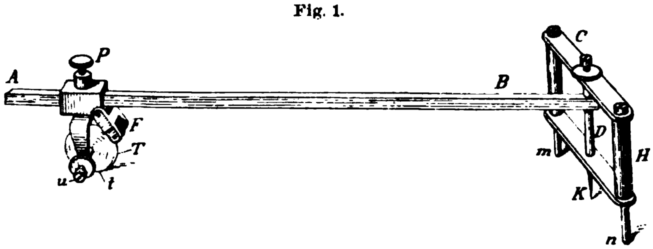
Reallehrer A. Korselt

in Meerane i. S.

Auf die Aufforderung des Herrn Prof. Mehmke hin teile ich den Lesern dieser Zeitschrift folgendes über den „Traktoriographen" von Staatsrat Kleritj (jetzt serbischer Minister für Volkswirtschaft und Handel) mit. Ich entnehme die Angaben dem Aufsatze von Kleritj in Dinglers polytechnischem Journal Band 305, S. 234—237, 260—263, 1897.

Der „Traktoriograph" besteht (Fig. 1) aus der Fahrstange AB, die an dem einen Ende mit einem Fahrstift DK versehen ist, und

Fig. 1.



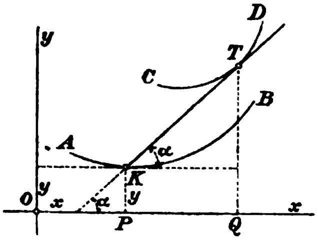
aus einem scharfrandigen, um eine wagerechte Axe drehbaren Rädchen T. Diese Axe ist in dem gabelförmigen Unterteile einer Hülse gelagert, welche auf der Stange AB verschiebbar und mittelst der Schraube P auf derselben feststellbar ist. Der spitze Fahrstift DK ist leicht drehbar in dem Rahmen CH befestigt, der auf verstellbaren Füßen m und n ruht. Durch Schrauben in den Füßen kann K beliebig eingestellt werden, und ebenso lässt sich durch Schräubchen das Rädchen T so stellen, dass seine Symmetrieebene durch AB und K geht.

Man fasst das Instrument zwischen zwei Finger und führt die Fahrspitze leicht die aufgezeichnete Kurve entlang. Der Berührungspunkt t des Rädchens beschreibt dann die der Kurve zugehörige Traktorie mit der unveränderlichen Tangente $t = Kt$. Über dem Rädchen T befindet sich ein kleineres Rädchen F mit einem Einschnitte,

der einen mit Druckfarbe getränkten Filz enthält. Diese färbt den scharfen Rand des Rädchens T und bewirkt, dass der Weg von t auf dem Papiere sich abzeichnet.

Es seien (Fig. 2) CD die Traktorie der Linie AB für die beständige Tangente t, XY die Koordinaten des Punktes K auf AB, xy diejenigen des zugehörigen Punktes T auf CD, α der Winkel einer Richtung von t mit der x-Axe. Dann ist nach der Figur:

Fig. 2.



$$1)\quad \begin{cases} x = X + t\cos\alpha, \\ y = Y + t\sin\alpha, \\ y' = \operatorname{tg}\alpha. \end{cases}$$

Da aber
$$\cos\alpha = (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}},$$
$$\sin\alpha = y'(1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}},$$

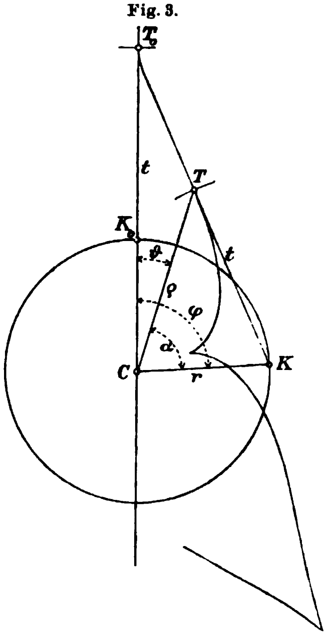
so folgt:

$$2)\quad \begin{cases} X = x - t(1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}, \\ Y = y - ty'(1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Folgende Bemerkung sei hier eingeschaltet:

Das bekannte Kennzeichen der Berührungstransformationen (siehe etwa Lie, „Geometrie der Berührungstransformationen" S. 73 Satz 2) zeigt, dass die Zuordnung 2) der Traktorie CD zu AB, also auch die umgekehrte Zuordnung 1) keine Berührungstransformation ist. Das ist auch geometrisch leicht an zwei einander berührenden Kreisen zu zeigen.

Fig. 3.



Bewegt sich die Spitze K auf einem Kreise mit dem Halbmesser r (Fig. 3) und ist $KT = t$, so beschreibt der Berührungspunkt des Rädchens eine Kreistraktorie $T_0 T T_1 \ldots$, für welche die augenblickliche Richtung KT die Tangente der Traktorie im Punkte T ist. Die Gleichung dieser Traktorie lautet:

$$k \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} k\varphi = \operatorname{tg} k(\vartheta + \alpha),$$

wo

$$k = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{t}\right)^2},$$

α der Winkel, unter dem die Tangente t vom Mittelpunkt aus gesehen wird, φ der zum befahrenen Wege $K_0 K$ gehörige Centriwinkel, und ϑ der Polwinkel, von CK_0 aus gerechnet, ist. Um den n^{ten} Teil des gegebenen Weges φ zu finden, braucht man nur zu setzen:

$$k = \frac{1}{n},$$

dann wird

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{n} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{n},$$

wodurch $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{n}$, also auch $\frac{\varphi}{n}$ selbst bekannt wird. Als Tangentenlänge hat man dabei zu nehmen

$$t = nr(n^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ist aber die Vielteilung für ein bestimmtes r geleistet, so ist sie bekanntlich auch leicht für ein beliebiges r auszuführen.

Setzt man $t = 0$, so wird hier $k = 0$ und

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{k=0} \frac{\operatorname{tg} k\varphi}{k} = \varphi.$$

Da α bekannt ist, so ist damit φ für $r = 1$ rektifiziert und zugleich der Sektor $CK_0K = \frac{\varphi r}{2}$ quadriert. Setzt man $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so findet man eine Strecke für die Zahl $\frac{\pi}{2}$, bezogen auf den Einheitsradius.

Will man einem Kreise ein regelmässiges n-Eck einbeschreiben, so teile man wie angegeben $\frac{\pi}{2}$ in n Teile, verbinde je zwei getrennte Punkte durch eine Sehne und übertrage diese Teilung auf die andere Kreishälfte.

Die Basis e der natürlichen Logarithmen wird gezeichnet mit Hilfe der (Huyghensschen) Traktrix der Geraden. Durch Integration der Differentialgleichungen 2) findet man die Gleichung derselben:

$$\xi = -\sqrt{t^2 - \eta^2} + tl\frac{t + \sqrt{t^2 - \eta^2}}{\eta},$$

wenn ξ und η die Koordinaten eines Punktes dieser Traktorie bezeichnen. Durch Konstruktion mit Lineal und Zirkel wird daraus die auf dieselbe Axe bezogene logarithmische Linie abgeleitet:

$$x = tl\frac{y}{t},$$

also für $t = 1$

$$x = ly \quad \text{oder} \quad y = e^x.$$

Man nehme also $x = 1$, so findet man aus der gezeichneten Traktrix und nach obigen elementaren Konstruktionen eine Strecke als Darstellung von e in Bezug auf eine gegebene Streckeneinheit. Dabei wird aber vorausgesetzt, dass man zu jedem Punkt der x-Axe den entsprechenden Punkt der Traktrix auffinden kann. Das geschieht durch Auflegen des Traktoriographen auf die Grundgerade und die schon gezeichnete Traktrix.

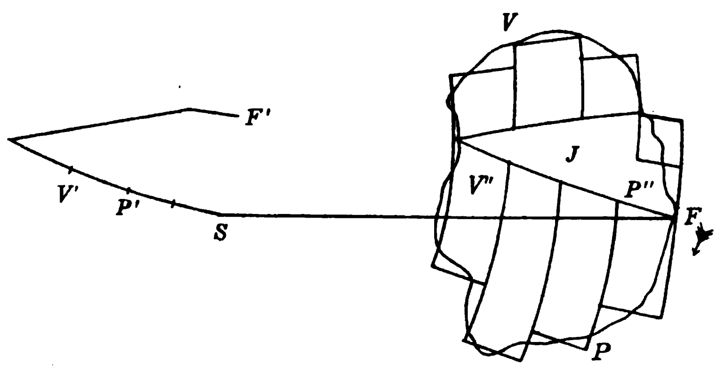
Wir können diesen Konstruktionen keine praktische Bedeutung beilegen, weil sie sich ebenso genau und noch einfacher mit einem Maßstabe und einem Zirkel ausführen lassen, wenn eine kleine Anzahl

von Versuchen gestattet ist. Praktisch wichtig ist aber die von Kleritj nicht erwähnte Anwendung des Traktoriographen als Planimeter, wie sie zuerst 1886 der dänische Kapitän Prytz gelehrt hat.

Prytz hat ebenfalls einen Traktoriographen angegeben, aber von einfacherer Konstruktion. Anstatt des Rädchens T hat sein Instrument nur eine einfache Schneide, die die Traktorie in das Papier eindrückt. Unter dem Namen Beilplanimeter oder Stangenplanimeter findet es jetzt in England und Deutschland allseitig unbedingte Anerkennung. Eine eingehende Behandlung der zugehörigen Theorie von C. Runge findet sich in der „Zeitschrift für Vermessungswesen“ 1895, S. 321—331, ein kürzerer Aufsatz von J. Hamann in derselben Zeitschrift 1896, S. 643 bis 650. Dem Letzteren entnehme ich die folgenden Angaben.

Umläuft die Spitze K im Sinne des Uhrzeigers eine Fläche V (Fig. 4) mit der Anfangslage FS des Fahrarms, so beschreibt T eine

Fig. 4.



Kurve V'. P und P' mögen zwei beliebige zugehörige Punkte der Kurven V und V' bedeuten, F' sei der zu F gehörige Punkt in der Endlage des Fahrarms, l die Entfernung des Punktes F' von SF. Nun verschiebt man V' parallel zu SF in die Lage V'', so dass F auf S fällt. Die Kurve V'' schliesst dann mit einem Bogen von V eine „Restfläche“ J ein. Die Fläche V kann dann betrachtet werden als Summe unendlich vieler unendlich schmaler Teile von Kreisringflächen. Der Bogen geht durch P, hat als Mittelpunkt P' und als Radius t und reicht bis zu einem Punkt P'' des zugehörigen Teiles der Kurve V''. Je nachdem diese Bogen die Fläche J einmal oder zweimal überstreichen, ist der Inhalt der Fläche V:

$$V = lt + J,$$

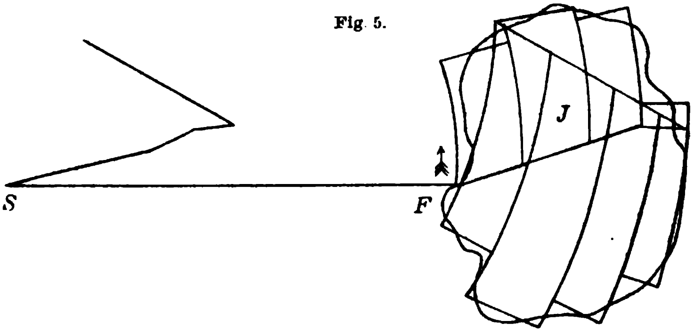
oder

$$V = lt - J.$$

Ersteres tritt ein, wenn V vom Rädchen aus gesehen vor dem letzten Kreisbogen durch F (Fig. 4), letzteres, wenn sie hinter dem-

selben liegt (Fig. 5). Um den Betrag der Restfläche möglichst klein zu machen, legt man den Fahrarm anfangs so, dass seine Normale in F die Fläche V ungefähr hälftet. Eine Restfläche J_r wird dann

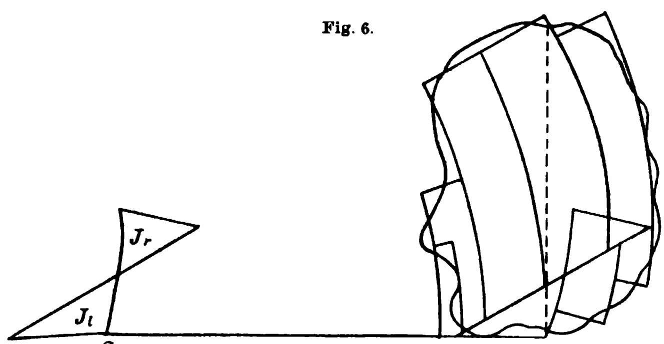
Fig. 5.



positiv, die andere J_l negativ. Man erhält dann Figur 6, in die einige Kreisbogen hinzugezeichnet sind.

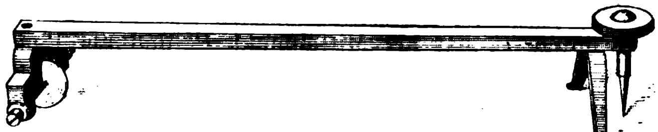
Von einer Erfindung kann aber bei keinem dieser Instrumente die Rede sein, sondern nur von einer neuen Konstruktion, wie ich

Fig. 6.



(nach den Angaben des Herrn Prof. Mehmke) aus einer Abhandlung von v. Braunmühl in dem „Kataloge mathematischer Modelle", herausgegeben von W. Dyck, München 1892, S. 85 ersehe. Darnach hat Graf Giambatista Suardi 1752 ein Instrument angegeben, das

Fig. 7.



sowohl die Traktrix von Huyghens als auch die logarithmische Linie zeichnet. Das Rädchen hat dort keine Farbe, sondern drückt seine Zähnchen in die Zeichenfläche ein. Der Fahrarm ist eine Schiene, die sich mit dem einen Ende in der Rinne eines prismatischen Lineals verschiebt.

Der Traktoriograph von Kleritj unterscheidet sich nur wenig von dem, die Traktorien ebenfalls mit Farbe genau zeichnenden Stangenplanimeter, welches die Firma Eckert und Hamann in Friedenau bei Berlin in den Handel gebracht hat; der Preis des letzteren Instrumentes (siehe Fig. 7) ist aber niedriger (15 Mark gegen 22 Mark).

Ergänzende Bemerkungen zu vorstehendem Aufsatze.

Vom Herausgeber.

Nachdem ich die Quellen eingesehen habe, kann ich den Mitteilungen des Herrn Korselt über Traktoriographen noch folgendes hinzufügen.

Schon vor Suardi hat der (auch als Erfinder einer Rechenmaschine bekannte) Marchese Poleni* einen Traktoriographen konstruiert, bei dem die Rolle mit scharfem Rande (von Poleni Rotula signatoria genannt) verwendet ist. Besagte Rolle, als deren Erfinder wir also Poleni anzusehen haben, so lange nicht ein früheres Vorkommen derselben nachgewiesen ist, bildet bekanntlich einen wesentlichen Bestandteil zahlreicher, der Neuzeit angehöriger Integrationsapparate.** Suardi, der übrigens selbst auf Poleni hinweist, hat den ganzen Apparat vereinfacht. Er beschränkt sich nicht auf den Fall der Huyghensschen Traktorie — Basis oder Direktrix eine gerade Linie —, sondern sagt ausdrücklich (unter Bezugnahme auf eine Abbildung), dass, wenn die Leitlinie z. B. ein auf Papier gezeichneter Kreis sei (von beliebigen Leitlinien ist vorher die Rede gewesen), es genüge, an der Stange, welche die Rolle trägt, einen Stift zu befestigen und letzteren der Leitlinie entlang zu führen.***

Die Bestimmung von Punkten der Kettenlinie und der logarithmischen Kurve mit Hilfe der Traktorie einer Geraden, welche Aufgabe Herr Kleritj u. a. behandelt, wird auch von Poleni a. a. O. (unter Hinweis auf Arbeiten von Huyghens u. a.) ausführlich besprochen.

Die prinzipielle Wichtigkeit der Erkenntnis, dass mit Hilfe eines so überaus einfachen Mechanismus z. B. die Konstruktion transcendenter Zahlen, wie π und e, theoretisch genau ausführbar ist, wird man nicht unterschätzen dürfen und man hat deshalb m. E. Ursache, Herrn Kleritj für seine Anregungen dankbar zu sein, trotzdem sein

* Joannis Poleni... Epistolarum Mathematicarum Fasciculus, Patavii 1729. Die „organische Konstruktion", d. h. mechanische Erzeugung der (Huyghensschen) Traktorie und der logarithmischen Kurve wird in einem Briefe an Jacob Hermann behandelt.

** Vergleiche etwa die Schrift: Abdank-Abakanowicz, Die Integraphen, Deutsch von Bitterli, Leipzig 1889, B. G. Teubner.

*** S. 36 des fraglichen Werkes, dessen Titel ist: Nuovi istromenti per la descrizione di diverse curve antiche e moderne... Del Conte Giambatista Suardi Bresciano. In Brescia 1752.

Traktoriograph nicht als neue Erfindung gelten kann und trotzdem die Anwendungen, die er davon macht, nicht alle neu sind.

Leibniz, der sich auch mit der Konstruktion eines Traktoriographen beschäftigt hat,* sah in ihm hauptsächlich ein Hilfsmittel, Kurven zu quadrieren; ob aber die theoretisch genaue Methode, die Leibniz im Auge hatte, mit der angenäherten Bestimmung des Flächeninhalts einer beliebig begrenzten Figur nach Prytz irgend etwas zu thun hat, bin ich ausser Stande zu sagen.

Ich erwähne noch, dass der Traktoriograph auch zur angenäherten Bestimmung des Schwerpunkts einer beliebig begrenzten ebenen Fläche benützt werden kann (vergl. den Schluss der von Herrn Korselt oben angeführten Abhandlung von C. Runge).**

Nachtrag zu dem Aufsatze: „Über einen Mechanismus, durch den ein beliebiger Winkel in eine beliebige ungerade Anzahl gleicher Teile geteilt werden kann".

(Diese Zeitschr. Bd. 42 S. 276.)

Von Reallehrer **A. Korselt** in Meerane i. S.

Herr Prof. Dr. Heymann in Chemnitz hat mich brieflich darauf aufmerksam gemacht, dass der Gedanke, der dem von mir im Jahrgange 42 dieser Zeitschrift beschriebenen „Claussschen Winkel" zu Grunde liegt, keineswegs neu ist, sondern sich schon in einem von Th. Ceva 1694 angegebenen Instrumente verwirklicht findet. Eine Abbildung habe ich durch die Gefälligkeit des Herrn Prof. Dr. Hey-

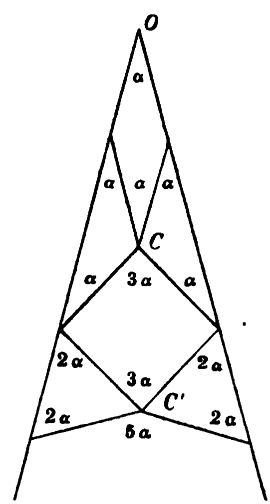
---

* Siehe den Brief an Huyghens vom 1./11. Oktober 1693, Leibnizens mathematische Schriften, herausgegeben von C. J. Gerhardt, 1. Abteilung, Bd. 2, 1850, S. 164 flg.

** Die Figuren 1 und 7 sind mit gütiger Erlaubnis des Herrn Prof. Dr. E. Hammer nach Instrumenten der geodätischen Sammlung der technischen Hochschule in Stuttgart angefertigt worden. An dem Traktoriographen Fig. 1 fehlt übrigens die in der Beschreibung von Kleritj in Dinglers Journal angegebene Nadel, mit welcher genau an der Stelle des Berührungspunktes t des Rädchens T ein Stich ins Papier gemacht werden kann. Bei Hamanns Stangenplanimeter ist ein (in Fig. 7 nicht sichtbares) Farbkissen über dem Rädchen angebracht. Die das Rädchen tragende Gabel sitzt fest an der Stange, so dass nur Traktorien für eine und dieselbe Tangentenlänge beschrieben werden können. Es lag eben Hamann wie Prytz das Zeichnen beliebiger Traktorien ebenso fern, wie Kleritj die Planimetrierung beliebig begrenzter Flächen. Natürlich könnte auch an Hamanns Stangenplanimeter die Entfernung zwischen Rädchen und Fahrstift veränderlich gemacht werden, wodurch der Preisunterschied zwischen beiden Instrumenten wahrscheinlich verschwinden würde. Die Litteratur über Stangenplanimeter (bis Ende 1897) ist ausführlich angegeben in den trefflichen Berichten von E. Hammer über die Fortschritte des Kartenwesens im Geographischen Jahrbuch, Bd. XIX, S. 26 und Bd. XX, S. 475. Siehe auch die neue elementare Ableitung von L. Schleiermacher, Zeitschr. für Vermessungswesen, 1898, S. 408.

mann in J. Leupold, theatrum arithmetico-geometricum 1727, Tab. XXVII, Fig. VII (Beschreibung S. 167) gesehen.

Das Instrument von Ceva ist auch ein Zirkel, an dessen Schenkeln auf der Innenseite gleichlange drehbare, aber nicht verschiebbare Gelenkstücke befestigt sind (siehe die stark verkleinerte schematische Darstellung in nachstehender Figur). Die Mittelpunkte O, C, C' ... sind durchbohrt, so dass sich die Scheitel der zu teilenden Winkel ziemlich scharf einstellen lassen und man nur noch die Schenkel in drehende Bewegung zu versetzen braucht. Bei dem Claussschen Winkel muss man Schenkel und Scheitel gleichzeitig einstellen, was einiges Probieren erfordert. Insofern steht der Claussche Winkel dem Ceva'schen Instrumente nach. Dafür braucht Ceva die doppelte Anzahl von Gliedern, die sich allerdings nicht kreuzen. Bei Versuchen habe ich den Claussschen Winkel hinlänglich genau befunden; das Cevasche Instrument ist noch nicht hergestellt, man kann also nicht wissen, ob es ebenso schnell arbeitet, oder ob es das Papier zu sehr zersticht.



Übrigens ist es nicht nötig, für höhere Konstruktionen besondere Instrumente zu finden, wenn man innerhalb der Grenzen einer gewöhnlichen Zeichenfläche eine schnelle, saubere und hinlänglich genaue Annäherungskonstruktion kennt. Solche giebt es für alle altberühmten geometrischen Probleme, siehe z. B. Baltzer, analytische Geometrie § 25. Interessant ist es aber zu sehen, wie alte Gedanken immer wieder gefunden werden. Auch Newton in der Arithm. univ. 1732 beschreibt in dem Probl. XXIX ein ähnliches Werkzeug, das dort auf Tab. III. abgebildet ist.

Auch muss nach der Mitteilung des Herrn Dr. Heymann die am Ende meiner Bemerkung gemachte Angabe, dass durch den Claussschen Winkel alle Dreiecksaufgaben einer gewissen Gattung auflösbar seien, dahin eingeschränkt werden, dass dies nur für diejenigen Aufgaben der genannten Gattung gilt, die auf algebraisch auflösbare Gleichungen führen. Diese brauchen aber nicht, entgegen der Meinung Dr. Heymanns, Winkelteilungsgleichungen zu sein. Denn nach einem berühmten Satze von Kronecker in den Berliner Monatsberichten von 1853 (zuerst von Weber bewiesen, vergl. dessen Lehrbuch der Algebra Bd. II, § 179 flg.) ist jede Abelsche Gleichung auch eine Kreisteilungsgleichung, d. h. ihre Wurzeln sind rationale Funktionen von Einheitswurzeln, sind also durch Winkelteiler konstruierbar.

Über die Mercator'sche Projektion.

Von

H. E. Timerding

in Strassburg.

Hierzu Tafel VII Fig. 1—4.

Die Mercator'sche Projektion hat nicht allein trotz der unmässigen Vergrösserung der Polarregionen gegenüber den Gegenden am Äquator eine grosse praktische Bedeutung, weil sie bei der Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen die Meridiane und Breitenkreise als gerade Linien in der Ebene abbildet, und ist, weil sie infolgedessen auch immer den Weg eines unverändert nach derselben Himmelsrichtung steuernden Schiffes als gerade Linie darstellt, für Seekarten fast ausschliesslich im Gebrauch, sie ist auch in rein geometrischer Hinsicht merkwürdig, weil sie zu einer interessanten Gattung von transcendenten Kurven hinführt und so für die systematische Behandlung dieser gegenüber den algebraischen bisher sehr vernachlässigten Kurven einen ersten Ansatz liefern kann.

1. Wir denken uns einen Cylinder C, welcher eine Kugel K, deren Radius wir gleich der Längeneinheit annehmen, längs eines grössten Kreises berührt. Sei ferner für diesen grössten Kreis als Äquator die geographische Breite eines Punktes der Kugel mit θ und seine geographische Länge mit ξ bezeichnet. Bedeute endlich η den Abstand eines Punktes auf dem Cylinder von dem Äquator. Wir lassen dann den Kreisfunktionen von θ hyperbolische Funktionen von η entsprechen, indem wir setzen:

$$1)\qquad \mathfrak{Sin}\,\eta = \operatorname{tang}\theta, \quad \text{also} \quad \mathfrak{Cos}\,\eta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Tang}\,\eta = \sin\theta.$$

Durch diese Gleichungen ist eine Abbildung der Kugel auf den Cylinder vermittelt, bei der die Punkte des Äquators sich selbst entsprechen, die Meridiane der Kugel durch die Seitenlinien und die Breitenkreise durch die Kreise des Cylinders dargestellt werden. Diese Abbildung ist weiter, weil:

$$2) \qquad d\xi^2 + d\eta^2 = \frac{1}{\cos\theta^2}(d\theta^2 + \cos\theta^2 d\xi^2)$$

wird, eine in den kleinsten Teilen ähnliche und mit der Mercator'schen Cylinderprojektion identisch. Den Cylinder C können wir uns längs einer Seitenlinie aufgeschnitten und auf einer Ebene ε ausgebreitet denken. In geometrischer Beziehung ist es aber vorteilhaft, das Bild des so gewonnenen ebenen Streifens unendlich oft zu wiederholen und mit diesen Bildern die ganze Ebene zu überdecken, als ob der Cylinder gleich einer Farbwalze über sie weggewälzt wäre und sein Bild unendlich oft auf sie übertragen hätte.

2. Die Koordinaten eines Kugelpunktes, bezogen auf drei senkrechte Durchmesser, von denen zwei in der Ebene des Äquators liegen, der dritte also die Pole verbindet und die Axe der Kugel ist, sind, ausgedrückt durch Breite und Länge:

$$3) \qquad x = \cos\theta\cos\xi, \quad y = \cos\theta\sin\xi, \quad z = \sin\theta,$$

und die Gleichung eines Kreises auf der Kugel hat die Form:

$$4) \qquad \alpha + \beta\sin\theta = \cos\theta(\gamma\cos\xi + \delta\sin\xi).$$

Dividieren wir durch $\cos\theta$, so geben die Beziehungen 1) die Gleichung der entsprechenden Kurve auf dem Cylinder C oder in der Mercator-Ebene ε:

$$5) \qquad \alpha\,\mathfrak{Cof}\,\eta + \beta\,\mathfrak{Sin}\,\eta = \gamma\cos\xi + \delta\sin\xi.$$

Diese Kurve wollen wir als eine Mercator-Kurve erster Ordnung bezeichnen.

3. Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $\alpha^2 > \beta^2$, $\alpha^2 < \beta^2$ oder $\alpha^2 = \beta^2$ ist. Im ersten Falle schneidet die Ebene des Kreises die Kugelaxe ausserhalb, im zweiten Falle innerhalb der Kugel, so dass der Kreis selbst einen der Pole umschliesst. Im Grenzfalle geht der Kreis und seine Ebene durch einen Pol hindurch. Dies liefert uns zwei verschiedene Typen von Mercator-Kurven und einen Übergangstypus. Im ersten Falle nämlich lässt sich der Gleichung 5) die Form geben:

$$6) \qquad \mathfrak{Cof}\,(\eta - \eta_0) = m\cos(\xi - \xi),$$

im zweiten Falle kann man sie schreiben:

$$7) \qquad \mathfrak{Sin}\,(\eta - \eta_0) = n\sin(\xi - \xi_0),$$

und im Grenzfalle wird sie:

$$8) \qquad \mathfrak{Cof}\,\eta + \varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\eta = e^{\varepsilon\eta} = p\cos(\xi - \xi_0)$$

für $\varepsilon = \pm 1$.

4. Eine beliebige Mercator-Kurve geht also durch Parallelverschiebung aus einer der folgenden hervor:

$$9) \qquad \mathfrak{Cof}\,\eta = m\cos\xi,$$

$$10) \qquad \mathfrak{Sin}\,\eta = n\sin\xi,$$

$$11) \qquad \eta = \varepsilon\log\cos\xi.$$

Die Kurven 9) entsprechen den Kreisen der Kugel, deren Ebene

$$x = \frac{1}{m}$$

die x-Axe rechtwinklig schneidet, die Kurven 10) den grössten Kreisen, deren Ebene

$$z = ny$$

durch die x-Axe geht. Diese beiden Kreisscharen auf der Kugel bilden ein isothermisches System und damit auch die entsprechenden Kurvenscharen in der Mercator-Ebene, jede Kurve der einen Schar schneidet alle Kurven der anderen Schar unter rechten Winkeln. Figur 1 stellt einige dieser Kurven dar.

4. Die Kurven 9) des ersten Typus setzen sich aus kongruenten Ovalen zusammen, deren jedes wieder aus vier symmetrischen Vierteln besteht, also einen Mittelpunkt hat. Diese Mittelpunkte folgen sich in den Abständen 2π auf der ξ-Axe. Die Kurven 10) des zweiten Typus sind wellenähnliche Linien, deren kongruente und aus zwei symmetrischen Hälften bestehende Stücke abwechselnd unter und über der ξ-Axe liegen und die Länge π haben.

5. Die doppelt unendlich vielen Mercator-Kurven des Übergangstypus sind alle kongruent und entstehen aus einander durch Parallelverschiebung oder Spiegelung an solchen Geraden, die zur ξ-Axe oder η-Axe parallel sind. Durch Verschiebung um 2π in der Richtung der ξ-Axe gehen sie in sich über. Ihre einzelnen Teile haben eine zur η-Axe parallele Symmetrieaxe und nähern sich asymptotisch zweien von dieser um $\frac{\pi}{2}$ nach links und rechts entfernten Geraden. Von einer „Scheiteltangente“ — für die Kurve 11) ist es die Gerade $\eta = 0$ — werden die Kurven unendlich oft, nämlich in ihren „Scheiteln“, das heisst ihren tiefsten resp. höchsten Punkten, berührt.

Besonders ausgezeichnet sind diese Kurven dadurch, dass man aus einer von ihnen die sämtlichen Kurven eines isothermischen Systems erhält, indem man die Kurve erst um alle möglichen Strecken in der Richtung der η-Axe und dann alle Kurven der so gewonnenen ersten Schar um

$$\frac{\pi}{2}, \quad \pi, \quad \frac{3\pi}{2}$$

in der Richtung der ξ-Axe verschiebt. Von den so erhaltenen vier Scharen sind die erste und dritte zu der zweiten und vierten orthogonal, wie es Figur 2 zeigt.

6. Zu der konformen Abbildung, die durch die Beziehung eines solchen isothermischen Kurvensystems auf zwei sich rechtwinklig kreuzende Scharen paralleler Geraden in einer anderen Ebene vermittelt ist, gelangen wir wie folgt. Wir projizieren die Kreise auf der Kugel K, deren Bilder die in Rede stehenden Kurven sind, aus dem Pol, den sie enthalten, durch Ebenen. Bringen wir mit den letzteren

die Äquatorebene α zum Schnitt, so ist diese dadurch mit der Mercator-Ebene ε in die verlangte Beziehung gesetzt, die, wie man so findet, durch die Gleichungen:

$$12)\qquad X = \cos\xi\cdot e^{\varepsilon\eta},\quad Y = \sin\xi\cdot e^{\varepsilon\eta},\qquad \varepsilon = \pm 1,$$

ausgedrückt wird, wo χ und y rechtwinklige Koordinaten in der Äquatorebene $z = 0$ bezeichnen.. Diese Verwandtschaft drückt sich einfacher aus durch

$$13)\qquad R = e^{\varepsilon\eta},$$

indem dann

$$X = R\cos\xi,\quad Y = R\sin\xi$$

wird und R den Abstand des Punktes der Äquatorebene vom Mittelpunkte des Äquatorkreises bezeichnet. Diese konforme Abbildung ist von Herrn Holzmüller im 16. Bande dieser Zeitschrift ausführlich betrachtet und diese Betrachtung in seiner Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften wiederholt. An letzterer Stelle giebt er auch eine Gleichungsform der Mercator-Kurven an und schlägt diese Bezeichnung vor.*

7. Den eigentümlichen Charakter der Mercator-Kurven erkennen w erst recht, wenn wir ihre Rektifikation versuchen. Für die Kurve 11) wird:

$$14)\qquad \frac{d\eta}{d\xi} = -\varepsilon\,\mathrm{tang}\,\xi,$$

es ist also der Neigungswinkel an einer Stelle der Kurve gegen die Scheiteltangente dem Abstande des Kurvenpunktes von der nächstgelegenen Symmetrieaxe gleich. Für das Linienelement ergiebt sich:

$$15)\qquad ds = \frac{d\xi}{\cos\xi}.$$

Aus der Gleichung 9) folgt:

$$d\eta = \frac{-m\sin\xi\,d\xi}{\sqrt{m^2\cos\xi^2 - 1}},\quad d\xi = \frac{-\frac{1}{m}\,\mathfrak{Sin}\,\eta\,d\eta}{\sqrt{1-\frac{1}{m^2}\,\mathfrak{Cos}\,\eta^2}},$$

also für das Linienelement:

$$16)\qquad ds = \frac{\sqrt{1-m^2}\cdot d\xi}{\sqrt{1-m^2\cos\xi^2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{m^2}}\cdot d\eta}{\sqrt{1-\frac{1}{m^2}\,\mathfrak{Cos}\,\eta^2}},$$

oder:

* Auch Herr Greenhill hat, wie ich nachträglich bemerke, einen Ansatz zur Behandlung dieser Kurven gemacht (Messenger of Mathem., Bd. XVI und XX), die er Sumnersche Linien nennt. Er erwähnt ihre Rektifikation durch elliptische Integrale, indessen teilt er nicht mit, wie sie, indem man die Bogenlänge durch beide Koordinaten ausdrückt, naturgemäss auf die doppelte Periodizität der elliptischen Funktionen führen, worin gerade, wie mir scheint, ihr Nutzen für die elementare Theorie dieser Funktionen liegt.

17) $$ds = \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k_1{}^2 \sin\xi^2}} = \frac{d\eta}{\sqrt{1 + k_2{}^2 \mathfrak{Sin}\,\eta^2}} = \frac{i\,d\eta'}{\sqrt{1 - k_2{}^2 \sin\eta'^2}},$$

für

18) $$i\eta' = \eta, \quad k_1{}^2 = \frac{-m^2}{1 - m^2}, \quad k_2{}^2 = \frac{1}{1 - m^2},$$

also

$$k_1{}^2 + k_2{}^2 = 1.$$

Ebenso folgt aus der Gleichung 10):

19) $$ds = \frac{\sqrt{1 + n^2} \cdot d\xi}{\sqrt{1 + n^2 \sin\xi^2}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \cdot d\eta}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\mathfrak{Sin}\,\eta^2}},$$

oder

20) $$ds = \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k_1'^2 \cos\xi^2}} = \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k_2'^2 \mathfrak{Cos}\,\eta^2}} = \frac{i\,d\eta'}{\sqrt{1 - k_2'^2 \cos\eta'^2}},$$

für

21) $$i\eta' = \eta, \quad k_1'^2 = \frac{n^2}{1 + n^2}, \quad k_2'^2 = \frac{1}{1 + n^2},$$

also

$$k_1'^2 + k_2'^2 = 1.$$

Die Bogenlängen der Mercator-Kurven drücken sich also durch elliptische Integrale erster Gattung aus. Die vier Grössen $\cos\xi$, $\sin\xi$, $\mathfrak{Cos}\,\eta$, $\mathfrak{Sin}\,\eta$ sind für einen Punkt der Mercator-Kurve gleich den mit gewissen Konstanten multiplizierten elliptischen Funktionen $\sin\mathrm{am}\, s$, $\cos\mathrm{am}\, s$, $\Delta\mathrm{am}\, s$ des zugehörigen, von einer bestimmten Stelle aus gerechneten Bogens s. Die Perioden ergeben sich durch Integration nach ξ über Vielfache von π und nach η über Vielfache von πi.

8. Wenn man die Kurven der Mercatorschen Bildebene ε, die den Kreisen der Kugel entsprechen, als Mercator-Kurven erster Ordnung bezeichnet, so hätte man dementsprechend Mercator-Kurven zweiter Ordnung diejenigen Kurven zu nennen, die sich durch das Verschwinden einer homogenen quadratischen Funktion der vier Grössen

$$\cos\xi, \quad \sin\xi, \quad \mathfrak{Cos}\,\eta, \quad \mathfrak{Sin}\,\eta$$

darstellen. Diese Kurven hängen infolge der identischen Relation

22) $$\cos\xi^2 + \sin\xi^2 = \mathfrak{Cos}\,\eta^2 - \mathfrak{Sin}\,\eta^2$$

von acht Parametern ab und entsprechen den sphärischen Kurven, die durch beliebige Kegel zweiten Grades aus der Kugel ausgeschnitten werden.

9. Man kann aber aus der Gesamtheit der Mercator-Kurven zweiter Ordnung noch eine besondere Gattung herausgreifen, deren Gleichung die Veränderlichen ξ und η in keinem Gliede vereinigt enthält, also die Form hat:

23) $$\begin{cases} \alpha_1 \cos\xi^2 + 2\alpha_2 \cos\xi \sin\xi + \alpha_3 \sin\xi^2 = \\ \beta_1 \mathfrak{Cos}\,\eta^2 + 2\beta_2 \mathfrak{Cos}\,\eta\, \mathfrak{Sin}\,\eta + \beta_3 \mathfrak{Sin}\,\eta^2. \end{cases}$$

Diese Gleichung geht, wenn man in sie die verdoppelten Veränderlichen:

24) $$\xi' = 2\xi, \quad \eta' = 2\eta$$

einführt, in die folgende über:

25) $$\begin{cases} (\alpha_1 - \alpha_3)\cos\xi' + 2\alpha_2 \sin\xi' + (\alpha_1 + \alpha_3) = \\ (\beta_1 + \beta_3)\mathfrak{Cos}\,\eta' + 2\beta_2 \mathfrak{Sin}\,\eta' + (\beta_1 - \beta_3), \end{cases}$$

die dieselbe Form hat wie die Gleichung der Mercator-Kurven erster Ordnung, nur dass ein konstantes Glied hinzugetreten ist. Die so dargestellten Kurven lassen sich durch blosse Parallelverschiebung auf die folgenden Formen zurückführen:

26) $$p\cos\xi' + q = \mathfrak{Cos}\,\eta' \text{ (erster Typus)},$$

27) $$s\sin\xi' + t = \mathfrak{Sin}\,\eta' \text{ (zweiter Typus)},$$

dazu ein Übergangstypus:

28) $$k\cos\xi' + \xi = e^{\varepsilon\eta}, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Die Kurve gehört zum ersten Typus, wenn in ihrer allgemeinen Gleichungsform $(\beta_1 + \beta_3)^2 > 4\beta_2^2$, zum zweiten, wenn $(\beta_1 + \beta_3)^2 < 4\beta_2^2$, und zum Übergangstypus, wenn $(\beta_1 + \beta_3)^2 = 4\beta_2^2$ ist (vergl. 3).

10. Um die Bedeutung dieser Unterscheidung klarzulegen, gehen wir darauf zurück, dass die Kurve 23) der sphärischen Kurve entspricht, die durch die Gleichung:

29) $$\alpha_1 x^2 + 2\alpha_2 xy + \alpha_3 y^2 = \beta_1 + 2\beta_2 z + \beta_3 z^2$$

in Verbindung mit der Kugelgleichung:

30) $$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

dargestellt wird. Von den vier Kegeln, die durch diese sphärische Kurve gehen, sind zwei Cylinder, deren Axen in der Äquatorebene liegen und mit den Hauptaxen der Kegelschnitte:

$$\alpha_1 x^2 + 2\alpha_2 xy + \alpha_3 y^2 = \text{const.}$$

zusammenfallen. Von den beiden anderen Kegeln ist die z-Axe eine Hauptaxe, und ihre Mittelpunkte sind auf derselben durch die quadratische Gleichung zu bestimmen:

31) $$(\beta_1 + \lambda) + 2\beta_2 z + (\beta_3 - \lambda)z^2 = 0,$$

in der λ so zu wählen ist, dass die Diskriminante der Gleichung, nämlich:

$$(\beta_1 + \lambda)(\beta_3 - \lambda) - \beta_2^2,$$

verschwindet. Also gilt für λ die quadratische Gleichung:

32) $$\lambda^2 + (\beta_1 - \beta_3)\lambda + (\beta_2^2 - \beta_1\beta_3) = 0.$$

Die Diskriminante dieser Gleichung ihrerseits ist:

33) $$B = \left(\frac{\beta_1 + \beta_3}{2}\right)^2 - \beta_2^2.$$

Ist $B > 0$, also

$$\left(\frac{\beta_1 + \beta_3}{2}\right)^2 > \beta_2^2,$$

so sind die beiden Kegelmittelpunkte reëll, und gleichzeitig gehört die Kurve der Mercator-Ebene zum ersten Typus; ist $B < 0$, so sind die

beiden Kegel imaginär, und die Mercator-Kurve gehört zum zweiten Typus. In den beiden Fällen sind auch die zugehörigen sphärischen Kurven von verschiedener Art, im ersten Falle erhalten wir eine aus zwei getrennten Zügen bestehende und im zweiten Falle eine einzügige Kurve. Im Grenzfalle $B = 0$ wird:

$$\beta_2 = \varepsilon\,\frac{\beta_1 + \beta_3}{2}, \qquad \lambda = \pm\frac{\beta_1 - \beta_3}{2}, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

und wenn wir dies in die Gleichung für die Koordinaten der Kegelmittelpunkte einsetzen:

$$z = -\varepsilon.$$

In diesem Falle ergiebt sich also nur ein einziger Kegel, dessen Mittelpunkt auf der Kugel in einem der beiden Pole liegt, und die sphärische Kurve hat einen Doppelpunkt.

11. Der Gleichung 26), die den Mercator-Kurven des ersten Typus entspricht, lässt sich durch Wiedereinführung der Veränderlichen ξ, η die Form geben:

34) $$A\cos\xi^2 + B\sin\xi^2 = \mathfrak{Sin}\,\eta^2$$

indem man setzt:

35) $$A = \tfrac{1}{2}(-1 + p + q) \quad B = \tfrac{1}{2}(-1 - p + q).$$

Die zu dieser Gleichung gehörige Kurve korrespondiert dem sphärischen Kegelschnitt, der durch den Kegel

36) $$Ax^2 + By^2 = z^2$$

ausgeschnitten wird. Der Schar konfokaler Kegelschnitte:

37) $$\frac{x^2}{a - \varrho} + \frac{y^2}{b - \varrho} = \frac{z^2}{\varrho},$$

wo ϱ einen variabelen Parameter bezeichnet, ist somit ein isothermisches Kurvensystem:

38) $$\frac{\cos\xi^2}{a - \varrho} + \frac{\sin\xi^2}{b - \varrho} = \frac{\mathfrak{Sin}\,\eta^2}{\varrho}$$

zugewiesen, das durch Figur 3 veranschaulicht wird. Die Kurven desselben teilen sich in zwei Gattungen, und zwar ist jede Kurve der einen Gattung orthogonal zu allen Kurven, die der anderen Gattung angehören. Die Kurven der ersten Gattung, für die $a - \varrho$ und $b - \varrho$ beide das Vorzeichen von ϱ haben, bestehen aus zwei kongruenten, wellenähnlichen Zügen von der Wellenlänge π, die symmetrisch oberhalb und unterhalb der ξ-Axe liegen; die Kurven der zweiten Gattung, für die $a - \varrho$ und $b - \varrho$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, bestehen aus getrennten Ovalen. Diese sind für die ξ-Axe und je eine Parallele zur η-Axe symmetrisch, haben also Mittelpunkte, die im Abstande π auf der ξ-Axe nebeneinander liegen. Den reellen gemeinsamen Brennpunkten der sphärischen Kegelschnitte entspricht eine doppelte Punktreihe, die sich, wenn $a - b$ das Vorzeichen von b hat, ausdrückt wie folgt:

39) $$\xi = n\pi, \quad \eta = \pm \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\frac{b}{a-b}},$$

n beliebige ganze Zahl,

und um deren Punkte sich die Kurven der ersten und zweiten Gattung immer mehr zusammenziehen, jemehr sich der Parameter dem Grenzwerte b nähert.

12. Die Kurven 28) des Übergangstypus, deren entsprechende Kurven auf der Kugel aus einem Pol derselben durch quadratische Kegel projiziert werden, bilden sich, wenn man aus diesem Pol die ganze Kugel auf die Äquatorebene projiziert, in der letzteren als Kegelschnitte ab, die mit dem Äquatorkreise konzentrisch sind. Der konfokalen Kegelschnittschar

40) $$\frac{X^2}{a-\varrho} + \frac{Y^2}{b-\varrho} = 1$$

entspricht (siehe Gleichung 12) das Kurvensystem:

41) $$\frac{\cos \xi^2}{a-\varrho} + \frac{\sin \xi^2}{b-\varrho} = e^{-2\varepsilon\eta}, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Auch die Kurven dieses Systems zerfallen in zwei Gattungen, derart, dass zwei orthogonale Kurven stets verschiedenen Gattungen angehören. Sei

$$b < a$$

so erhalten wir nur dann eine reelle Kurve, wenn $\varrho < a$, und zwar eine Kurve erster Gattung, wenn $\varrho < b$, eine Kurve zweiter Gattung, wenn ϱ zwischen b und a liegt. Die Kurven der ersten Gattung bestehen aus einem einzigen wellenähnlichen Zug. Die einzelnen Wellen, die die Länge π haben, sind vom tiefsten zum tiefsten oder vom höchsten zum höchsten Punkt gerechnet, kongruent und gegen eine Parallele zur η-Axe symmetrisch. Die Kurven der zweiten Gattung bestehen ebenfalls aus symmetrischen Teilen, die aus einander durch Verschiebung um Vielfache von π in der Richtung der ξ-Axe hervorgehen, die einzelnen Teile sind aber völlig getrennt und schicken je zwei Äste ins Unendliche parallel zur η-Axe. Figur 4 stellt Kurven beider Gattungen dar.

Den gemeinsamen Brennpunktepaaren der Kegelschnitte 40) entsprechen zwei Punktreihen:

42) $$\begin{cases} \xi = n\pi, \quad \eta = \varepsilon \log \sqrt{\dfrac{1}{a-b}}, \\ \xi = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi, \quad \eta = \varepsilon \log \sqrt{\dfrac{1}{b-a}}, \end{cases}$$

n beliebige ganze Zahl,

von denen immer eine reell und eine imaginär ist.

13. Um die Gleichung 41) auf die Form 28) zu bringen, setze man

43) $$r = \varrho - \frac{a+b}{2}, \quad c = \frac{a-b}{2},$$

so wird sie:

44) $$c \cos \xi' + r = (c^2 - r^2) e^{\eta'}.$$

Durch Veränderung von r erhalten wir die verschiedenen Kurven des isothermischen Systems, und zwar eine Kurve erster Gattung, wenn $r < -c$, eine Kurve zweiter Gattung, wenn $-c < r < +c$. Ist $r > c$, so wird die Kurve imaginär. Für $r = 0$ ist die Kurve nur durch den Maßstab von den Kurven 8) verschieden.

14. Suchen wir noch die Bilder der Mercator-Kurven des ersten und zweiten Typus in der Äquatorebene, so ist zu beachten, dass, wie sich die Kurven des ersten Typus auf die Bilder der sphärischen Kurven:

45) $$Ax^2 + By^2 = z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

zurückführen liessen, die Kurven des zweiten Typus auf die Bilder der Kurven:

46) $$A'x^2 + B'y^2 = z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

reduziert werden können. Dann findet man mit Hilfe der Beziehungen

47) $$X = \frac{x}{1+z}, \quad Y = \frac{y}{1+z}, \quad X^2 + Y^2 = \frac{1-z}{1+z}$$

als Bild der Kurve 45) und der zugehörigen Mercator-Kurve in der Äquatorebene:

48) $$(X^2 + Y^2 - 1)^2 = 4AX^2 + 4BY^2$$

und als Bild der Kurve 46) und der entsprechenden Mercator-Kurve des zweiten Typus:

49) $$(X^2 + Y^2)^2 + 4A'X^2 + 4B'Y^2 = 1.$$

Diese Kurven sind identisch mit den von Siebeck im 57. Bande des Crelleschen Journals behandelten, auf die die durch die elliptischen Funktionen Jacobis vermittelten konformen Abbildungen zweier Ebenen aufeinander hinleiten, und stellen die drei verschiedenen Arten dieser Kurven dar, auf gewisse Normalformen reduziert. Die Gleichung 48) giebt eine Kurve der ersten oder zweiten Art, je nachdem A und B gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, je nachdem also die zugehörige Mercator-Kurve des ersten Typus von der ersten oder zweiten Gattung ist.

Das Problem der 15 Pensionatsdamen.

Von

A. F. H. Mertelsmann,

Hamburg.

Das Problem der 15 Pensionatsdamen lautet: „Die Vorsteherin eines Pensionats wünscht die 15 Damen ihrer Pension täglich in fünf Reihen zu je dreien spazieren gehen zu lassen. Wie ist die Anordnung zu treffen, damit im Laufe einer Woche jede Dame mit jeder anderen einmal in derselben Reihe zusammengeht?“

Die Aufgabe wurde zuerst im Jahre 1850 von Kirkmann in einer englischen Zeitschrift veröffentlicht. Englische Mathematiker haben dann das Problem verschiedentlich behandelt. In deutscher Sprache findet sich die Aufgabe nebst einer Lösung, jedoch ohne Angabe der Lösungsmethode, in Professor Schuberts „Zwölf Geduldspielen“ (Berlin 1895). Rouse Ball führt in seinen „Mathematical Recreations“ zwei Lösungsweisen an. Die eine, von Mr. Anstice stammend, giebt drei verschiedene Lösungen, während die andere, von Mr. Frost herrührend, 15 567 552000 Lösungen liefert.

Der Verfasser dieser Arbeit, dem kürzlich die Aufgabe vorgelegt wurde, fand, ohne Kenntnis von den früheren Arbeiten zu haben, die im folgenden näher beschriebene Lösungsmethode, nach welcher sich, wie weiter unten gezeigt werden wird, über 15 Billionen verschiedene Lösungen ergeben.

Man bezeichne je drei am Sonntage zusammengehende Damen mit gleichen Buchstaben, die durch die Ziffern 1, 2, 3 unterschieden sind. Die Anordnung für den Sonntag würde also diese Form haben:

$$a_1\, a_2\, a_3$$
$$b_1\, b_2\, b_3$$
$$c_1\, c_2\, c_3$$
$$d_1\, d_2\, d_3$$
$$e_1\, e_2\, e_3.$$

Nunmehr kommt es darauf an, für die übrigen sechs Tage der Woche $6 \cdot 5 = 30$ Kombinationen aufzustellen, die den Forderungen

des Problems entsprechen. Sehen wir zunächst von den Indices ab, so haben wir zur Bildung der Kombinationen die fünf Elemente a, b, c, d, e. Die Kombinationen mit Wiederholung sind nach den Bedingungen der Aufgabe und in Rücksicht auf die Anordnung am Sonntag ausgeschlossen. Es lassen sich folgende Kombinationen zu je dreien bilden: abc, abd, abe, ade, ace, acd, bcd, bce, bde, cde. Jeder Buchstabe kommt darin 6mal vor. Da an jedem der sechs Tage jeder Buchstabe 3mal auftreten muss, ist jede Kombination 3mal zu verwerten. Das giebt 30 Kombinationen.

Es erübrigt, die Indices in richtiger Weise zu verteilen. Setzen wir jedesmal die drei aus gleichen Elementen gebildeten Kombinationen unter einander, so ist nur nötig, die Ziffern für die erste Kombination jeder Gruppe zu bestimmen; in den beiden folgenden sind die Ziffern cyklisch zu erhöhen.

Wir wählen zuerst die 6 · 3 Kombinationen, welche a enthalten. Dieselben seien so geschrieben, dass je zwei unter einander stehende Gruppen ausser a kein gemeinschaftliches Glied haben.

I.	II.	III.
$a_1 b_1 c_1$	$a_1 b_2 d_2$	$a_1 b_3 e_3$
$a_2 b_2 c_2$	$a_2 b_3 d_3$	$a_2 b_1 e_1$
$a_3 b_3 c_3$	$a_3 b_1 d_1$	$a_3 b_2 e_2$

IV.	V.	VI.
$a_1 d_1 e_1$	$a_1 c_2 e_2$	$a_1 c_3 d_3$
$a_2 d_2 e_2$	$a_2 c_3 e_3$	$a_2 c_1 d_1$
$a_3 d_3 e_3$	$a_3 c_1 e_1$	$a_3 c_2 d_2$

Für jeden einzelnen der mit a_1 verbundenen Buchstaben wählen wir, von links nach rechts fortschreitend, die Ziffern 1, 2, 3; so erscheint b_1 in Gruppe I, b_2 in Gruppe II, b_3 in Gruppe III mit a_1 verbunden, während z. B. d_1, d_2, d_3 nach einander in Gruppe IV, II und VI auftreten.

Es handelt sich weiter um die drei Gruppen, deren Kombinationen mit b beginnen.

VII.	VIII.	IX.
$b_1 c_2 d_3$	$b_1 c_3 e_2$	$b_1 d_2 e_3$
$b_2 c_3 d_1$	$b_2 c_1 e_3$	$b_2 d_3 e_1$
$b_3 c_1 d_2$	$b_3 c_2 e_1$	$b_3 d_1 e_2$

Da b_1 bereits in Gruppe I mit c_1 verbunden, geben wir c in VII die Ziffer 2 und in VIII die Ziffer 3. Für d ergiebt sich dann nach II und VI in VII die Ziffer 3, so dass für IX die Ziffer 2 bleibt. Ähnlich bestimmt sich für e in VIII der Index 2 und in IX der Index 3.

Für die letzte noch übrige Gruppe:

X.

$c_1\, d_3\, e_2$

$c_2\, d_1\, e_3$

$c_3\, d_2\, e_1$

ergiebt sich leicht, dass d die Ziffer 3 und e eine 2 erhalten muss.

Nachdem so 30 Kombinationen richtig gebildet sind, schreiten wir zu der Aufgabe, dieselben auf die sechs Tage Montag bis Sonnabend in entsprechender Weise zu verteilen. Dies kann in dreifacher Weise geschehen.

Erste Anordnung (A_1).

Montag.	Dienstag.	Mittwoch.	Donnerstag.	Freitag.	Sonnabend.
$a_1\, b_1\, c_1$	$a_1\, b_2\, d_2$	$a_1\, b_3\, e_3$	$a_1\, d_1\, e_1$	$a_1\, c_2\, e_2$	$a_1\, c_3\, d_3$
$a_2\, b_2\, c_2$	$a_2\, b_3\, d_3$	$a_2\, b_1\, e_1$	$a_2\, d_2\, e_2$	$a_2\, c_3\, e_3$	$a_2\, c_1\, d_1$
$a_3\, d_3\, e_3$	$a_3\, c_1\, e_1$	$a_3\, c_2\, d_2$	$a_3\, b_3\, c_3$	$a_3\, b_1\, d_1$	$a_3\, b_2\, e_2$
$b_3\, d_1\, e_2$	$b_1\, c_3\, e_2$	$b_2\, c_3\, d_1$	$b_1\, c_2\, d_3$	$b_2\, c_1\, d_2$	$b_3\, c_2\, e_3$
$c_3\, d_2\, e_1$	$c_2\, d_1\, e_3$	$c_1\, d_3\, e_2$	$b_2\, c_1\, e_3$	$b_3\, d_3\, e_1$	$b_1\, d_2\, e_1$

Als erste Reihen schreibe man die mit a_1 gebildeten sechs Kombinationen aus Gruppe I bis VI. Mit a_2 wiederhole man dieselben Buchstaben, während a_3 mit den beiden an dem betreffenden Tage noch nicht aufgetretenen Buchstaben zu verbinden ist. Für die beiden noch fehlenden Reihen ergiebt sich z. B. für Montag, dass b und c noch je einmal, d und e hingegen noch je zweimal auftreten müssen. Also heissen die vierte und fünfte Reihe bde und cde. Die dazu gehörende Bezifferung ergiebt sich aus den zusammengestellten Kombinationen in Gruppe IX und X. Ebenso sind die übrigen Tage leicht zu bilden.

Zwei andere Anordnungen derselben Kombinationen ergeben sich, wenn man, statt a_1 und a_2 an demselben Tage mit gleichen Buchstaben zu kombinieren, a_1 und a_3 oder a_2 und a_3 diese Auszeichnung zu teil werden lässt.

Zweite Anordnung (A_2).

Montag.	Dienstag.	Mittwoch.	Donnerstag.	Freitag.	Sonnabend.
$a_1\, b_1\, c_1$	$a_1\, b_2\, d_2$	$a_1\, b_3\, e_3$	$a_1\, d_1\, e_1$	$a_1\, c_2\, e_2$	$a_1\, c_3\, d_3$
$a_2\, d_2\, e_2$	$a_2\, c_3\, e_3$	$a_2\, c_1\, d_1$	$a_2\, b_2\, c_2$	$a_2\, b_3\, d_3$	$a_2\, b_1\, e_1$
$a_3\, b_3\, c_3$	$a_3\, b_1\, d_1$	$a_3\, b_2\, e_2$	$a_3\, d_3\, e_3$	$a_3\, c_1\, e_1$	$a_3\, c_2\, d_2$
$b_2\, d_3\, e_1$	$b_3\, c_2\, e_1$	$b_1\, c_2\, d_3$	$b_3\, c_1\, d_2$	$b_2\, c_3\, d_1$	$b_2\, c_1\, e_3$
$c_2\, d_1\, e_3$	$c_1\, d_3\, e_2$	$c_3\, d_2\, e_1$	$b_1\, c_3\, e_2$	$b_1\, d_2\, e_3$	$b_3\, d_1\, e_2$

Dritte Anordnung (A_3).

Montag.	Dienstag.	Mittwoch.	Donnerstag.	Freitag.	Sonnabend.
$a_1\,b_1\,c_1$	$a_1\,b_2\,d_2$	$a_1\,b_3\,e_3$	$a_1\,d_1\,e_1$	$a_1\,c_2\,e_2$	$a_1\,c_3\,d_3$
$a_2\,d_2\,e_2$	$a_2\,c_3\,e_3$	$a_2\,c_1\,d_1$	$a_2\,b_2\,c_2$	$a_2\,b_3\,d_3$	$a_2\,b_1\,e_1$
$a_3\,d_3\,e_3$	$a_3\,c_1\,e_1$	$a_3\,c_2\,d_2$	$a_3\,b_3\,c_3$	$a_3\,b_1\,d_1$	$a_3\,b_2\,e_2$
$b_2\,c_3\,d_1$	$b_1\,c_2\,d_3$	$b_1\,c_3\,e_2$	$b_1\,d_2\,e_3$	$b_2\,c_1\,e_3$	$b_3\,c_1\,d_2$
$b_3\,c_2\,e_1$	$b_3\,d_1\,e_2$	$b_2\,d_3\,e_1$	$c_1\,d_3\,e_2$	$c_3\,d_2\,e_1$	$c_2\,d_1\,e_3$

Die bei jeder der drei obigen Lösungen gebrauchten 35 Kombinationen lassen sich endlich noch zu neun verschiedenen Anordnungen, die den Forderungen des Problems entsprechen, verwerten, wenn man nicht mehr an der anfänglichen Ordnung des Sonntags festhält.

B_1

Sonntag.	Montag.	Donnerstag.
$a_1\,a_2\,a_3$	$a_1\,b_1\,c_1$	$a_1\,d_1\,e_1$
$b_1\,c_2\,d_3$	$a_2\,b_2\,c_2$	$a_2\,d_2\,e_2$
$b_2\,c_1\,e_3$	$a_3\,b_3\,c_3$	$a_3\,d_3\,e_3$
$b_3\,d_1\,e_2$	$d_1\,d_2\,d_3$	$b_1\,b_2\,b_3$
$c_3\,d_2\,e_1$	$e_1\,e_2\,e_3$	$c_1\,c_2\,c_3$

Übrige Tage wie A_1.

B_2

Sonntag.	Montag und Donnerstag.
$a_1\,a_2\,a_3$	wie B_1
$b_3\,c_1\,d_2$	
$b_1\,c_3\,e_2$	
$b_2\,d_3\,e_1$	
$c_2\,d_1\,e_3$	

Übrige Tage wie A_2.

B_3

Sonntag.	Montag und Donnerstag.
$a_1\,a_2\,a_3$	wie B_1
$b_2\,c_3\,d_1$	
$b_3\,c_2\,e_1$	
$b_1\,d_2\,e_3$	
$c_1\,d_3\,e_2$	

Übrige Tage wie A_3.

C_1

Sonntag.	Dienstag.	Freitag.
$a_1\,a_2\,a_3$	$a_1\,b_2\,d_2$	$a_1\,c_2\,e_2$
$b_3\,c_1\,d_2$	$a_2\,b_3\,d_3$	$a_2\,c_3\,e_3$
$b_1\,c_3\,e_2$	$a_3\,b_1\,d_1$	$a_3\,c_1\,e_1$
$b_2\,d_3\,e_1$	$c_1\,c_2\,c_3$	$b_1\,b_2\,b_3$
$c_2\,d_1\,e_3$	$e_1\,e_2\,e_3$	$d_1\,d_2\,d_3$

Übrige Tage wie A_1.

C_2

Sonntag.	Dienstag und Freitag.
$a_1\,a_2\,a_3$	wie C_1
$b_2\,c_3\,d_1$	
$b_3\,c_2\,e_1$	
$b_1\,d_2\,e_3$	
$c_1\,d_3\,e_2$	

Übrige Tage wie A_2.

C_3

Sonntag.	Dienstag und Freitag.
$a_1\, a_2\, a_3$	wie C_1
$b_1\, c_2\, d_3$	
$b_2\, c_1\, e_3$	
$b_3\, d_1\, e_2$	
$c_3\, d_2\, e_1$	

Übrige Tage wie A_3.

D_1

Sonntag.	Mittwoch.	Sonnabend.
$a_1\, a_2\, a_3$	$a_1\, b_3\, e_3$	$a_1\, c_3\, d_3$
$b_2\, c_3\, d_1$	$a_2\, b_1\, e_1$	$a_2\, c_1\, d_1$
$b_3\, c_2\, e_1$	$a_3\, b_2\, e_2$	$a_3\, c_2\, d_2$
$b_1\, d_2\, e_3$	$c_1\, c_2\, c_3$	$b_1\, b_2\, b_3$
$c_1\, d_3\, e_2$	$d_1\, d_2\, d_3$	$e_1\, e_2\, e_3$

Übrige Tage wie A_1.

D_2

Sonntag.	Mittwoch u. Sonnabend.
$a_1\, a_2\, a_3$	wie D_1.
$b_1\, c_2\, d_3$	
$b_2\, c_1\, e_3$	
$b_3\, d_1\, e_2$	
$c_3\, d_2\, e_1$	

Übrige Tage wie A_2.

D_3

Sonntag.	Mittwoch u. Sonnabend.
$a_1\, a_2\, a_3$	wie D_1
$b_3\, c_1\, d_2$	
$b_1\, c_3\, e_2$	
$b_2\, d_3\, e_1$	
$c_2\, d_1\, e_3$	

Übrige Tage wie A_3.

Wünscht man aus einer bekannten Lösung eine andere abzuleiten, so braucht man nur die 15 Glieder durch eine beliebige Permutation derselben zu ersetzen, also etwa

$$\begin{matrix} a_1\, a_2\, a_3 & b_1\, b_2\, b_3 & c_1\, c_2\, c_3 & d_1\, d_2\, d_3 & e_1\, e_2\, e_3 \end{matrix}$$

durch

$$\begin{matrix} b_2\, e_3\, d_2 & b_3\, a_2\, d_1 & c_3\, e_2\, a_1 & c_1\, e_1\, c_2 & a_3\, b_1\, d_3. \end{matrix}$$

Da die Anzahl dieser Permutationen

1 307 674 368 000

beträgt, so ergeben sich ebensoviele Kombinationsgruppen, deren jede 12 Lösungen liefert. Die Gesamtzahl der Lösungen ist also das Zwölffache jener Zahl, das ist

15 692 092 416 000.

Trotz dieser grossen Zahl von Lösungsmöglichkeiten ist es nicht leicht, zwei Wochen so zusammenzustellen, dass beide keine Kom-

bination gemeinsam haben. Die beiden folgenden Lösungen entsprechen dieser Forderung. Die bezifferten Buchstaben sind hier durch die fortlaufenden Nummern 1 bis 15 ersetzt.

Erste Woche.

Sonntag.	Montag.	Dienstag.	Mittwoch.	Donnerstag.	Freitag.	Sonnabend.
1 2 3	1 4 7	1 5 11	1 6 15	1 10 13	1 8 14	1 9 12
4 5 6	2 5 8	2 6 12	2 4 13	2 11 14	2 9 15	2 7 10
7 8 9	3 12 15	3 7 13	3 8 11	3 6 9	3 4 10	3 5 14
10 11 12	6 10 14	4 9 14	5 9 10	4 8 12	5 12 13	4 11 15
13 14 15	9 11 13	8 10 15	7 12 14	5 7 15	6 7 11	6 8 13

Zweite Woche.

Sonntag.	Montag.	Dienstag.	Mittwoch.	Donnerstag.	Freitag.	Sonnabend.
1 2 6	1 4 8	1 5 15	1 9 13	1 3 11	1 12 14	1 7 10
4 5 9	2 5 12	2 9 10	2 3 4	2 14 15	2 7 13	2 8 11
7 8 12	3 7 15	3 6 8	5 7 11	4 10 12	3 5 10	3 9 12
10 11 15	6 10 13	4 7 14	6 12 15	5 8 13	4 6 11	5 6 14
3 13 14	9 11 14	11 12 13	8 10 14	6 7 9	8 9 15	4 13 15

Unmöglich scheint es mir, die von Prof. Sylvester aufgestellte Forderung zu erfüllen, die sämtlichen aus den 15 Gliedern möglichen 455 Dreierkombinationen auf die 13 Wochen eines Vierteljahres so zu verteilen, dass während desselben die gleichen 3 Personen nicht mehr als einmal zusammengehen, während für jede einzelne Woche die früheren Forderungen bestehen bleiben.

Zur Hesse'schen Konstruktion einer Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten.

Von J. Thomae in Jena.

Hesse scheint der erste gewesen zu sein, der eine Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten linear zu konstruieren gelehrt hat (Crelles Journal Bd. 24). Da Hesse die neun Punkte als reale voraussetzt und zur vollständigen Lösung der Aufgabe zuerst von einem Kegelschnitte fünf Punkte bestimmt, und die weiteren Punkte mit Hilfe dieses Kegelschnittes findet, so erweckt es den Anschein, als ob seine Konstruktion nicht von völliger Allgemeinheit, und, da er einen Hilfskegelschnitt benutzt, nicht von vollkommener Unmittelbarkeit sei. Sieht man jedoch genauer hin,

so findet man, dass die von Hesse angewandten Prinzipien hinreichen, die Aufgabe völlig allgemein und unmittelbar zu lösen, und dass es nur der Hinzufügung weniger Striche bedarf um seine Zeichnung zu einer vollkommenen zu machen. Diese Ergänzung soll hier gegeben werden. Dabei nehme ich an, um nicht besondere Fälle unterscheiden zu müssen, dass nicht vier von den gegebenen Punkten in einer Ebene liegen, was übrigens eine Erleichterung der Problemlösung bedeuten würde. Dass es wenigstens eine Lösung der Aufgabe in allen Fällen giebt, setze ich als bekannt voraus.

Wir formulieren die Aufgabe so: Sind neun Punkte gegeben, von denen beliebig viele Paare aggregiert ideale (konjugiert imaginäre) sein können, so soll

I. In einer beliebigen Ebene ε das Polarsystem linear konstruiert werden, dessen Kernkurve der Kegelschnitt (ε, F) ist, den die Ebene ε aus der gesuchten Fläche F herausschneidet).

II. Auf einer beliebigen Geraden g soll die Involution linear gefunden werden, deren Doppelpunkte die Schnittpunkte (g, F) sind, oder die der Fläche F konjugiert ist.

III. Auf einer Geraden g durch einen reellen der gegebenen Punkte soll der zweite Schnittpunkt mit F linear bestimmt werden.

Die Aufgabe III wird offenbar durch die Lösung der Aufgabe II von selbst erledigt, weil das Problem, den zweiten Doppelpunkt einer Involution zu konstruieren, deren erster gegeben ist, eine bekannte lineare Lösung hat.

Die neun Punkte seien $M_1 M'_1$, $M_2 M'_2$, $M_3 M'_3$, $M_4 M'_4$, M_5, die ersten vier Paare mögen bez. auf den Geraden $g_1 g_2 g_3 g_4$ liegen, und wenn sie nicht real sind, als Doppelpunkte von Involutionen auf diesen Geraden gegeben sein.

Hesse konstruiert die Polare eines Punktes P für die gesuchte Fläche F in folgender Weise. Er sucht zunächst die Polare von P für das Hyperboloid $(g_1 g_2 M_3 M'_3 M_5)$, welches die Geraden $g_1 g_2$ und die Punkte $M_3 M'_3 M_5$ enthält. Hesse setzt dabei $M_3 M'_3$ als reale Punkte voraus, was jedoch nicht nötig ist. Es sei k_{12} die Gerade durch M_5, die $g_1 g_2$ trifft. Gleitet eine Gerade h über $g_1 g_2 g_3$, so erzeugt sie in der Ebene (P, k_{12}) einen Kegelschnitt K_{12}, dessen Punkte durch Vermittelung der Geraden h den Punkten der Geraden g_3 projektiv zugeordnet sind. Der Involution auf g_3 entspricht eine Involution auf K_{12}, deren Axe a_{12} in bekannter Weise linear gefunden wird. Sie ist die Gerade, die die Ebene (P, k_{12}) neben k_{12} noch aus dem Hyperboloid herausschneidet. Die Gerade l nun, die von P durch $a_{12} k_{12}$ harmonisch getrennt ist, gehört der Polarebene von P für das Hyperboloid $(g_1 g_2 M_3 M'_3 M_5)$ an. — Ist k'_{12} eine beliebige $g_1 g_2 a_{12}$ treffende Gerade, so gehört sie demselben Hyperboloide an, man findet wie vorhin — oder da jetzt von dem Hyperboloid drei Erzeugende einer Schar bekannt sind, auch auf andere Weise — die Gerade a'_{12}, die die Ebenen (P, k'_{12}) neben k'_{12} aus dem Hyperboloide schneidet. Die Gerade l', die

von P durch $a'_{12}k'_{12}$ harmonisch getrennt ist, gehört ebenfalls der Polarebene von P für das Hyperboloid an. Die Geraden ll' bestimmen die Polarebene von P für das Hyperboloid.

Konstruiert man auf gleiche Weise die Polarebenen von P für die Hyperboloide $(g_1 M_2 M'_2 g_3 M_5)(M_1 M'_1 g_2 g_3 M_5)$, so liefert der Schnittpunkt der drei Polarebenen den Punkt Q_4, der P für alle Flächen zweiter Ordnung durch die sieben Punkte $M_1 M_2 M_3 M'_1 M'_2 M'_3 M_5$, oder wie wir kürzer sagen wollen, der P für diese sieben Punkte konjugiert ist.

Der besondere Fall, dass der Punkt Q_4 durch die eben gegebene Konstruktion nicht als ein völlig bestimmter zu erbringen ist, soll zuletzt besonders besprochen werden.

Es seien $Q_2 Q_3 Q_4$ die bez. P für die Gruppen von sieben Punkten

$$M_1 M'_1 M_3 M'_3 M_4 M'_4 M_5, \quad M_1 M'_1 M_2 M'_2 M_4 M'_4 M_5,$$
$$M_1 M'_1 M_2 M'_2 M_3 M'_3 M_5$$

konjugierten Punkte, so ist die Ebene $\pi = (Q_2 Q_3 Q_4)$ die Polarebene von P für die durch die neun Punkte gehende Fläche F.

Liegen die neun Punkte in einer Kurve vierter Ordnung erster Spezies, so giebt es unendlich viele Flächen zweiter Ordnung durch sie. Für jede derselben müssen $Q_2 Q_3 Q_4$ dem Punkte P konjugiert sein, und es müssen deshalb diese drei Punkte auf einer Geraden liegen. Umgekehrt können, wenn die neun Punkte nicht auf einer Kurve vierter Ordnung liegen, die Punkte $Q_2 Q_3 Q_4$ für allgemeine Lagen von P nicht in einer Geraden liegen, weil dies für angebbare spezielle Lagen von P nicht statthat. Man vergleiche hierüber meine Untersuchungen in den Leipziger Berichten vom 3. Mai 1897 S. 319.

Nun seien $P_1 P_2 P_3$ drei Punkte einer Ebene ε und $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ seien ihre Polaren für die Fläche F, $p_1 p_2 p_3$ deren Schnittlinien mit ε, also die Polaren von $P_1 P_2 P_3$ für den Kegelschnitt (ε, F). Alsdann ist das Polarsystem, dessen Kernkurve (ε, F) ist, durch die drei Paare Pol und Polare $P_1 p_1$, $P_2 p_2$, $P_3 p_3$ völlig bestimmt. Auf jeder Geraden g in ε ist durch diese drei Paare Pol und Polare die Involution linear bestimmt, die der Kurve (ε, F) konjugiert ist, und es ist die Aufgabe II gelöst, sobald für das Ausgesprochene der Nachweis der Richtigkeit erbracht ist.

Die gerade Verbindungslinie der Punkte $P_\mu P_{\mu'}$ werde mit $p_{\mu\mu'}$ bezeichnet, ebenso kann der Schnittpunkt von $p_\mu p_{\mu'}$ mit $P_{\mu\mu'}$ bezeichnet werden, es ist dann $P_{\mu\mu'}$ der Pol von $p_{\mu\mu'}$.

Auf $p_{\mu\mu'}$ sind die Punkte $P_\mu (p_\mu p_{\mu\mu'})$, $P_{\mu'} (p_{\mu'} p_{\mu\mu'})$, auf p_μ sind die Punkte $P_{\mu\mu''} (p_\mu p_{\mu\mu'})$, $P_{\mu\mu''} (p_\mu p_{\mu\mu''})$ Paare der Involution, die (ε, F) konjugiert ist, deren Doppelpunkte (ε, F) angehören. — Ist Q ein Punkt auf einer der Linien p z. B. auf p_1, so ist die Polare q von Q dadurch, dass sie durch P_1 und den Q in der Involution $P_{12}(p_1 p_{12}) \cdot P_{13}(p_1 p_{13})$ zugehörigen Punkt gehen muss, bestimmt.

Um die (ε, F) konjugierte Involution auf einer Geraden g in ε zu konstruieren, bestimme man zu den Punkten (gp_1), (gp_2) die Polaren,

sie treffen g in Punkten, die mit $(gp_1)(gp_2)$ Paare der gesuchten Involution bilden und diese somit geben. Damit ist die Aufgabe II gelöst. Man kann, wenn g gegeben ist, die Konstruktion dadurch erleichtern, dass man $P_1 P_2$ auf g wählt.

Um der Aufgabe III gemäss auf einer Geraden g durch M_5 den zweiten Schnittpunkt mit F zu finden, braucht man, da M_5 sich selbst konjugiert ist, nur zu einem einzigen Punkt P auf g die Polare zu konstruieren. Trifft sie g in Q, so ist der zweite in bekannter Weise linear zu findende Doppelpunkt der Involution

$$M_5 M_5 \cdot QP \ldots$$

der Schnittpunkt von g mit F.

Nun betrachten wir noch den Fall, dass der dem Punkte P für sieben gegebene Punkte konjugierte Punkt Q auf die hier gegebene Weise nicht zu finden ist. — Die drei Hyperboloide:

$$(g_1 g_2 M_3 M'_3 M_5)(g_1 M_2 M'_2 g_3 M_5)(M_1 M'_1 g_2 g_3 M_5)$$

schneiden sich paarweise in je einer Geraden und einer Kurve dritter Ordnung. Sind die drei Geraden $g_1 g_2 g_3$ verschieden, was sich bei der hier über die gegebenen Punkte gemachten Annahme, dass nicht vier in einer Ebene liegen sollen, von selbst versteht, so sind die drei Hyperboloide von einander linear unabhängig selbst dann, wenn sie eine Kurve dritter Ordnung gemein haben sollten. Zu einem Punkt P gehört daher ein und nur ein Punkt Q. Enthält aber eins von den drei Hyperboloiden alle drei geraden Linien $g_1 g_2 g_3$, liegt M_5 in einer $g_1 g_2 g_3$ schneidenden Geraden, so sind die drei Hyperboloide identisch, man kann dann Q nicht auf die angegebene Weise finden, wenigstens, wenn $M_1 M'_1\, M_2 M'_2\, M_3 M'_3$ aggregirt ideale Paare sind, so dass man diese Punkte zu zweien nur durch die Geraden $g_1 g_2 g_3$ real miteinander verbinden kann.

Die Geraden $g_1 g_2 g_3 g_4$ lassen sich auf viererlei Weise in Tripel gruppieren. Liegt M_5 in einer Geraden, die nur die Geraden eines dieser Tripel trifft, so wählt man zur Konstruktion die drei andern Tripel. Liegt aber M_5 in einer Geraden, welche die Geraden zweier Tripel, die also alle vier Geraden $g_1 g_2 g_3 g_4$ trifft, so hat man wirklich einen singulären Fall, in dem die gegebenen Mittel zur Konstruktion nicht ausreichen. Folgendes etwas umständliches und daher der Vereinfachung entgegensehendes Verfahren führt dann zum Ziel.

Auf einer Geraden durch M_5 wähle man drei Punkte LMN und konstruiere die Polaren $\lambda\mu\nu$ von P für die Flächen

$$(M_1 M'_1 M_2 M'_2 M_3 M'_3 M_4 M'_4 L) \quad (M_1 M'_1 M_2 M'_2 M_3 M'_3 M_4 M'_4 M)$$
$$(M_1 M'_1 M_2 M'_2 M_3 M'_3 M_4 M'_4 N),$$

sie bilden einen LMN projektiven Ebenenbüschel $\lambda\mu\nu$. Die in dieser Projektivität

$$LMNM_5, \ldots \;\barwedge\; \lambda\mu\nu\pi \ldots$$

M_5 entsprechende Ebene π ist die Polare von P für die Fläche F.

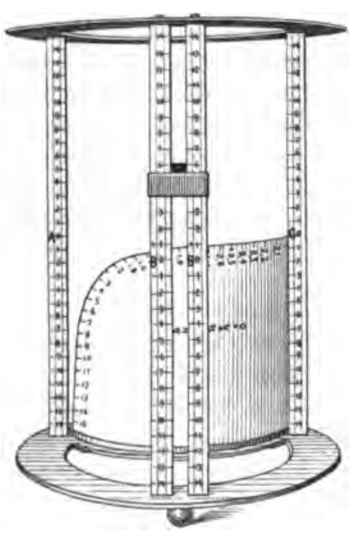
Will man mit v. Staudt nur das räumliche Polarsystem bestimmen, dessen Kernfläche F ist, so ist auch dies Problem durch Hesse gelöst, denn er lehrt ja zu jedem Punkte die Polarebene finden. — Inzwischen ist von Herrn H. Boegehold eine ausführliche Abhandlung (als Dissertation, Jena 1898) über diesen Gegenstand veröffentlicht worden.

Über einen Apparat zur Auflösung numerischer Gleichungen mit vier oder fünf Gliedern.

Von **R. Mehmke** in Stuttgart.

Von mehreren Seiten dazu aufgefordert, werde ich in dieser Zeitschrift einige von mir konstruierte Apparate zur mechanischen Auflösung numerischer Gleichungen vorführen, die sich 1893 auf der mathematischen Ausstellung in München befunden haben, deren, durch keine Abbildungen unterstützte Beschreibungen aber, die ich in dem Katalog jener Ausstellung gegeben habe, allerdings ungenügend erscheinen mögen.

Ich beginne mit dem nachstehend abgebildeten Apparate, der am meisten Interesse erregt zu haben scheint und in mehreren Schriften erwähnt worden ist, trotzdem er für den praktischen Gebrauch vielleicht weniger in Betracht kommt als einige andere.



Dieser Apparat beruht auf einer sehr allgemeinen Methode, Funktionen mit mehreren Veränderlichen räumlich darzustellen. Denkt man sich vier beliebige Kurven im Raume mit bezifferten Einteilungen („Skalen") irgend welcher Art versehen, so müssen die Zahlenwerte t, u, v, w, die zu vier Teilpunkten, von denen jeder sich auf einer anderen Skala befinden soll, gehören, eine bestimmte Gleichung $F(t, u, v, w) = 0$ erfüllen, damit jene Punkte in einer und derselben Ebene liegen. Sind von einem dieser Gleichung genügenden Wertsysteme drei Werte, z. B. u, v, w, gegeben, so lässt sich der vierte Wert, t, geometrisch dadurch finden, dass man die zu den Werten u, v, w gehörigen Punkte der betreffenden Skalen durch eine Ebene verbindet und den am Schnittpunkt derselben mit dem Träger der vierten Skala stehenden Wert abliest. Weitere Veränderliche können unter Umständen berücksichtigt werden, indem man eine oder mehrere der Kurven durch Scharen solcher ersetzt.*

* Noch nicht lange erst habe ich bemerkt, dass August Adler schon 1886 dieselben Gedanken ausgesprochen hat (Wiener Berichte Bd. 94, 2. Abteilung, S. 423). Die Frage, unter welcher Bedingung eine gegebene Funktion F einer derartigen Behandlung zugänglich ist, bleibt noch zu beantworten.

Im vorliegenden Beispiele sind zur Unterbringung von u, v, w drei gewöhnliche Skalen (gleichförmige Teilungen) mit gleicher Längeneinheit auf drei zu einander parallelen Geraden, die wir die u-, v- und w-Axe nennen wollen, benützt. (Bei dem abgebildeten Apparate befinden sich die erste und dritte Skala an den inneren Kanten der mit A und C bezeichneten senkrechten Stäbe, die zweite ist nicht wirklich vorhanden, sondern in der Mitte zwischen den beiden vorderen, mit B bezeichneten Stäben zu denken. Die feine Öffnung in dem vornen sichtbaren Schieber kann auf jeden Punkt dieser gedachten Skala mit Hilfe der Skalen auf den Stäben B gestellt werden. Die Nullpunkte liegen in einer zu den Axen senkrechten Ebene.)

Erteilt man den Nullpunkten der genannten Skalen die Gewichte λ, μ, ν, so wird auf der durch ihren Schwerpunkt gehenden Parallelen zu den Axen von der Ebene, welche die Skalenpunkte u, v, w verbindet, d. h. auf den Axen die Abschnitte u, v, w — die wir die Parallel-Koordinaten der Ebene nennen wollen — bildet, das Stück

$$s = \frac{\lambda u + \mu v + \nu w}{\lambda + \mu + \nu}$$

abgeschnitten, sodass die in u, v, w lineare Gleichung

$$1) \qquad \lambda u + \mu v + \nu w - (\lambda + \mu + \nu) s = 0$$

besteht. Jede Ebene, deren Parallel-Koordinaten u, v, w dieser Gleichung genügen, geht offenbar durch den Punkt, der durch die Zahlen λ, μ, ν und den Abschnitt s bestimmt ist; 1) ist die Gleichung dieses Punktes.

Soll nun eine viergliedrige Gleichung mit der Unbekannten t, etwa

$$2) \qquad t^m + at^n + bt^p + c = 0,$$

worin die Exponenten m, n, p bestimmte Werte haben, aufgelöst werden, so kann man 1) und 2) in Übereinstimmung bringen, indem man

$$3) \qquad u = a, \quad v = b, \quad w = c$$

und

$$4) \qquad \lambda = t^n, \quad \mu = t^p, \quad \nu = 1, \quad s = -\frac{t^m}{t^n + t^p + 1}$$

setzt. Zu jedem Werte von t gehört nach 4) ein bestimmter Punkt (λ, μ, ν, s); giebt man t eine Reihe äquidistanter Werte, so liefern die zugehörigen Punkte eine krummlinige Skala, deren Träger, wie leicht einzusehen ist, auf einer (bloss von den Exponenten n, p abhängigen) Cylinderfläche liegt, welche die u- und w-Axe als Mantellinien enthält. (Im Falle $n = 2$, $p = 1$ ergiebt sich ein Kreiscylinder, wenn als Querschnitt des Axensystems ein gleichseitiges Dreieck genommen wird.) Es genügt der zwischen den Axen liegende, den positiven Werten von t entsprechende Teil jener Skala. (Dem Apparate ist für vollständige kubische, einfach reduzierte biquadratische und zweifach reduzierte Gleichungen fünften Grades je eine, an ihrem oberen Rande mit der betreffenden Skala versehene, cylindrisch ge-

bogene Blechschablone beigegeben. Ist eine solche Gleichung für gegebene Werte von a, b, c aufzulösen, so setzt man die richtige Schablone auf, stellt den Schieber auf den Punkt b der v-Skala, verbindet die Punkte a und c der u- bezw. w-Skala durch einen Faden, den man mit beiden Händen gespannt hält, und sieht durch die Öffnung des Schiebers nach dem Faden hin, dann lassen sich an den scheinbaren Schnittpunkten des Fadens mit der krummlinigen Skala die positiven Wurzeln der Gleichung ablesen. Etwaige negative Wurzeln ergeben sich, wenn $-t$ statt t gesetzt und die neue Gleichung ebenso behandelt wird.) Im Falle einer Gleichung mit fünf Gliedern $t^m + at^n + bt^p + ct^q + d = 0$ kann man

$$u = a, \quad v = b, \quad w = c, \quad \lambda = t^n, \quad \mu = t^p, \quad \nu = t^q,$$

$$s = -\frac{t^m + d}{t^n + t^p + t^q}$$

setzen. Statt einer Kurve erhält man jetzt eine Kurvenschar mit dem Parameter d, welche auf einem, wieder durch die u- und w-Axe gehenden Cylinder liegt. (Die Verwirklichung ist möglich, wenn man entweder den Faden vor dem Cylinder so gespannt hält, dass er, durch die Öffnung des Schiebers gesehen, scheinbar durch die Punkte a und c der u- bezw. w-Skala geht, oder einen durchsichtigen Cylinder benützt. Abzulesen ist an den scheinbaren Schnittpunkten des Fadens mit der zum Werte d gehörigen Kurve.)

Bemerkungen. Obiger Apparat lässt sich als räumliche Verallgemeinerung der graphischen Tafeln („Abaques") von M. d'Ocagne zur Auflösung numerischer Gleichungen mit drei oder vier Gliedern ansehen[*], die ihrerseits durch Anwendung des Prinzips der Reziprozität aus gewissen Abacus von Lalanne[**] hervorgegangen sind. Parallel-Koordinaten, aber nur von geraden Linien in der Ebene, sind von K. Schwering 1874 eingeführt[***], von M. d'Ocagne ebenfalls gefunden (s. a. a. O.) und ausgiebig verwendet worden, während Adler sie nicht erwähnt.

---

[*] Annales des ponts et chaussées, 1884, 2ème semestre, p. 531; Nomographie, Paris 1891; s. auch W. Dyck, Katalog mathematischer Modelle, Nachtrag, München 1893, S. 9, Nr. 40 d.

[**] S. Dycks Katalog, Nachtrag, S. 8, 40a.

[***] Jahresbericht für 1874 des Westfälischen Provinzialvereins, S. 149.

Berichtigungen.

Seite 245 Zeile 10 v. o. lies $\omega(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})Pa$ statt $\omega(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})Pa$,

„ 246 „ 11 v. o. lies $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}QR$ statt $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \overline{QR}$,

„ 250 „ 1 und 2 v. o. sind die Worte „allein oder" zu streichen,

„ 258 „ 7 v. u. streiche „sind gleich lang und",

„ 266 „ 4 v. u. letzter Summand lies abc für dbc.

Historisch-litterarische Abteilung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaktion

von

Dr. R. Mehmke und **Dr. M. Cantor.**

43. Band.

Mit in den Text gedruckten Figuren.

Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1898.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

I. Abhandlungen.

II. Rezensionen.

Geschichte der Mathematik.

Philosophie, Didaktik.

Arithmetik, Analysis, Algebra.

Synthetische, analytische, descriptive Geometrie.

Praktische Geometrie. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Kinematik. Mechanik. Physik.

Historisch-litterarische Abteilung.

Rezensionen.

Bemerkung, die Schreibweise Amper betreffend.

Bei Besprechung meiner „Grundzüge der mathematischen Chemie", Leipzig 1894, hat Herr Nebel, ohne den Ursprung der von mir angenommenen Schreibweise Amper klarzustellen, so starke Worte gegen sie gebraucht, dass es wohl angezeigt erscheint, den Zusammenhang aufzuhellen. Schon die Bemerkung des Herrn Nebel, dass „ein deutscher Physiker" die Kürzung Amper eingeführt habe, kommt in etwas andere Beleuchtung, wenn man hinzufügt, dass dieser Physiker der Verfasser des allgemein verbreiteten „Leitfadens der praktischen Physik" ist, in dessen 5. Auflage 1884 F. Kohlrausch die Schreibweise mit der nach meiner Meinung vollkommen zutreffenden Begründung einführt: „Bezeichnungen, welche jedem Arbeiter geläufig sein sollen, dürfen selbstverständlich keiner ausländischen Orthographie unterliegen."

Für mich entscheidend war aber überdies, dass 1893, in der Zeit, da ich mein Buch schrieb, in der Deutschen Physikalisch-technischen Reichsanstalt die Absicht bestand, die Schreibweise Amper allgemein einzuführen. Später hat sich freilich die Reichsanstalt entschieden, nur das è zu vermeiden, und schreibt jetzt Ampere.

Zur Sache selbst wäre wohl nur zu bemerken, dass ein guter Geschmack an dem centimètre im Munde unserer Schneider genug haben sollte und wünschen müsste, die deutschen Werkmeister mit nasalen Beanspruchungen zu verschonen. Auch ist es selbstverständlich und wird durch unser Verhalten gegenüber dem metrischen Maß bestätigt, dass ein internationales Maß nicht über die nationale Aussprache und Schreibweise verfügt; es wird keinem Engländer einfallen, seine Schrift mit Zeichen zu belasten, die für seinen Leserkreis unverständlich sind. Endlich ist durch die allgemeine Annahme der Schreibweise Volt dargethan, dass es nicht die Absicht war, die nationalen Eigennamen als solche im internationalen Maßsysteme festzuhalten.

G. Helm.

R. Sturm. **Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung.** Bd. 1 bis 3, Leipzig, B. G. Teubner, 1892, 1893, 1896.

Die synthetische Geometrie stellt sich bekanntlich die Aufgabe, die geometrischen Gebilde lediglich aus Raumanschauungen heraus zu behandeln, ohne von algebraischen Hilfsmitteln Gebrauch zu machen. Aber in dieser strengsten und zugleich höchsten Form muss sich unsere Wissenschaft entweder auf die liebevolle Bearbeitung eines verhältnismässig sehr kleinen Gebietes beschränken, oder sie muss aus allen Kräften bemüht sein, den geometrischen Inhalt der Hilfsmittel rein darzustellen, deren die analytische Geometrie sich bedient, vor allen Dingen die Schnittpunkttheoreme rein geometrisch begründen. An der endlichen Erreichung dieses Ziels ist heute wohl nicht mehr zu zweifeln. Aber während man auf allen anderen Gebieten der Mathematik den auf Reinheit der Methode gerichteten Bestrebungen mit lebendigem Anteil folgt, werden dieselben auf dem Gebiet der synthetischen Geometrie mit Gleichgiltigkeit beobachtet, und man bringt denselben selbst in Fachkreisen nur geringes Interesse entgegen. Unter diesen Umständen ist es sehr wohl zu verstehen, dass der Verfasser, ursprünglich ein Anhänger jener strengsten Anschauungen, sich mehr und mehr einer vermittelnden Richtung zugewendet hat, welche von den Hilfsmitteln der abzählenden Geometrie, vor allen dem Korrespondenzprinzip den ausgiebigsten Gebrauch macht. Wird man eine derartige Untersuchungsmethode da anstandslos zulassen, wo es sich weniger um die ersten Grundlagen der Wissenschaft, sondern um die Durchmusterung eines abgegrenzten Gebietes handelt, so ist es doch unberechtigt, solche Hilfsmittel da anzuwenden, wo die synthetische Geometrie sehr wohl Mittel an der Hand hat, die Untersuchung mit ihren eigenen Mitteln streng durchzuführen. Schon bei einem der ersten Kapitel haben wir dies störend empfunden.

Mit grossem Interesse haben wir die klaren Auseinandersetzungen des Verfassers über die Hauptziele der Liniengeometrie gelesen. Er deutet schon jetzt an, dass der aus allen Geraden gebildete Raum kein linearer ist, und erläutert an gut gewählten Beispielen die verschiedenen Gebilde der Liniengeometrie. So wird der Komplex dritten Grades der Geraden eingeführt, die auf den Flächen zweiter Ordnung eines Bündels liegen, die Kongruenz [2,6] der Geraden, welche sich auf Flächen eines Büschels befinden. Alsdann werden die Orte der Geraden besprochen, die sich auf 1 bis 4 Leitlinien stützen, es wird gezeigt, wie die Anzahl $2\,\mu_1\,\mu_2\,\mu_3\,\mu_4$ der Geraden, die sich auf vier Kurven der Ordnung $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ stützen, durch gemeinschaftliche Punkte der Kurven vermindert wird. Dies wird an der Anzahl der Geraden erläutert, die eine Fläche dritter Ordnung besitzt.

Nachdem das Chasles'sche Korrespondenzprinzip auf die übliche Art entwickelt wurde, bestimmt der Verfasser die Anzahl $\frac{1}{2}\,n\,(n-1)+\frac{1}{2}\,n_1\,(n_1-1)$

der involutorisch zugeordneten Punktepaare einer Korrespondenz (n, n_1), welche auf einem rationalen Träger lagert, und gelangt sodann zu den involutorischen Korrespondenzen $[n]$. Auf die Betrachtung der Korrespondenz [2] auf den Kegelschnitt gründet sich eine an Hurwitz und Cayley anknüpfende Behandlung des Ponceletschen Schliessungsproblems. Wenn in einer Korrespondenz (n, n_1) der Ebene m Paare homologer Punkte auf 2 beliebig gewählten Geraden liegen, so giebt es $n + n_1 + m$ sich selbst entsprechende Punkte, sobald nicht eine sich selbst entsprechende Kurve vorliegt. Hieraus folgt, dass Ebenen, welche durch einen Punkt E gehen und aus jeder von zwei Kongruenzen $[m, n]$ und $[m_1, n_1]$ einen Strahl enthalten, deren Kreuzungspunkt einer Ebene E angehört, einen Kegel von der Klasse $nn' + mn' + nm'$ umhüllen, während der Kreuzungspunkt eine Kurve von der Ordnung $mm' + mn' + nm'$ beschreibt. Diese Geradenpaare bewirken unter den Ebenen eines beliebigen Bündels eine Korrespondenz $[(m + n)\ (m' + n'),\ (m + n)\ (m' + n')]$, deren Koincidenzelemente zum Teil aus den Tangentialebenen des Kegels, die dem Bündel angehören, bestehen, andererseits aus den Ebenen, welche gemeinschaftliche Strahlen der Kongruenzen projizieren. Auf diese von Schubert entlehnte Art entwickelt der Verfasser die Halphensche Zahl $mm' + nn'$ der Strahlen, welche zwei Kongruenzen (m, n) und (m', n') mit einander gemein haben. Hieraus lassen sich die anderen Halphenschen Zahlen grossenteils ableiten. Die Strahlen eines Komplexes, welche eine beliebige Gerade treffen, bilden eine Kongruenz $[p, p]$. Da dieselbe mit einer Kongruenz $[m, n]$ $p\,[m + n]$ Strahlen gemein hat, so liegen die dem Komplex und der Kongruenz $[m, n]$ angehörigen Geraden in einer Regelfläche vom Gerade $p\,[m + n]$. Nur die Ermittelung der $p \cdot q$ einer Regelfläche q^{ter} Ordnung und einem Komplex p^{ter} Ordnung gemeinschaftlichen Strahlen macht eine besondere Betrachtung nötig. Das Kapitel schliesst ab mit dem Korrespondenzprinzip für eine (n, n_1)-deutige Beziehung im Raum.

Für die Behandlung der Regelflächen dritter und vierter Ordnung erscheint uns als der beste Ausgangspunkt die Erzeugung mittelst zweier projektivischer Kegelschnitte. Aus der Betrachtung des Büschels kollinearer Ebenen, welchen sie bestimmen, würde sich mit Leichtigkeit zeigen lassen, dass die Ebenen aller Kegelschnitte der Fläche im allgemeinen einen Büschel dritter Ordnung bilden, es würde sich ferner streng zeigen lassen, dass jeder Ebene desselben zwei Gerade angehören, deren Kreuzungspunkt eine Raumkurve dritter Ordnung beschreibt, und man würde zum Schluss Gesetze über die involutorische Korrespondenz strenge beweisen können, welche auf dieser Raumkurve durch die Geraden der Flächen hervorgerufen wird. Auf analoge Art lässt sich die Fläche mit zwei Doppelgeraden und die windschiefe Fläche dritter Ordnung behandeln. Der Verfasser hat es selbst hier vorgezogen ein abzählendes Verfahren einzuschlagen; er geht stets von der Korrespondenz aus, welche die Geraden der Fläche auf der Doppelkurve hervorrufen und gelangt von diesem Ausgangspunkt aus auf geringem Raum zu der Aufzählung der möglichen Regelflächen dritter und vierter

Ordnung. Aber trotzdem würden wir die oben skizzierte geometrische Herleitung bei weitem vorziehen.

Die für das Nullsystem grundlegende Betrachtung, dass jeder Punkt des Raumes in der entsprechenden Ebene eines reziprok bezogenen Raumes liegen kann, wird mit grosser Klarheit vorgetragen; zunächst wird die Standtsche Darstellung des Nullsystems mit Hilfe eines unebenen aus Leitstrahlen bestehenden Fünfecks gewählt. Es wird gezeigt, dass von zwei reziproken Tetraedern des Nullsystems jeder in der von Möbius zuerst beobachteten Art dem anderen umschrieben ist und dass jeder Strahl des Nullsystems beide Tetraeder unter gleichem Doppelverhältnis trifft. Der letzteren Forderung genügen auch die Geraden aller durch die acht Ecken möglichen ∞^2 Flächen zweiter Ordnung, insgesamt also, wie es sein muss, die Geraden eines Komplexes vierten Grades. Nachdem schon vorläufig gezeigt ist, dass fünf beliebig gewählte Gerade ein Nullsystem bestimmen, wird der Abschnitt durch Betrachtungen über Nullsysteme im allgemeinen beschlossen. Werden durch das Nullsystem einem Punkte α ihn enthaltende Ebene, einer Ebene β in ihr liegende Punkte angeordnet, so kommt noch eine dritte wichtige Zahl γ in Betracht, die Anzahl der Punkte auf einer beliebigen Geraden, deren Nullebene durch dieselbe hindurchgeht. Ordnet man z. B. jeder Ebene die Punkte zu, in denen sie von den Flächen eines einfach unendlichen Systems mit den Charakteristiken μ, ν, ϱ berührt wird, so ist $\alpha=\mu$, $\beta=\nu$, $\gamma=\varrho$. Ordnet man jedem Punkt die Ebenen zu, welche zwei von ihm ausgehende Strahlen einen Kongruenz $[m, n]$ enthalten, so ist $\alpha=\frac{1}{2}m(m-1)$, $\beta=\frac{1}{2}n(n-1)$. Die dritte Zahl ist die wichtige von Schuhmacher eingeführte Artzahl der Kongruenz, sie zeigt, wie oft zwei Strahlen der Kongruenz zugleich mit einer Geraden in einer Ebene liegen und sich auf derselben schneiden.

Ein linearer Komplex besteht nun, wie der Verfasser aus der allgemeinsten Definition heraus ableitet, entweder aus den Strahlen, die eine Gerade treffen, oder aus den Leitstrahlen eines Nullsystems. Die Bezeichnungen „Gebüsch" und „Gewinde", die der Verfasser für den besonderen und den allgemeinen Fall einführt, haben die Billigung der Fachgenossen gefunden. Die Untersuchung wendet sich (60 flg.) zunächst den metrischen Verhältnissen zu. Nach Einführung der Durchmesser und der Axe wird in ungemein klarer Weise begründet, dass man rechts und links gewundene Gewinde zu unterscheiden hat, da die Cuspidalkurven aller im Gewinde enthaltenen abwickelbaren Schraubenflächen entweder sämtlich links oder sämtlich rechts gewunden sind.

Einem beliebigen Strahlbüschel wird durch das Nullsystem des Gewindes ein anderer projektivisch angeordnet, der einen Strahl des Gewindes mit ihm entsprechend gemein hat. Alle Strahlen des Gewindes — hierin besteht die Sylvestersche Erzeugung desselben — treffen zwei entsprechende Gerade dieser Büschel. Will man aus fünf gegebenen Strahlen g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 ein Gewinde herstellen, so braucht man nur, wenn zwei

Ebenen α und ξ g_1 enthalten, g_2, g_3, g_4, g_5 in A_2, A_3, A_4, A_5 und X_2, X_3, X_4, X_5 treffen, A und X Punkte von g_1 sind,

$$A\,(X\,A_2\,A_3\,A_4\,A_5) \barwedge X\,(A\,X_2\,X_3\,X_4\,X_5)$$

zu machen. Dieses Projektivitätsproblem hat eine einzige Lösung, wenn man A und α als gegen ansieht (74). In einer beliebigen Korrelation des Raumes erzeugen die Verbindungslinien der Punkte, welche einander in beiderlei Sinne konjugiert sind, ein Gewinde (75).

Da die Regelfläche der Strahlen einer linearen Kongruenz, welche eine beliebige Gerade treffen, nach der allgemeinen Koincidenzformel vom zweiten Grade ist, so kann sie als Erzeugnis zweier kollinearer Ebenenbündel definiert werden, deren Zentra auf einem Strahle der Kongruenz willkürlich sind, die aber diesen Strahl g entsprechend gemein haben. Diese von der Realität der beiden Leitstrahlen unabhängige Definition zeigt, dass die lineare Kongruenz durch vier Strahlen eindeutig festgelegt ist. Das Strahlensystem zeigt sich dabei sogleich als Träger eines Büschels von linearen Komplexen. Die Sylvesterschen Erzeugungen derselben stützen sich auf die Paare homologer Strahlbüschel jener kollinear bezogenen Ebenenbündel, welche durch die Verbindungslinie der Zentra hindurchgehen. Nachdem das Strahlensystem als Erzeugnis geschart-kollinearer Räume erkannt ist, ergiebt sich naturgemäss, dass zwei beliebige lineare Komplexe Γ, Γ_1 ein lineares Strahlensystem gemein haben, das Erzeugnis der geschart-kollinearen Punkträume, die vermöge der Nullsysteme von Γ, Γ_1 auf denselben Ebenenraum bezogen sind; indem man andere Punkträume aus dem Büschel der beiden ersten auf den Ebenenraum bezieht, erhält man die linearen Komplexe des Büschels (Γ, Γ_1). Zwei homologe Punkte zweier derartigen Räume liegen unter konstantem Doppelverhältnis gegen die beiden Punkte, in welchen ihre Verbindungslinie die Leitstrahlen des „Strahlennetzes" treffen. Wird dieses Doppelverhältnis das harmonische, so stehen die linearen Komplexe in Involution, es wird das Nullsystem des einen durch das Nullsystem des anderen in sich transformiert.

Eine Abbildung des Strahlennetzes wird einmal durch die Spuren seiner Geraden in einer beliebigen Hilfsebene gegeben. Eine Abbildung auf ein einschaliges Hyperboloid nimmt ihre einfachste Form an, wenn man die Punktreihen auf den Leitgeraden oder die Ebenenbüschel um dieselben auf die beiden Geradenscharen projektivisch bezieht und jedem Strahl des Netzes den Schnittpunkt der zugehörigen Geraden des einschaligen Hyperboloids zuweist. Jeder Regelfläche des Strahlennetzes entspricht ein Kegelschnitt der Hilfsfläche.

Der Verfasser beschäftigt sich näher mit der Axenfläche des Büschels. Die Axen aller durch ein Strahlennetz möglichen Gewinde schneiden den Hauptstrahl, welcher auf beiden Leitstrahlen des Netzes senkrecht steht, unter rechtem Winkel, durch jeden Punkt gehen zwei Gewinde-Axen; die Fläche ist daher von der dritten Ordnung, enthält h zweifach, die unendlich ferne Gerade des Strahlensystems aber einfach. Da unter den Ebenenpaaren, welche die Axenpaare projicieren, eines aus zwei Tangentialebenen

des unendlich fernen Kreises besteht, bilden sie eine hyperbolische Involution, deren Doppelebenen aufeinander senkrecht stehen. Da man die Axen als Gerade definieren kann, welche auf den Strahlen einer h enthaltenden Regelschar des Netzes senkrecht stehen, so erkennt man in den Punkten von h, welche von den Doppelebenen herrühren, die Grenzpunkte des h umgebenden unendlich dünnen Strahlenbündels im Kummerschen Sinne und in den Einschnitten von h in die beiden Leitgeraden die nicht notwendig reellen Brennpunkte dieses Bündels. Die Gleichung

$$r = d \cos 2\omega,$$

welche zwischen dem Abstand einer Geraden des Cylindroids von der Mittelebene der beiden Doppelstrahlen und Leitstrahlen, und dem Winkel, den sie mit einer Doppelgeraden bildet, besteht, wird aus der einzweideutigen Beziehung zwischen den Punkten von h und den Ebenen um h, in denen die zugehörigen Axen liegen, abgeleitet. Vielleicht hätte sich das Obige leichter mit Hülfe der orthogonalen hyperbolischen Paraboloide ergeben, welche durch die beiden Leitstrahlen des Netzes hindurchgehen. Der von h verschiedene Scheitelstrahl eines solchen Paraboloids ist, wie bemerkt, eine Axe eines Gewindes. Die obige Formel drückt jedenfalls die bekannte Thatsache aus, dass die Abstände eines Scheitelstrahls von zwei Geraden seiner Schar sich verhalten wie die Tangenten der Winkel, welche er mit ihnen bestimmt. Aus der Betrachtung der Strahlen des Netzes, welche einen unendlich kleinen Kreis der Hauptebene treffen, der um ihren Schnittpunkt mit h beschrieben ist, gewinnt Sturm den Kummerschen Ausdruck für das Dichtigkeitsmaß des h umgebenden unendlich dünnen Strahlenbündels.

Im folgenden Abschnitt (126 flg.) wird das lineare System zweiter Stufe, das Netz aus Gewinden mit Hilfe der Regelschar G konstruiert, welche die drei konstituierenden Gewinde Γ_1, Γ_2, Γ_3 mit einander gemein haben. Entsprechen in den Nullsystemen von Γ_1, Γ_2, Γ_3 einem beliebig gegebenen Strahlbüschel (α, A) die anderen (β_1, B_1), (β_2, B_2), (β_3, B_3), so ordnet die kollineare Beziehung zwischen A, B_1, B_2, B_3 und α, β_1, β_2, β_3 jeder Ebene β des letzteren Bündels einen in ihr liegenden Punkt B zu und eine auf (A, α) und (B, β) gegründete Sylvestersche Erzeugung erzeugt ein viertes Gewinde des Netzes, wenn man zu zwei Strahlen von (A, α) diejenigen Strahlen von (B, β) als homolog wählt, welche dieselben Strahlen der Regelschar G treffen. Hieraus kann abgeleitet werden, dass die Nullpunkte beliebiger Ebenen hinsichtlich der Gewinde des Netzes kollineare Felder beschreiben. Die Abbildung des Netzes auf die Ebene ist hiermit gewonnen.

Das Gewinde-Gebüsch kann als die Gesamtheit derjenigen Gewinde aufgefasst werden, welche zwei verschiedene Gerade mit einander gemein haben, woraus die Sylvesterschen Erzeugungen der einzelnen Gewinde leicht abzuleiten sind. Die Polaren beliebiger Geraden bilden eindeutig bezogene Gewinde, mittelst deren später das Gewinde-Gebüsch auf den Raum

abgebildet werden kann. Das Gewebe von Gewinden hingegen wird als Ort der Netze aufgefasst, die zwei feste Gewinde mit einem anderen in einem Netz beweglichen verbinden. Die Gesamtheit aller Gewinde erweist sich nun als ein linearer Raum, in dem, der Reyeschen Anschauung gemäss, zu jeder linearen Teil-Mannigfaltigkeit eine ergänzende Mannigfaltigkeit gehört, deren sämtliche Gewinde mit ihren eigenen in Involution liegen. Ich muss gestehen, dass ich im Gegensatz zu Sturm ein Verfahren zur Definition der linearen Mannigfaltigkeiten für besser gehalten hätte, bei dem auf die gemeinschaftlichen Elemente der konstituierenden Gewinde keine Rücksicht genommen wird. Ich meine, es ist zweckmässiger, sich erst den Begriff des Bündels kollinearer Räume zu verschaffen, den man allerdings in der vollsten Allgemeinheit am leichtesten durch das Prinzip des Projizierens und Schneidens in einem Raume höherer Dimension ableitet. (Man braucht einen Raum elfter Dimension, den man sich etwa durch ein Kurvennetz dieser Stufe versinnbildlichen kann.) Die drei Punkträume, welche durch das Nullsystem auf denselben Ebenenraum bezogen sind, ergeben nun einen Bündel von Punkträumen, deren jeder durch ein Nullsystem auf den Ebenenraum bezogen ist, und ein Gewinde des Netzes ergiebt. Hier treten nun die kollinearen Felder, welche das Netz abbilden, in Evidenz. Die Gesetze, welche das Bündel als eine lineare Mannigfaltigkeit zweiter Stufe charakterisieren, treten in vollster Allgemeinheit zu Tage und man kann nun lediglich mit Hilfe des Büschel-Bildens zu den linearen Mannigfaltigkeiten höherer Stufe aufsteigen. In früheren Besprechungen (von Loria und Schönflies) der beiden ersten Bände des Werkes wird der Verfasser in anderem Zusammenhange auf Betrachtungen im Raume höherer Dimension hingewiesen. Er nimmt hierauf in der Vorrede des dritten Bandes Bezug; aus pädagogischen Rücksichten ziehe er es vor, das anschauliche liniengeometrische Gebilde im Raume von drei Dimensionen und nicht das mehrdimensionale Gebilde, aus dem es durch Projektion entstanden ist, zu betrachten. Er drückt sich dahin aus, dass er nach wie vor seinen Weg, schon wegen der zahlreichen Einzelergebnisse, zu dem er führe, für den richtigen halten müsse. Indessen wird schon im ersten Bande ein Kapitel zur Übung in der Geometrie des linearen Raumes eingeschaltet. Es wird das Erzeugnis zweier projektivischer Büschel von Gewinden — ein Komplex zweiten Grades mit zwei Doppelgeraden, das Erzeugnis dreier kollinearer Bündel — ein Komplex dritten Grades —, endlich das Erzeugnis dreier projektivischer Büschel — eine Kongruenz dritten Grades — betrachtet. Nach Betrachtungen über orthogonale Gewinde, deren Axen in Bezug auf eine absolute Kurve oder Fläche polarreziprok sind, wendet sich der Verfasser zu den Gruppen von 3 bis 6 Gewinden, die in Involution stehen, und zu den zugehörigen geschlossenen Gruppen von Transformationen. Diese besteht z. B. für drei Gewinde aus der Identität, den drei definierenden Nullsystemen, den gescharten Involutionen, welche die drei Schnitt-Strahlennetze darstellen, endlich dem Polarsystem der Fläche, welche die allen drei Gewinden gemeinsame Regelschar

trägt. Die einem beliebigen Punkte zugeordneten sechs Elemente sind die Bestimmungsstücke eines Tetraeders.

Die Abbildung des Gebüsches von Regelflächen, die zwei Gerade u, v enthalten, in den Punktraum führt zunächst zu einer einzweideutigen Abbildung des letzteren auf ein Gewinde, indem jedem Punkte die beiden Geraden korrespondieren, welche die entsprechende Fläche aus dem Gewinde herausschneidet. Ist u eine Gerade des Gewindes, so führt dies zu der del Pezzo'schen Begründung der eindeutigen Noetherschen Abbildung mit einem singulären Kegelschnitt im Punktraum. Diese Konstruktion begründet der Verfasser sehr anschaulich, indem er zunächst eine kollineare Beziehung zweier Ebenen herstellt, in der zwei im Nullsystem des Gewindes einander zugeordnete und folglich zur Sylvesterschen Erzeugung desselben geeignete Strahlbüschel einander entsprechen. Bezieht man nun diese Felder auf zwei nicht konzentrische Strahlbündel derart, dass den beiden Sylvesterschen Strahlbüscheln derselbe Ebenenbüschel entspricht, so gehört zu jedem Strahl des Gewindes ein Punkt; die Punkte des singulären Kegelschnittes k^2 gehören den Punkten der gemeinschaftlichen Geraden der beiden Sylvesterschen Strahlbüschel zu. Jedem Strahlbüschel des Gewindes entspricht eine den fundamentalen Kegelschnitt treffende Gerade, mithin einem Netz eine den singulären Kegelschnitt enthaltende Oberfläche zweiter Ordnung. Die Abbildung aller Strahlen auf einen linearen Raum vierter Dimension wird in Anlehnung an Loria gegeben. Bei der Abbildung aller Gewinde auf die Kegelschnitte einer Ebene erhält man in jedem Kegelschnittbüschel zwei Individuen, denen Gebüsche entsprechen; die Mannigfaltigkeit der Geraden wird mithin auf ein quadratisches Kegelschnittsystem vierter Stufe bezogen. Es wird der interessante Spezialfall Aschieri's dargelegt, in welchem den Geraden die Kegelschnitte entsprechen, welche unendlich viele einem festen Kegelschnitt umschriebene Dreiecke enthalten. Nach Besprechung der Kollineationen und Korrelationen, welche ein Gewinde in sich selbst überführen, wendet sich der Verfasser schliesslich der Besprechung des durch eine Raumkurve dritter Ordnung gegebenen Gewindes zu.

In dem Schlussabschnitt des ersten Bandes bespricht nun der Verfasser ausführlich den tetraedealen oder Reyeschen Komplex zweiten Grades. Natürlich nimmt die Betrachtung ihren Ausgangspunkt von dem Standtschen Satz, nachdem die Würfe, welche ein Tetraeder an einer Geraden bestimmt, einander gleich sind, aus dem schon Standt gefolgert hat, dass alle von einem Punkt ausgehenden, bez. in einer Ebene liegenden Geraden, an denen ein Tetraeder Würfe von gegebenem Doppelverhältnis bestimmt, einem Kegel bez. einem Büschel zweiten Grades angehören. In genauer Anlehnung an Reye werden die singulären Bündel und Felder des Komplexes, die in ihr enthaltenen Sehnenkongruenzen und Regelschaaren behandelt. Aus der näheren Betrachtung der singulären Punkte und Ebenen des Komplexes ergiebt sich die Reyesche Erzeugung mittels der Strahlbüschel, deren Scheitel einer Ebene angehören und welche die Strahlen eines kollinear

bezogenen Bündels projizieren; es folgt die implicite von Reye, ausdrücklich jedoch von Hirst gegebene Erzeugung mittelst zweier projektivischer Strahlbüschel, endlich wird genauer besprochen die Reyesche Erzeugung durch ein Büschel kollinearer Ebenen- und Punkträume.

Von besonderen Reyeschen Komplexen wird zunächst der Axenkomplex untersucht. Zu Grunde gelegt wird seine allgemeinste Definition als Ort der Strahlenpaare, die hinsichtlich einer Oberfläche zweiter Ordnung konjugiert sind und einen rechten Winkel mit einander bestimmen. Ein Hinweis darauf, dass der Komplex sich zugleich aus den Normalen aller konfokalen Oberflächen zweiter Ordnung zusammensetzt, wäre im Hinblick auf die schönen Untersuchungen von Binet, Ampère, Chasles, in denen die Theorie des Axenkomplexes grossenteils vorgebildet ist, erwünscht gewesen. Ungern haben wir unter den besonderen Reyeschen Komplexen, welche der Verfasser betrachtet, diejenigen vermisst, welche zwei kongruente Figuren in beliebiger Lage erzeugen. Bereits 1831 hat Chasles ausgesprochen, dass alle durch einen Punkt laufenden Strahlen des Komplexes — Verbindungslinien homologer Punkte — einen Kegel zweiten Grades bilden, dass die in den einen oder anderen Raum gehörigen Punkte dieser Strahlen eine Raumkurve dritter Ordnung bilden, dass die in einer Ebene liegenden Strahlen einen Kegelschnitt umhüllen etc. Den Abschluss des ersten Bandes bildet die Abbildung des tetraedralen Komplexes in den Punktraum und die Betrachtung der durch zwei kollineare Flächen zweiter Ordnung erzeugten Kongruenz, welche die Normalenkongruenz der Oberfläche zweiter Ordnung projektivisch verallgemeinert.

Bereits in den ersten Entwickelungen des zweiten Bandes zeigt sich die grosse Bedeutung der von Schuhmacher eingeführten dritten Zahl r einer Kongruenz $[m, n]$, der Anzahl der Geradenpaare, welche mit einer gegebenen Geraden in einer Ebene liegen und sich auf derselben kreuzen. Diese Zahl r geht sofort in die mit einer Kongruenz verknüpften Anzahlen ein. Es erzeugen z. B. die Nullebenen der Punkte einer Geraden l einen Torsus $[l]$ der Klasse $\frac{1}{2} m(m-1)+r$, die Nullpunkte, deren Ebenen eine Gerade enthalten, liegen auf einer Kurve (l) der Ordnung $\frac{1}{2} n(n-1)+r$. Der Ort (P) der Punkte, deren Nullebenen einen gegebenen Punkt P enthalten, ist von der Ordnung $\frac{1}{2} m(m-1)+r$. Die Ebenen, deren Nullpunkt einer gegebenen Ebene ε angehört, umhüllen eine Fläche (ε) von der Klasse $\frac{1}{2} n(n-1)+r$. Auf die Brennfläche der Kongruenz (m, n) führt die Betrachtung der Regelfläche $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die eine Gerade l treffenden Geraden ausfüllen, die l m-fach enthält. Auch wenn l in eine Gerade der Kongruenz übergeht, bleibt die Ordnung der Fläche dieselbe. Das ist nur dadurch möglich, dass zweimal die beschreibende Gerade sich mit l vereinigt hat. Dies führt im allgemeinen auf die Brennfläche $\Phi(F)$ aus Punkten, von denen zusammenfallende Kongruenzstrahlen ausgehen und auf eine zweite Fläche $\Phi(\varphi)$, die von den Ebenen umhüllt wird,

in denen solche unendlich nahe Geraden liegen. Die Identität beider Flächen und das Verhalten der beiden Brennpunkte und Brennebenen eines Strahls wird auf die übliche Art nachgewiesen. Dieser Entwickelung bei weitem vorzuziehen ist die andere, welche einen unendlich dünnen Teil der Kongruenz als die Umgebung des Hauptstrahls eines Strahlennetzes erkennt. Ordnung und Klasse der Brennfläche werden auf

$$m_1 = 2n(m-1) - 2r, \; n_1 = 2m(n-1) - 2r$$

bestimmt, so dass die Kleinsche Formel

$$m_1 - n_1 = 2(m-n)$$

sich bestätigt. Wenn die Kongruenz zwei singuläre Kurven besitzt oder speziell aus den Sehnen einer Raumkurve besteht, so spricht man ihr gewöhnlich eine Brennfläche ab. Sturm will diese Annahme nicht gelten lassen, sondern hält die abwickelbare Fläche, welche die beide Kurven berührenden Ebenen einhüllen, für die Punkt-Brennfläche $F(\Phi)$, während allerdings die Fläche $F(\varphi)$ ausartet und zwar in die Gesamtheit der die eine oder andere Kurve berührenden Ebenen.

Die Strahlenkongruenzen erster Ordnung werden im zweiten Abschnitt genau nach den von Kummer und Cremona vorgezeichneten Gesichtspunkten behandelt. Zu der Sehnenkongruenz einer Raumkurve dritter Ordnung und der Kongruenz der Strahlen, welche eine Kurve n^{ter} Ordnung und eine $(n-1)$-fache Sekante derselben zu gleicher Zeit treffen, gesellt der Verfasser noch eine dritte Kongruenz erster Ordnung. Bezieht man nämlich eine Ebeneninvolution projektivisch auf eine ihrer Axe angehörige Punktreihe, so sendet jeder Punkt der Axe n in den Ebenen der zugehörigen Gruppe liegende Strahlbüschel aus und die Gesamtheit derselben ist eine Kongruenz $[1, n]$. Der nächste und wichtigste Abschnitt des Bandes ist der gemeinsamen Betrachtung aller Komplexe $[2, n]$ ohne singuläre Linien gewidmet. Die Fläche (P) ist von der Ordnung $n-1$; da ein Komplexstrahl g nur die $n-1$ Einschnitte in die übrigen in (Pg) liegenden Kongruenzstrahlen mit ihr gemein hat; hieraus folgt, da $m = 2$ ist, dass $r = n - 2$ ist. Die Brennfläche ist deshalb von der vierten Ordnung und der $2n^{\text{ten}}$ Klasse. Die singulären Punkte der Kongruenz sind Doppelpunkte der Brennfläche. Ganz allgemein ist $m - \gamma$ die Klasse des Kegels, welcher in einem singulären Punkt S_h sich der Brennfläche anschliesst, wenn ausserhalb des Kegels (S_h) noch γ Kongruenzstrahlen durch (S_h) hindurchgehen (295). In unserem Fall ist $m - \gamma = 2$ und es geht also, was für die Folge wichtig wird, durch keinen singulären Punkt ein ausserhalb des Kegels (S_h) liegender Kongruenzstrahl. Dass singuläre Punkte von höherer als der sechsten Ordnung nicht möglich sind, folgt daraus, dass ein Kegel (S_h) die Brennfläche in einer Kurve $2h^{\text{ter}}$ Ordnung berührt, welche den Brennpunkt h-fach bereithält; ihre h Tangenten in S_h müssen unter den 6 vierfachen Tangenten der Brennfläche in ihrem Doppelpunkt S_h sich befinden. Für die Ermittelung der Anzahlen a_h der singulären Punkte S_h gewinnt Sturm (314 flg.) die drei Formeln:

$$1) \quad \sum a_h h = 4(n+2)(314), \qquad 2) \quad \sum a_h h^2 = 4n(n+2),$$
$$3) \quad \sum a_h h^3 = (n+2)^2(n-1).$$

Die beiden letzten Formeln werden aus der Betrachtung der Schnittgruppe der einer Geraden zugehörigen Kurve (l), mit Φ und aus der Natur des Schnittpunktsystems dreier Regelflächen $(l), (l'), (l'')$ gewonnen, also ähnlich wie bei Kummer; die erste Formel aber entspringt aus der Erörterung der Verwandtschaft aut Φ, in der je zwei zusammengehörige Brennpunkte einander entsprechen und in der einem ebenen Schnitt eine Kurve $4(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung entspricht. Die Schnittkurven der Polarfläche eines Punktes P und seiner (P) entsprechen einander. Da die singulären Punkte der Kongruenz die einzigen singulären Punkte der Verwandtschaft sind, so ergiebt sich aus der Vergleichung der beiden Gradzahlen der Schnittkurven die Gleichung [1]. Der fundamentale Kummersche Satz, dass eine Konfiguration $[2, n]$ $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ Doppelstrahlen besitzt, wird aus der Betrachtung der Flächen (P) gewonnen; da drei Punkte in der einzigen (P) liegen, welche zu dem Schnittpunkt ihrer drei Nullebenen gehört, so bilden sie ein lineares System. Ausser der Kurve (l), welche zu PP' gehört, haben die Flächen (P), (P') eine allen (P) gemeinsame Kurve der Ordnung $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ gemeinschaftlich. Diese Kurve muss notwendig aus Punkten mit unbestimmter Nullebene bestehen, also aus Doppelstrahlen mit unbestimmter Nullebene für jeden ihrer Punkte. Durch jeden singulären Punkt S_h muss, da er auf der zwei (P) gemeinschaftlichen Kurve $\frac{1}{2}h(h-1)$-fach liegt, diese Zahl von Doppelstrahlen hindurchgehen, welche Doppelstrahlen des Kegels (S_h) sind, der deshalb rational ist. Bei einem Doppelstrahl d besteht die Regelfläche $[d]$ nur aus den Kegeln zweier singulärer Punkte, die auf a liegen und deren Ordnungszahlen die Summe $n+2$ besitzen. Jeder S_{i+2} sendet $\frac{1}{2}i(i+1)$ Doppelstrahlen aus und bedingt ebenso viele S_{n-i}, jeder S_{n-i} sendet aber $\frac{1}{2}(n-i-1)(n-i-2)$ Doppelstrahlen aus, deren jeder noch einen S_{i+2} trägt. Es muss also, entweder

$$(i + 2 \gtrless n - i)$$
$$\frac{1}{2}i(i+1)\,\frac{1}{2}(n-i-1)(n-i-2) \leqq \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

oder

$$(i + 2 = n - i)$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}i(i+1)\left(\frac{1}{2}i(i+1)+1\right) \leqq \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

sein, da nach der obigen Betrachtung die linke Seite die geringste Zahl der Doppelstrahlen ist, die auftreten. Dies ergiebt die Möglichkeiten: Es sind ausser den S_1 und S_2 ein S_{n-1} $\left(n-1 > 2\right)$ und $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ singuläre Punkte S_3 vorhanden oder es giebt ausser den S_1 und S_2 nur singuläre Punkte von der Ordnung $\frac{1}{2}n+1$, und es ist $n=4$ oder 6.

Berechnet man nun aus den obigen Formeln α_1 und α_2 und bedenkt, dass $n-1 \leqq 6$ ist, so erhält man zunächst 6 Konfigurationen von der ersten Art

$$(2, 2), (2, 3), (2, 4)\ (2, 5)\ (2, 6)_I\ (2, 7)$$

indem bei den drei ersten ein beliebiger der 16, 5, 2 Punkte S_1, S_2, S_3 als S_{n-1} gekennzeichnet werden kann. Die Konfiguration (2, 4) tritt noch einmal als solche zweiter Art auf und es bleibt nur die eine Konfiguration $(2, 6)_{II}$ mit 4 vierfachen Punkten und 8 Doppelpunkten übrig. Die beiden Bezeichnungen erster und zweiter Art bei $(2, 6)_I$ und $(2, 6)_{II}$ sind die umgekehrten wie bei Kummer. Hinsichtlich der Verteilung der singulären Punkte auf die singulären Kegel ist schon vorangegangen, dass eine singuläre Ebene fünf, ein Kegel zweiten Grades acht singuläre Punkte enthält. Die Gleichungen für die $\alpha_h^{(i)}$ (Anzahl der singulären Punkte h^{ten} Grades auf einem (S_i) einschliesslich der Spitze, wenn $h = i$) werden einerseits mit Hülfe des Schnittpunktsystems zwischen (S_i), der (P) von S_i und Φ gewonnen, in dem nur zwei nicht singuläre Punkte vorkommen. Zweitens wird das Schnittpunktsystem einer Kurve (l) mit dem Kegel (S_i) in Betracht gezogen. Die so gewonnenen Formeln genügen, um die 7 Kongruenzen nach Art der singulären Punkte und der Gruppierung der singulären Punkte auf den einzelnen Kegeln festzulegen (324).

Die Gesamt-Kongruenz aller Doppeltangenten von Φ ist eine [12, 28], so dass nach Abzug der gegebenen Kongruenz und ihrer singulären Ebenen eine konfokale Restkongruenz verbleibt, deren Entstehungsweise angegeben wird. Diese konfokalen Kongruenzen werden da, wo dies angeht, nach der Methode von Hirst mit Hilfe der Regelscharen hergestellt, welche die gegebene Kongruenz durchziehen. Von der Fläche (l) lösen sich, wenn l zwei singuläre Punkte enthält, die beiden Kegel derselben ab. Eine sorgfältige Untersuchung zeigt, dass die Doppelkurve der Restfläche, bestehend aus der Doppelgeraden l und einem Bestandteil der l zugehörigen Kongruenzkurve von so hohem Grade ist, dass ein weiteres Zerfallen der Restfläche eintritt, dann wenigstens, wenn die Gerade l nicht ein Komplexstrahl, die beiden singulären Punkte unverbunden sind. Diese Betrachtung führt bei der $(2, 6)_{II}$ zu Paaren von Regelflächen, welche die Verbindungslinien zweier unverbundener S_2 enthalten. Die acht S_2 zerlegen sich in zwei Gruppen von vier unter sich unverbundenen Punkten, die vier Kegel der Punkte einer Gruppe haben die anderen vier Punkte S_2 und die vier S_4 gemeinsam. Jede Gruppe führt also auf sechs Paare von Regelscharen. Da jede dieser Regelscharen eine Mantellinie aus jedem Kegel (S_2) aufnimmt, der einen Punkt der anderen Gruppe zur Spitze hat, so projicieren alle ihre Geraden die vier Punkte S_4 unter demselben Doppelverhältnis; diese Flächen und Kegel und mit ihnen $(2, 6)_{II}$ gehören also einem tetraedralen Komplex an, dessen Fundamentaltetraeder aus den vier Punkten S_4 besteht. Aus der Gruppe, welche die S_4 mit den anderen vier Punkten S_2 bilden, entsteht derselbe tetraedrale Komplex; $(2, 6)_{II}$ liegt ausserdem vollständig in den Komplexen dritten Grades aus den Geraden der Oberflächen zweiter Ordnung, welche die eine oder andere Gruppe associierter Punkte enthalten. Dies führt auf zwei Scharen von

Regelflächen, die in $(2, 6)_{II}$ enthalten sind. Bei allen anderen Komplexen mit Ausnahme von (2, 7) existiert ein S_{n-1}, der in der Ebene eines S_1 liegt. Von der Kongruenz-Regelfläche eines in (S_1) liegenden und von S_{n-1} ausgehenden Strahls lösen sich die beiden Kegel (S_1) und (S_{n-1}) ab, und es bleibt noch eine Regelfläche übrig, die S_{n-1}, sicher aber auch S_1 enthält, weil die Gerade den in (S_1) liegenden Kegelschnitt von Φ noch einmal, ausser in S_{n-1} schneidet. Durch jeden S_2 ausserhalb $[S_{n-1}]$, durch jeden S_1, der nicht mit S_{n-1} und S_1 verbunden ist, und durch alle S_3 geht je ein Strahl der Regelschar. Dies ergiebt eine Regelschar, die durch genau acht assoziierte Grundpunkte hindurchgeht und $1 + \frac{1}{2}(5-n)(6-n)$ Tangentialebenen, die Ebenen der singulären S_1 in der Gruppe besitzt, wenn $n > 2$ ist; im Falle $n = 2$ kommt noch eine achte Tangentialebene deshalb hinzu, weil (S_{n-1}) in einen (S_1) übergeht. Jede der erwähnten Tangentialebenen enthält noch eine zweite veränderliche Gerade der Regelfläche; diese dreht sich um ein S_{n-1}, welches in der Gruppe der assoziierten Punkte enthalten ist. Auf diese Weise kommt man bei

$$(2, 6)_I \; (2, 5), \; (2, 4) \; (2, 3)$$

auf 1, 2, 3, 5 Gruppen assoziierter Punkte, die aus singulären Punkten bestehen. Jedoch nur bei $(2, 6)_I$ ist auf diese Weise die Gesamtzahl der möglichen Gruppen erschöpft; bei (2, 5), (2, 4), (2, 3) giebt es 3, 6, 15, bei (2, 2) sogar 30 derartige Gruppen. Die Strahlbüschel um S_{n-1} und die S'_{n-1}, welche die Trägerfläche der Regelschar in die Ebenen von S_1 und S'_1 einschneidet, sind projektivisch zu einander. Aus diesem Grunde sind (2, 2), (2, 3), (2, 4), bei welchen die Anzahl der Paare $S_1, S_{n-1}; S'_1, S'_{n-1}, \ldots$ grösser als 1 ist, Bestandteile von einem oder mehreren tetraedralen Komplex, die mit Hilfe zweier von diesen Strahlbüscheln erzeugt werden können. (2, 3) erweist sich als Ort der Strahlen, die homologe Strahlen dreier projektivischen Büschel treffen, die jedoch so liegen müssen, dass an einer Stelle drei homologe Strahlen zusammenlaufen. Gelangt dieser Punkt in die Ebene der drei Zentra, oder haben zwei Strahlbüschel einen Strahl entsprechend gemein, so entsteht ein (2, 2). Diese Kongruenz erweist sich also als Schnitt eines Gewindes mit einem tetraedralen Komplex. (2, 5) lässt sich auf ähnliche Art, wie $(2, 6)_{II}$ als Bestandteil eines tetraedralen Komplexes nachweisen. $(2, 6)_I$ und (2, 7) hingegen können einem solchen Komplex nicht angehören, weil die singulären Punkte von höherem als dem zweiten Grade nur in den Ecken des Fundamentaltetraeders liegen können, also ihre Zahl nicht grösser als 4 sein kann. Die Trägerfläche einer Regelschar der Kongruenz berührt Φ in einer Kurve vierter Ordnung erster Art, auch die Geraden ihrer Leitschar sind Doppeltangenten von Φ und bilden eine zweite Kongruenz, deren Brennfläche Φ ist. Jedoch nur bei (2, 3) und (2, 2) ist auf diese Art die Restkongruenz völlig erschöpft, bei (2, 7) bis (2, 4) bleibt noch eine Restkongruenz zu betrachten. Bei allen Konfigurationen erster Art giebt es so viele Systeme von Regelflächen dritter Ordnung als S_{n-1} vorliegen; die Kongruenzfläche einer

durch S_{n-1} hindurchgehenden Geraden zerfällt in (S_{n-1}) und eine solche Regelfläche. Die einfachen Leitgeraden dieser Flächen bestehen aus Doppeltangenten von Φ und gehören also einer nur gegebenen konfokalen Kongruenz an; dies giebt bei (2, 7) $(2, 6)_I$ (2, 5) (2, 4) die fehlende Restkongruenz. Bei $(2, 6)_{II}$ hat jede in seinem tetraedralen Komplex enthaltene Sehnenkongruenz erster Ordnung eine Regelfläche vierter Ordnung mit der Fläche gemeinsam; ∞^2 von diesen Flächen besitzen eine einfache Leitgerade, aus denen sich die Restkongruenz zusammensetzt. Auf andere Weise hat, wie beiläufig erwähnt werde, Laguerre die konfokalen Kongruenzen der $(2, 6)_{II}$ aufgefunden. Bleiben wir mit Laguerre beim Fall der Normalenkongruenz stehen, so setzt sich die Kongruenz aller Doppeltangenten der Krümmungsmittelpunktfläche zusammen einmal aus den Normalen der Flächen, sodann aus den Geraden, deren Normalie (Ort der Fusspunkte der von ihren Punkten aus auf die Fläche gefällten Lote) zerfällt. Enthält die Normalie eine Gerade der einen oder anderen Schar, so erhält man die beiden auf die erste Art hergestellten konfokalen Kongruenzen; zerfällt dieselbe in zwei Kegelschnitte, so erhält man die Restkongruenz zehnter Ordnung. Um die von einem Punkt ausgehenden Strahlen derselben zu erhalten, braucht man nur die Fusspunkte der sechs von ihm an gefällten Lote zu drei und drei durch Ebenen zu verbinden. Dem in einer solchen Ebene liegenden Kegelschnitte des Axenkomplexes sind unendlich viele der Oberfläche eingeschriebene Dreiecke umschrieben. Die Normalen der Fläche in den Ecken eines solchen Dreiecks laufen in einem Punkt zusammen, der eine der von P ausgehenden Geraden beschreibt.

Zum Schluss dieses Hauptabschnittes werden eindeutige Abbildungen der Kongruenzen untersucht. Dieselbe ist eindeutig auf die von den verschiedenen S_{n-1} ausgehenden Ebenenbündel und die in den einzelnen (S_1) liegenden Punktfelder bezogen. Gleichartige von diesen Gebilden sind durch Cremonasche Verwandtschaften, die näher untersucht werden, verknüpft.

Bei der speziellen Behandlung der einzelnen Kongruenzen ist, wie es sich gebührt, der (2, 2) der breiteste Raum gelassen. Bezeichnet man mit 1 einen der 16 singulären Punkte, mit 2, 3, 4, 5, 6 die in seiner Ebene liegenden singulären Punkte, so kann man jede andere Ebene durch die beiden Punkte kennzeichnen, welche sie mit der ersten Ebene gemein hat. In jeder Ebene ist der zugehörige Punkt unzweideutig gegeben. Es sind z. B. die durch den Punkt [23] hindurchgehenden Ebenen (12), (23), (31), (45), (56), (64). Auf Grund dieser Bezeichnung wird eine genaue Untersuchung der Kummerschen Konfiguration ermöglicht. Am wichtigsten ist die Aufstellung der fünf Paare von Gruppen assoziierter Punkte, die aus paarweise verbundenen singulären Punkten bestehen. Zwei verbundene Punkte bilden eine solche Gruppe mit den sechs Punkten, die von ihren beiden Ebenen ausgeschlossen sind, die ergänzende Gruppe besteht aus den acht Punkten in ihren Ebenen, es zeigt sich, dass bei der oben beschriebenen Operation je zwei solche Gruppen auf dieselbe konfokale Kongruenz führen und zwar tauschen je zwei verbundene der 16 Knotenpunkte ihre Ebenen gegen

einander aus. So gelingt es (382) die Tabelle aufzustellen, aus welcher die in jeder der sechs konfokalen Kongruenzen einem Punkte zugeordnete Ebene ermittelt werden kann. Indem man auch je zwei dieser neuen Kongruenzen zusammenstellt, kommt man im ganzen auf 15 Paare assoziierter Gruppen, von denen jede den Übergang von einer zur anderen Kongruenz vermittelt. Auf Grund dieser Tabelle ist leicht zu erkennen, dass die sechs Gewinde, denen diese Kongruenzen angehören, paarweise in Involution stehen. Bereits bei der Untersuchung der Weberschen Fünfseite, die aus der Kongruenz angehörigen Verbindungslinien von singulären Punkten bestehen, tritt eine Analogie der Konfiguration zu der Fläche dritter Ordnung in die Erscheinung. Diese tritt in Evidenz mit Hilfe der oben erwähnten Abbildung des Strahlengewindes in den Punktraum; hierbei entspricht der (2, 2) eine Fläche vierter Ordnung, welche den singulären Kegelschnitt k^2 doppelt enthält; die fünf Scharen verknüpfter Regelscharen bilden sich in die fünf Doppelscharen von Kegelschnitten ab, welche die Tangentialebenen der Kummerschen Kegel ausschneiden etc. Cremona hat seinerzeit aus einer analogen Betrachtung die konfokalen Konfigurationen einer (2, 2) abgeleitet. Er bezog dieselben auf die fünf Mannigfaltigkeiten doppelt berührender Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch den fundamentalen Kegelschnitt hindurchgehen. Auch er hatte, wie es auch Sturm thut, die Fläche vierter Ordnung auf eine Hilfsfläche dritter Ordnung, die k_1^2 enthält, abgebildet. Teilt man die Flächen vierter Ordnung nach den Realitätsverhältnissen ihrer Geraden in Arten ein, so ergiebt sich entsprechend eine Einteilung der Konfigurationen 2, 2 nach der Realität der Knotenpunkte; entsprechend den fünf wesentlich verschiedenen Arten der Flächen dritter Ordnung ergeben sich fünf verschiedene Gattungen von (2, 2), zu denen als letzte die ganz imaginäre Konfiguration und die mit imaginärer Brennfläche hinzutreten. Der Nachweis, dass die Doppeltangenten einer Fläche vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten in sechs getrennten Konfigurationen angeordnet sind, knüpft an den Nachweis der Paare assoziierter Gruppen an, in welche die 16 Knotenpunkte zerlegt werden können. Aus einer solchen $[N]_8$ erhält man ein System die Fläche überziehender Raumkurven vierter Ordnung, längs deren sie von Oberflächen zweiter Ordnung berührt wird. Verbindet man einen Punkt einer solchen Kurve mit den beiden anderen, welche die Tangentialebene von Φ auf ihr ausschneidet, so erhält man zwei Erzeugende der berührenden Fläche, die zu verschiedenen Scharen gehören. Man kann eine bestimmte dieser Scharen durch die Forderung herausheben, dass ihr durch einen festen Punkt von $(N)_8$ gehender Strahl in einer bestimmten der beiden durch ihn gehenden Ebenen von $(N)_8$ liegen soll und so die völlige Trennung der sechs von einem Punkt von Φ ausgehenden Doppeltangenten vornehmen. Ausser den $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ notwendigen Doppelstrahlen kann eine Kongruenz, wie bereits Kummer bemerkt hat, sogenannte mögliche Doppelstrahlen besitzen. Dies tritt ein, wenn die

Kummersche Fläche Doppelgerade besitzt. Der Untersuchung dieser Fälle — die Zahl der Doppelgeraden schwankt zwischen 1 und 4 — ist der letzte Teil des Abschnittes über die Kongruenzen (2, 2) gewidmet.

Die Kongruenz (2, 3) stellt sich als gemeinsames Glied von 10 tetraedralen Komplexen heraus, die 6 konfokalen Konfigurationen gehen mit Hilfe von 15 Gruppen $(N)_8$ assoziierter Punkte in einander über. Der Nachweis, dass eine Fläche vierter Ordnung mit 15 Knotenpunkten die Brennfläche von 6 Konfigurationen (2, 3) ist, wird geliefert und zum Schluss die Erzeugungsweise erläutert, von der Stahl in seiner Bearbeitung der Kongruenz (3, 2) ausging.

Die Kongruenz (2, 4) besitzt drei Gruppen assoziierter Punkte, zu ihrer Brennfläche gehören vier gleichartige Konfigurationen. Von den verschiedenen Erzeugungsweisen der (2, 4) ist die einfachste die mit Hilfe zweier quadratisch bezogenen Felder, aus ihr heraus werden die hauptsächlichsten Eigenschaften der Kongruenz nochmals entwickelt.

Auch (2, 5), $(2, 6)_I$, (2, 7) erfahren eine kurze Behandlung in dem oben angedeuteten Sinn. Auf Grund der Rohn'schen Untersuchungen zeigt sich, dass nicht jede Oberfläche vierter Ordnung mit 13, 12, 11 Knotenpunkten in der oben betrachteten Art zerfallende Konfigurationen besitzt. Für die dualen Formen dieser Komplexe werden die Caporali'schen Erzeugungen gegeben: ein Gebüsch von Kegelschnitten einer Ebene ist kollinear auf den Ebenenraum bezogen. Jeder Punkt gehört allen Kegelschnitten eines Netzes an und wird mit dem Zentrum des zugehörigen Ebenenbündels verbunden. Ein interessantes Beispiel von (7, 2) bilden die Asymptoten aller durch fünf Punkte möglichen Raumkurven dritter Ordnung.

$(2, 6)_{II}$ erfährt eine ausführlichere Behandlung und verdient dieselbe schon deshalb, weil alle Konfigurationen geringerer Klassenzahl als besondere Fälle von ihr zu betrachten sind. Beim Übergang von einer gegebenen Konfiguration $(2, 6)_{II}$ zu einer konfokalen behält die eine Gruppe S_2 ihren Grad und Kegel, die andere Gruppe tauscht die Rolle mit den S_4. Hieraus sieht man, dass auch die S_2 eine Gruppe assoziierter Gruppen bilden, deren Geradenkomplex die beiden konfokalen Konfigurationen angehören. Aus den allgemeinen Entwickelungen ist die Stahl'sche Entstehungsweise der $(2, 6)_{II}$ evident. Sie wird von einer Regelschar beschrieben, wenn der Träger derselben in einem Bündel verbleibt und an einem der Grundpunkte die von ihm ausgehende Gerade der Regelschar einen Kegel beschreibt, welcher vier der acht Grundpunkte enthält. Auf Grund der Thatsache, dass die Konfiguration einem Tetraederkomplex angehört, kann man die $(2, 6)_{II}$ als Ort der Strahlen auffassen, die homologe Geraden dreier projektivischer Regelscharen treffen. Doch müssen in vier der ach Schnittpunkte homologe Tripel zusammenstossen. Nachdem noch die kinematische Bedeutung von $(2,6)_{II}$ hervorgehoben ist — ein Stab, der mit festen Punkten auf drei Ebenen gleitet, beschreibt eine $(2, 6)_{II}$ — wird das Auftreten „möglicher" Doppelstrahlen bei den Konfigurationen (2, 5) bis (2, 7) untersucht.

Von den drei verschiedenen Gattungen der Konfigurationen $(2, n)$ mit singulären Linien erledigen sich die beiden ersten sehr leicht. Die einzige Sehnenkongruenz ist die $(2, 6)$, auf welche die Raumkurve vierter Ordnung erster Art führt. Sind zwei singuläre Linien vorhanden, so hat man einmal den Fall zweier Kegelschnitte mit zwei gemeinsamen Punkten, zweitens den Fall, dass die eine singuläre Kurve eine Gerade ist, welche die andere n^{ter} Ordnung in $(n-2)$ Punkten trifft. Hierzu könnte man selbstverständlich Kongruenzen treten lassen, die aus einer $(2, n)$-Korrespondenz unter den Ebenen eines Büschels und den Punkten seiner Axe entstehen.

Der schwierigste Fall ist der, wo nur eine singuläre Linie vorliegt. Würde man die Brennfläche von vornherein geben, so könnte der Tangentialkegel aus einem Punkt der singulären Linie stets zerfallen und nur einer dieser Bestandteile der Kongruenz angehören. Deshalb wählt der Verfasser die folgende Untersuchungsform: Gegeben ist eine Kurve, von jedem Punkt derselben gehen ein Kegel h^{ten} Grades und t einzelne Gerade einer Kongruenz aus, dieselben stützen sich weder auf eine zweite Kurve noch ein zweites Mal auf die gegebene. Dann ist entweder (A) die singuläre Linie eine Gerade oder sie ist keine Gerade, und man hat die Fälle (B) $h=1$, $t=1$, (C) $h=2$, $t=0$. Die Gattung (A) besteht aus den Tangenten aller Kegelschnitte, die bei einer Fläche n^{ter} Ordnung mit $(n-2)$-facher Geraden diese zweimal treffen. Bei den Gattungen (B) und (C) werden die Schumacherschen Erweiterungen zu Kummers Resultaten genau aufgeführt. Der allgemeine Fall von (B) entsteht, wenn man eine unikursale Raumkurve so auf einen Kegel projektivisch bezieht, dass jeder Punkt in der zugehörigen Tangentialebene des Kegels liegt, und die Strahlbüschel zusammenfasst, die jeder Punkt in die zugehörige Tangentialebene sendet. Ein spezieller Fall ist der, dass die Raumkurve auf dem Kegel selbst liegt und die Spitze $(n-2)$-fach enthält. In diese Klasse gehören die von Kummer bemerkten Fälle. Von der dritten Gattung besteht eine Art aus den Tangenten eines Kegels, die von den Punkten einer (ebenen) Kurve μ^{ter} Ordnung ausgehen, welche die Spitze $(\mu-1)$-fach enthält, eine zweite und dritte aus Kegeln zweiten Grades, welche von einem Kegelschnitt oder einer Raumkurve dritter Ordnung ausstrahlen, und speziell zu ihr gelegene fünf Punkte projizieren.

Der dritte Band des Werkes beginnt mit der Untersuchung der Komplexfläche, welche einer Geraden l hinsichtlich eines Komplexes zweiten Grades Γ^2 zugeordnet ist. Die Kegel, welche von Punkten von l ausgehen, umhüllen, die Kegelschnitte, welche in den Ebenen von l liegen, beschreiben diese Fläche, welche l zur Doppelgeraden hat, 8 Doppelpunkte und 8 in Kegelschnitten berührende Ebenen besitzt. Diese 16 Elemente lassen sich auf vier Arten zu zwei Möbiusschen Tetraedern anordnen und ergeben zusammen mit der Geraden l und ihrer Polare l' die vier Kleinschen in Involution stehenden Gewinde von l. Der Verfasser verwendet zur Untersuchung wesentlich die $(2, 2)$-Korrespondenz, in welcher den Punkten von l die l enthaltenden Tangentialebenen der von ihnen ausgehenden Komplex-

kegel entsprechen. Wir gestehen, dass wir diese Entwickelung lieber allein aus der konsequenten Ausnutzung des Begriffes der singulären Ebene und des singulären Punktes geführt sähen. Da der Komplexkegel eines Punktes notwendig zerfallen muss, wenn drei seiner Strahlen in einer Ebene liegen, folgt sofort, dass alle Schnittpunkte dreier zu einer Geraden gehörenden Komplexkegel singuläre Punkte sind und deshalb auch allen anderen Komplexkegeln von l angehören und paarweise in vier von l ausgehenden Ebenen liegen. Die Verbindungsebene dreier solcher Punkte gehört notwendig zu einem Ebenenpaar, das von einem Punkte von l ausstrahlt, muss deshalb noch einen vierten der acht Punkte enthalten etc. Auf natürlichste Weise würde man so erkennen, dass l vier singuläre Punkte enthält und vier singuläre Ebenen aussendet, der fundamentale Satz, dass beide Gruppen projektivisch sind, würde natürlicher, als es beim Verfasser geschieht, auf Staudts Tetraedersatz zurückgeführt sein. Für die synthetische Untersuchung der Fläche würde sich ferner eine Handhabe daraus ergeben, dass die Kegel — als Flächen zweiter Ordnung, die einem Netz angehören und eine Gerade berühren — einen Büschel zweiter Ordnung bilden. Man würde die von den vierpunktig berührenden Kegelschnitten einer Kurve vierter Ordnung wohlbekannten Entwickelungen auf die Raumkurven vierter Ordnung erster Art der Fläche übertragen, in denen sie von den Kegeln berührt wird.

Die Fläche der singulären Punkte ist zunächst von der der singulären Ebene begrifflich verschieden. Da den Schnittpunkten einer Geraden mit der ersten Fläche die Tangentialebenen an die zweite Fläche projektivisch zugeordnet sind, so ist jede Tangente der einen auch eine Tangente der anderen Fläche (522); es folgt die Identität beider. Es wird auf die übliche Art bewiesen, dass eine singuläre Tangente s der Φ sowohl die beiden Zentra der Strahlbüschel ausschneidet, welche der Komplex in der Berührungsebene der Tangente besitzt, als auch die beiden Ebenen an die Fläche sendet, in denen die Strahlbüschel des Berührungspunktes liegen. Φ ist die eine Brennfläche der Kongruenz aus den s, der andere Brennpunkt trennt mit dem Berührungspunkte eines singulären Strahles dessen Schnittpunkte harmonisch.

Dass die Komplexfläche eine Kummersche Fläche ist, wird abzählend aus der Betrachtung des Charakters der Komplexkurven abgeleitet (529 ff.) Zu jedem Komplex zweiten Grades sind deshalb sechs Gewinde konsingulär, welche zu den quadratischen Kongruenzen der Kummerschen Fläche gehören. Ordnet man je die zu demselben quadratischen Komplex gehörigen Doppeltangenten zweier Punkte von Φ einander zu, so entstehen projektivische Strahlengruppen. Hat man eine Tangente beliebig ausgewählt, so ist ihr durch diese Projektivität eine zweite in einer beliebigen Tangentialebene zugeordnet. Jede so entstehende Kongruenz S besteht aus den singulären Strahlen eines Komplexes vom zweiten Grade. Der Verfasser benutzt zum Beweise des ersten Teils die Korrespondenzen (2, 2), welche eine der sechs konfokalen quadratischen Kongruenzen zwischen den Punkten und Ebenen einer Geraden l hervorruft. Die Verzweigungspunkte der Punktreihe sind die

Schnittpunkte A, A', A'', A''' mit Φ. Die Doppelpunkte B, B', B'', B''' werden von den Geraden ausgeschnitten, welche die Kongruenz in die Tangentialebenen $\beta, \beta', \beta'', \beta'''$ von l einschneidet. Es sei nun so bezeichnet, dass

$$A\,A'\,A''A''' \;\overline{\wedge}\; \beta\,\beta'\,\beta''\,\beta''',$$

und folglich auch

$$A\,A'\,A''A''' \;\overline{\wedge}\; B\,B'\,B''\,B'''$$

ist. Wenn man nun die Korrespondenz sich an zwei Tangenten einer Kurve dritter Klasse versinnbildlicht, so sind nach dem dualen Fall eines Schröterschen Satzes

$$A\,A', \quad A''\,A''', \quad B\,B', \quad B''\,B'''$$

Paare einer Involution. Auch je zwei andere Tangenten, welche von derselben der sechs konfokalen Kongruenzen in β und β' liegen, schneiden ein Paar dieser durch $A\,A'$, $A''A'''$ schon bestimmten Involution aus. Den Nachweis, dass jede singuläre Kongruenz auf einen quadratischen Komplex führt, hätten wir ausführlicher gewünscht. In die Reihe der konsingulären Komplexe gehören auch die doppelt gedachten Gewinde $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_6$ der sechs konfokalen Kongruenzen. Die Kongruenz S erweist sich schon jetzt als Schnitt (unendlich naher) konsingulärer quadratischer Komplexe.

Die Gesamtheit der konsingulären Gebilde erweist sich als ein quadratisches Gebilde, insofern die in zwei beliebigen Ebenen liegenden Komplexkegelschnitte projektivisch bezogene Büschel zweiter Ordnung beschreiben, in denen die bezüglichen Geradenpaare der sechs konfokalen Kongruenzen homologe Gebilde sind. Sehr befriedigend wird man die Herleitung dieses Stahlschen Satzes nicht finden können. Der Beweis wird darin erblickt, dass die Kegelschnittreihe die erste Charakteristik 2 besitzt. Es folgt nun die Untersuchung der Polar-Verhältnisse auf Grund der Plückerschen Definitionen. Zur Überleitung auf die Anschauungen, welche der zweite Teil des Bandes bringen wird, folgt eine Untersuchung der Involutionen vom Geschlecht 1, welche auf einer Regelfläche vierter Ordnung mit zwei windschiefen Geraden aus Geradenpaaren gebildet werden können. Solche Involutionen sind paarweise verbunden in der Art, dass jedes Paar der einen mit jedem Paar der anderen zu einer Regelschar gehört. Jede der vier Doppelgeraden der einen ergiebt also mit jeder der vier Doppelgeraden der anderen Berührungspunkte von Doppeltangenten der Fläche. Da jedes derartige Geradenpaar polarreziprok in Bezug auf eine von vier Flächen zweiter Ordnung ist, die paarweise in Involution liegen, so zerfällt die Kongruenz der Doppeltangenten in vier getrennte Kongruenzen. Die vier in einem Punkte berührenden Doppeltangenten und die Erzeugende des Punktes bilden einen sich selbst projektivischen Wurf, so dass die Fläche später als Singularitätenfläche einer Mannigfaltigkeit von Komplexen zweiten Grades mit zwei Doppelgeraden hervortritt.

Die Regelfläche vierter Ordnung mit zwei Doppelstrahlen, die ein Strahlennetz mit einer Γ^2 gemein hat, zerfällt, wenn das Strahlennetz zwei Strahlbüschel von Γ^2 enthält, in diese und eine Regelschar, oder in vier Strahl-

büschel, je nachdem die ersteren Strahlbüschel einen Strahl gemein haben — sich schneiden — oder nicht. Zwei beliebige Gerade der Leitschar einer Regelschar von Γ^2 können als Leitstrahlen eines sie enthaltenden Netzes aufgefasst werden. Seine mit Γ^2 gemeinschaftliche Fläche besteht aus zwei Regelscharen, welche zwei Gerade gemein haben oder sich zweimal schneiden. Man erhält aus einer Regelschar auf diese Weise ∞^2 ihr verbundene Regelscharen, ein sogenanntes Feld. Nimmt man zu allen diesen Regelscharen die verbundenen Regelscharen, so erhält man das Gebüsch von Regelscharen, das die ursprüngliche Regelschar enthält, eine Mannigfaltigkeit, von der je zwei Glieder durch zwei Operationen der obigen Art verbunden sind. Die Mittelglieder dieser Ketten bilden ein zweites derartiges Gebüsch. Diese „verbundenen" Gebüsche stehen in der Beziehung, dass ungleichartige Regelscharen als Endglieder einer Kette von zwei, vier sechs, ... nach einander verbundenen Regelscharen angesehen werden können, gleichartige aber als Endglieder einer Kette von drei, fünf, ... derartiger Regelscharen betrachtet werden können. Es lässt sich eben jede Kette von $2n+1$ oder $2n$ solcher Regelscharen auf eine solche von drei oder vier Gliedern zurückführen. Greift man eine Regelschar des einen Gebüsches und eine ihr nicht direkt verbundene Regelschar des zweiten ihr verbundenen Gebüsches beliebig heraus, so kann jede Regelschar des ersten Gebüsches mit der ersten Regelschar durch ein Netz, mit der zweiten durch ein Gewinde verbunden werden; diese Bündel von Netzen und Gewinden treten in reziproke Beziehung und erzeugen, da die Regelscharen eines Gebüsches bereits die gesamte Γ^2 erschöpfen, diese vollständig. Wir gestehen, uns gewundert zu haben, dass der Verfasser diese fundamentale von Schur entwickelte Erzeugung des Komplexes zweiten Grades so weit zurückgeschoben hat. Vielleicht wäre es am Platze gewesen, diese fundamentale Eigenschaft an die Spitze seiner Darstellung zu stellen. Auch scheint uns, dass der Verfasser hier etwas nachdrücklicher auf die Arbeit von Schur hätte hinweisen können, wie überhaupt an einzelnen Stellen ein genaueres Eingehen auf die — an sich mit grosser Vollständigkeit angeführte — ausgedehnte Litteratur erwünscht gewesen wäre. Ein Regelschar-Gebüsch ist eine lineare Mannigfaltigkeit dritter Stufe, und reziprok auf das verbundene Gebüsch bezogen, indem jeder Regelschar des einen das verbundene Feld des anderen Gebüsches entspricht und auch Paare einfach unendlicher Reihen von der Art existieren, dass jede Regelschar des einen mit jeder Regelschar des anderen verbunden ist. Die Leitstrahlen sämtlicher einem Gebüsch angehöriger Regelscharen erhält man bereits, wenn man nur ein Feld des Gebüsches in Betracht zieht; diese Leitstrahlen bilden mithin einen Komplex und zwar, wie ebenfalls Schur erwiesen hat, einen konsingulären Komplex. Die Gradzahl (2) wird durch Abzählung erschlossen; dass der Komplex mit dem ersten konsingulär ist, kann mit Hilfe der in zwei Strahlbüschel zerfallenden Regelscharen des Feldes nachgewiesen werden.

Die Gewinde, welche die Leitscharen irgend zweier Regelscharen zweier verbundenen Gebüsche verbinden, bilden eine quadratische Mannig

faltigkeit vierter Stufe. Alle diese Mannigfaltigkeiten bilden ein Büschel, dessen Basis aus den ∞^3 auf die Strahlen des Komplexes Γ^2 sich stützenden Gebüschen besteht. Eine quadratische Kongruenz C^2 enthält fünf Paare verknüpfter Reihen von Regelscharen; hierauf lässt sich der Nachweis gründen, dass durch sie ein Büschel von Komplexen Γ^2 sich hindurchlegen lässt. Die Betrachtung aller in einer Γ^2 enthaltenen C^2 ergiebt, dass ihre Brennflächen die Singularitätenflächen berühren, und zwar eine jede in der Kurve aus den Punktquadrupeln, in denen die Regelflächen irgend einer der Reihen von C^2 Φ berühren; die vier zugehörigen Strahlen der Regelschar sind die in ihr enthaltenen singulären Strahlen von Γ^2, das heisst ihr, dem unendlich nahen konsingulären Komplex und der Regelschar gemeinsam. Hieran schliesst sich die Betrachtung der „konsingulären" Kongruenzen, welche durch ein Fundamentalgewinde aus einer Reihe F (Γ^2) konsingulärer Komplexe ausgeschnitten werden.

Man kann als Grundelement das Dupel, die Zusammenstellung zweier beliebiger Strahlen eines Komplexes Γ^2 wählen; von einem Dupel d_1 werden ∞^3 andere getragen, bilden mit ihm den vollen Durchschnitt einer Regelschar mit Γ^2; die Gesamtheit der Dupel, welche von diesen ∞^3 Dupeln getragen werden, bildet eine ∞^5-fache Mannigfaltigkeit, der auch die ∞^3-fache angehört, in der je zwei Glieder mit ∞^3 anderen durch zwei Regelflächen verbunden werden können. Die Gewindebüschel, deren Strahlennetze die Grunddupel eines solchen Systems $\mathfrak{S}_5$ zu Leitstrahlen haben, gehören einem der quadratischen Systeme S^2_4 vierter Stufe an, die durch Γ^2 hindurchgehen. Als Ort der Dupel, welche von einem Dupel getragen werden, kann man Γ^2 durch zwei korrelative Gebüsche von Gewinden erzeugen, die von zwei Dupeln derselben $\mathfrak{S}_5$ ausstrahlen. Hieran schliesst sich unmittelbar die von Schur gegebene Erzeugung einer C^2 durch ein Bündel von Regelflächen und ein reziprok bezogenes Netz von Strahlennetzen. Man kann Γ^2 auch definieren als den Ort der Strahlen, welche die Grunddupel eines Gewinde-Gebüsches S_4 mit den Gewinden eines korrelativen S_4 gemein haben. In zwei korrelativen Gewinderäumen S_5, S_5' giebt es ∞^3 Gewebe, die einen Grundstrahl besitzen, welcher zugleich dem entsprechenden Gewinde angehört; der Ort dieser Strahlen ist wiederum ein Γ^2. Auch in einer quadratischen Kongruenz C^2 und auf einer Regelfläche mit zwei Doppelgeraden giebt es Dupelsysteme. Sie können daher (659) als Basis eines Büschels von $S_3{}^2$ bez. $S_2{}^2$ angesehen werden. Der Satz, dass durch einen quadratischen Komplex ein Büschel quadratischer Systeme vierter Dimension von Gewinden hindurchgeht, ist bekanntlich deshalb von so bedeutender Wichtigkeit, weil er das geometrische Äquivalent für die Thatsache bildet, dass die Gleichung eines quadratischen Komplexes ∞ verschiedene Formen zulässt. Es wird deshalb in einer Reihe von Kapiteln die Betrachtungsweise des linearen Raumes fünfter Dimension auf $S_4{}^2$ angewendet. Die Aufstellung seines Polarsystems führt sofort zu den Sencupeln „konjugierter" Gewinde. Es zeigt sich, dass die sechs fundamentalen Gewinde von Γ^2 das für alle $S_4{}^2$ durch Γ^2 gemeinsame Sentupel konjugierter

Gewinde bilden. Die Strahlen, deren sämtliche Polargewinde Gebüsche sind, bilden einen Komplex zweiten Grades; dieser Nebenkomplex geht durch sämtliche singulären Strahlen des Komplexes hindurch.

Nach Untersuchung der linearen Mannigfaltigkeiten, die auf einer S_4^2 möglich sind, und genauerer Untersuchung der quadratischen Systeme S_3^2 und S_2^2 setzt der Verfasser eine Abbildung des Komplexes in den Punktraum auseinander. Diese beruht auf Abbildung der von einem Dupel getragenen Dupel mittels der vermittelnden Regelflächen. Diese Abbildung geht in eine eindeutige über, wenn man die beiden Ausgangsstrahlen aus einem Strahlbüschel des Komplexes entnimmt. Alsdann zerfällt jede Regelfläche in zwei — diesen und einen anderen ihn schneidenden — Strahlbüschel, und es kann jeder Strahl des Komplexes eindeutig auf das ihn enthaltende Strahlbüschel, das sein Zentrum in der Ebene des ersten Strahlbüschels hat, bezogen werden. Die Abbildung dieses speziellen Gebüsches von einschaligen Hyperboloiden ergiebt die eindeutige von Caporali entdeckte Abbildung, die genauer studiert wird.

Die Einteilung der Komplexe in acht Gattungen beruht auf der Untersuchung der Polarsentupel einer S_4^2 und lehnt sich an analytische Untersuchungen Reye's an. Genau wie die Oberfläche zweiter Ordnung unseres Raumes, zeigt S_4^2 zu allen Polarsentupeln das gleiche Verhalten, das durch eine der sechs Bezeichnungen

$$(A\,B\,C\,D\,E\,F);$$
$$(A\,B\,C\,D\,E,\,F);$$
$$(A\,B\,C\,D,\,E\,F);$$
$$(A\,B\,C,\,D\,E\,F)$$

gekennzeichnet werden kann. Je zwei durch das Komma getrennte Gewinde bestimmen Büschel, die zwei reelle Gewinde mit S_4^2 gemein haben, zwei nicht getrennte aber ein Büschel, welches kein Gewinde von S_4^2 enthält. Die vier Formen von S_4^2 sind die reell-imaginäre, die elliptische, welche keine reellen Netze und Büschel von Gewinden enthält, die elliptisch-hyperbolische, welche reelle Büschel, aber keine Netze von Gewinden enthält, endlich die hyperbolische Form, welche reelle Büschel und Netze von Gewinden enthält.

Der Komplex führte nun auf ein Büschel von S_4^2; das allen gemeinsames Polarsentupel besteht aus den sechs Fundamentalgewinden. Wie nun bei einer geradlinigen Fläche ein Polartetraeder entweder ganz reell oder ganz imaginär ist, bei einer nicht geradlinigen Fläche aber entweder vier Ecken reell oder zwei reell, zwei imaginär sind, so sind, wenn alle sechs Gewinde imaginär sind, sämtliche S_4^2 des Büschels hyperbolisch. Dies giebt die erste Gattung (hyperbolischer) quadratischer Komplexe. Sind zwei Fundamentalgewinde reell, so hat man zwei aus hyperbolischen und elliptisch-hyperbolischen S_4^2 bestehende Abteilungen des Büschels von S_4^2, die zweite Gattung (elliptisch-hyperbolischer) Komplexe. Sind vier Fundamentalgewinde reell, so enthält das Büschel entweder nur hyperbolische und

elliptisch-hyperbolische Individuen (dies giebt die dritte Gattung), oder es kommen auch elliptische S_4^2 vor, es entsteht so ein elliptischer Komplex (die vierte Gattung). Der letzte Fall, dass alle sechs Fundamentalgewinde reell sind, führt auf vier Gattungen von Komplexen, von denen zwei elliptisch, eine elliptisch-hyperbolisch, eine reell-imaginär sind (Z. 26 flg). Ein elliptischer, elliptisch-hyperbolischer, hyperbolischer Komplex enthält stets reelle Strahlen. Nachdem dieser Weg weiter verfolgt ist, nimmt der Verfasser Gelegenheit (Z. 236 flg.), die quadratischen Kongruenzen auf ähnliche Weise zu behandeln, wobei sich mancherlei Gelegenheit zu Ergänzungen des zweiten Bandes bietet. Es wird sodann die Mannigfaltigkeit der konsingulären Komplexe hinsichtlich der in ihnen vertretenen Gattungen durchmustert.

Nach einem Abschnitt über den Battaglinischen oder harmonischen Komplex, auf dessen Strahlen zwei Oberflächen zweiter Ordnung sich harmonisch trennende Punktgruppen ausschneiden und der das Tetraedroid zur singulären Fläche hat, geht der Verfasser auf die Komplexe mit Doppelstrahlen genauer ein. Ein Doppelstrahl ist zugleich eine Doppelgerade der Singularitätenfläche. Dieselbe artet in die Brennfläche einer Kongruenz C^2 mit möglichem Doppelstrahl aus, oder, was dasselbe ist, in die Komplexfläche einer zunächst allgemein gelegenen Geraden d hinsichtlich eines quadratischen Komplexes Γ_0^2. Die Tangentenbüschel in den einzelnen Punkten der Brennfläche senden auch nach der Geraden d homologe Strahlen, der zugehörige konsinguläre Komplex besteht aus dem doppelt gerechneten Gebüsch, in den auch zwei der fundamentalen Gewinde ausgeartet sind. Der Komplex kann durch die Bezeichnung [21 111] gekennzeichnet werden, welche ausdrückt, dass sich zwei Fundamentalgewinde vereinigt haben. Der Zweck der ganzen Entwickelung ist eben, die Weierstraßsche Theorie der Elementarteiler für diesen Spezialfall mit geometrischen Mitteln auszudeuten. Die Singularitätenflächen Φ der Komplexe mit nicht windschiefen Doppelgeraden können nun sämtlich als Komplexflächen einer Geraden d hinsichtlich eines allgemeinen Komplexes Γ_0^2 gewonnen werden. Gelangt z. B. d in Γ_0^2 hinein, so arten drei Fundamentalgewinde in das Gebüsch (d) aus und man erhält [3 111], wird d ein beliebiger singulärer Strahl des Komplexes, so entsteht [4 11]. Einem singulären Strahl zweiter Ordnung, der dreipunktig berührt, korrespondiert [5 1], wenn endlich der singuläre Strahl vierpunktig berührt, so erhält man [6], alsdann ist aber d, dessen Gebüsch sämtliche Fundamentalgewinde aufgezehrt hat, ternäre Doppelgerade. Wenn d eine gewöhnliche Tangente der singulären Fläche ist, so erhält die Komplexfläche zwei sich schneidende Doppelgeraden, d und den singulären Strahl d_1 des Punktes. Der Komplex trägt dann die Bezeichnung [2 2 11]. Wenn d_1 oder d dreipunktig berührt, so entsteht [3 2 1], wenn beide dreipunktig berühren [3 3]. Zerfällt nun die Komplexfläche in eine Fläche dritter Ordnung mit vier Knotenpunkten und ihre dreifach berührende Ebene oder in eine Fläche dritter Klasse mit vier Doppelebenen und den

Kreuzungspunkt ihrer Doppelgeraden, so gehört zu ihr als Singularitätenfläche ein Komplex mit drei in einer Ebene liegenden oder sich schneidenden Doppelgeraden. Diese beiden Fälle [2, 2, 2]′ und [2 2 2]″ treten ein, wenn die Gerade d in eine stationäre Ebene der Fläche von Γ_2^0 hineingelangt, bez. durch einen singulären Punkt derselben hindurchgeht; wenn d in diesem Strahlen-Feld oder -Bündel besondere Lagen annimmt, so entstehen Komplexe [4, 2]′ und [6]′ und ihnen dual [4, 2]″ und [6]″. [2, 2, 2′] besitzt folgende anschauliche Entstehung. Auf jeder Geraden der dreifach berührenden Ebene einer Fläche dritter Ordnung mit vier Knotenpunkten bestimme man den Punkt, der gegen ihre Einschnitte in die drei Geraden der Fläche unter einem bestimmten Doppelverhältnis liegt, und verbinde ihn mit dem Berührungspunkt der einzigen von ihm an die Fläche gehenden Tangentialebene, man erhält dann einen singulären Strahl des Komplexes. Die anschauliche Entstehung der Komplexe führt auf leichte Bestimmungen ihrer Mannigfaltigkeit und auf Abbildungen derselben in den Punktraum. Eine ähnlich anschauliche Herstellung der Komplexe mit windschiefen Doppelstrahlen existiert nicht; bereits bei der einfachsten Form mit zwei gewöhnlichen Doppelstrahlen berühren die singulären Geraden eine Regelfläche mit den Doppelstrahlen d, d'. Das Gewindebüschel d, d' besteht nur aus fundamentalen Gewinden; welcher Thatbestand durch die Bezeichnung [(11) 1111] des Komplexes angedeutet wird. Existiert eine Doppelerzeugende, so fallen zwei von den vier Doppeltangenten-Kongruenzen in sein Gebüsch hinein; ein zugehöriger Komplex ist demzufolge mit [(11) 2 11] zu bezeichnen. Die singulären Geraden des Komplexes [(11) 31] berühren die Komplexfläche einer Geraden d_1 hinsichtlich eines Komplexes mit zwei Doppelgeraden d und d', wobei d und d' von d_1 getroffen werden. Der erste Fall, in dem die singuläre Fläche in zwei Regelflächen zerfällt, und ein windschiefes Vierseit aus Doppelstrahlen besteht, ist mit [(11)(11) 11] zu bezeichnen. Aus dem wechselnden gegenseitigen Verhalten dieser beiden Flächen gegen einander resultierten zahlreiche Einzelfälle, die eine eingehende Untersuchung erfahren.

Da indessen der Umfang dieses Referates schon weit über die gewöhnlich inne gehaltenen Grenzen hinausgewachsen ist, müssen wir uns damit begnügen, auf diesen letzten Teil des Werkes nachdrücklichst hinzuweisen. In manchen Einzelheiten ergeben sich, wie die Tabelle in (855) zeigt, Abweichungen von Weilers Aufzählungen. Die letzten Nummern dieser Tabelle enthalten die Komplexe mit unendlich vielen Doppelstrahlen, die in einer Regelschar angeordnet liegen. Den Abschluss des ganzen Werkes bildet die Behandlung der Battaglinischen Komplexe mit Doppelstrahlen.

Beim Abschluss des Referates muss ich noch den auffälligen Umstand erklären, dass die Besprechung der beiden ersten Bände, die mir bereits vor mehreren Jahren übertragen wurde, erst jetzt erfolgt. Infolge dringender Abhaltungen war ich genötigt, die Besprechung immer wieder zu verschieben, bis ich mich entschloss, dieselbe bis zur Vollendung des ganzen Werkes zu vertagen.

Ernst Kötter.

Die Zahl und das Unendlichkleine. Von Dr. KARL GOEBEL in Soest. Leipzig 1896. Bei G. Fock. 47 Seiten in 8⁰.

Der Herr Verfasser verrät Kenntnis der Geschichte der Philosophie, ist jedoch als Mathematiker zu den Dilettanten zu rechnen. Die Leistungen Dührings in seinen „Neuen Grundmitteln und Erfindungen zur Analysis, Algebra etc.“ scheinen dem Verfasser „zu den interessantesten Spekulationen der neueren Mathematik“ zu gehören. Bei der Nennung der Irrationalzahlen bleiben die hier eigentlich in Betracht kommenden Fragen nach der Existenz und Definitionsweise dieser Zahlen dem Verfasser gänzlich unbekannt. Die bezügliche Auffassung des Verfassers beurteile man nach seiner Angabe, dass, wie die Brüche „die Zwischenräume oder Differenzen zwischen den ganzen Zahlen kleiner machen, so die Irrationalzahlen wiederum die Zwischenräume zwischen den Gliedern der Zahlenreihe verengen etc.“ Die durch $\sqrt{-1}$ angedeutete Operation schliesst einen Widerspruch ein, und hierin sieht der Verfasser einen Beweis für die Nichtexistenz der negativen Zahlen; denn „sonst könnte die aus dem Begriff der Zahl folgende Operation bei der Anwendung auf sie keinen Widerspruch ergeben.“ Dass der Versuch gemacht wird, den Begriff des Unendlichkleinen historisch zu verfolgen, ist an sich gut; nur hätte der Herr Verfasser seine Anschauungen in dieser Hinsicht vorab durch Studium eines zuverlässigen Buches über Differentialrechnung auf eine klare Basis stellen sollen. Der Lernende ist vor dem in Rede stehenden Buche nachdrücklichst zu warnen. Für den Kundigen ist diese Warnung überflüssig.

ROBERT FRICKE.

Primi elementi della teoria dei numeri. Per U. SCARPIS, professore nel R. liceo in Verona. Milano 1897. Bei U. Hoepli. VIII und 152 Seiten.

Das vorliegende Büchelchen reiht sich als neuestes Glied den zahlreichen von der Verlagshandlung U. Hoepli veranstalteten Elementarbüchern in Taschenformat an. Die Elemente der Theorie der Zahlen unter Ausschluss der Theorie der quadratischen Formen kommen diesmal zur Behandlung, und die Darstellung ist von Herrn U. Scarpis in übersichtlicher und ansprechender Weise geleistet worden. In den fünf Hauptkapiteln des Buches sind der Reihe nach die Eigenschaften der Teiler und Vielfachen einer Zahl, die Kongruenzen im allgemeinen, die vollständigen Restsysteme nach einem Modul, die binomischen Kongruenzen und die quadratischen Reste behandelt. Die Besprechung der Kreisteilungsgleichungen in Kapitel VI beschränkt sich fast ausschliesslich auf die Betrachtung der Beispiele $n = 5$ und $n = 17$, und entsprechend ist das siebente Kapitel, die Einteilung des Kreises in n gleiche Teile betreffend, seinem Umfang nach bemessen. Diese Beschränkung dürfte aber eher ein Vorzug als ein Nachteil des Buches sein.

Übrigens muss das Zitat, welches der Herr Verfasser auf Seite 114 seines Buches zufügt, und welches eine 1893 in den Annali di matematica erschienene Arbeit von Zignago betrifft, lebhaftes Bedauern erwecken. Herr Zignago glaubt a. a. O. einen elementaren Beweis des zuerst von Dirichlet bewiesenen Satzes zu geben, dass in jeder arithmetischen Reihe, in welcher Anfangsglied und Differenz relativ prim sind, unendlich viele Primzahlen enthalten sind. Die von Zignago angestellten Betrachtungen erwecken auch durchaus die Hoffnung, dass auf dem von ihm eingeschlagenen Wege der Beweis des fraglichen Theorems gelingen möchte. Indess ist auf der sechsten Seite der Zignagoschen Publikation der Übergang von der dritten und vierten Gleichung daselbst zur fünften und sechsten fehlerhaft, und alle hieraus weiter gezogenen Folgerungen sind hinfällig. Die Angabe von Herrn Scarpis, dass Herr Zignago „in einer höchst geistreichen und elementaren Weise das berühmte Theorem von Dirichlet bewiesen habe, welches der Kraft eines Gauss und Legendre widerstanden habe“, entspricht demnach leider augenblicklich den Thatsachen nicht; und es ist zu bedauern, dass Herrn Scarpis dieser Umstand entging. Einen Teil der Schuld trägt allerdings Herr Zignago selber, welcher, obschon er gleich nach Erscheinen seiner Arbeit in den Annali brieflich auf die Beweislücke aufmerksam gemacht wurde, eine Ausfüllung der Lücke oder Zurückziehung der Arbeit in der gleichen Zeitschrift unterlassen hat.

Robert Fricke.

Lehrbuch der Algebra. Von Heinrich Weber, Professor der Mathematik an der Universität Strassburg. In zwei Bänden. Zweiter Band. Braunschweig 1896. Vieweg. XIV und 794 Seiten.

In verhältnismässig sehr kurzer Zeit hat Herr Weber dem im vorletzten Bande dieser Zeitschrift S. 179 flg. besprochenen ersten Bande seines Lehrbuches der Algebra den zweiten Band folgen lassen. Das Werk wird damit zunächst vollständig; doch nimmt der Herr Verfasser eine Fortsetzung, welche namentlich die Anwendungen der Algebra im Gebiete der elliptischen Funktionen betreffen soll, für später in Aussicht.

Der zweite Band schliesst sich durchaus an den ersten an, und beide sind somit geeignet, den Lernenden von den Elementen an in die schwierigeren Teile der modernen Algebra einzuführen. Dabei dürfte die besondere Bedeutung des zweiten Bandes darin bestehen, dass es Herrn Weber mit glücklichem Erfolge gelungen ist, selbst solche Errungenschaften der Algebra, welche der neuesten Entwickelungsperiode derselben angehören, zu einem wohlgegliederten Ganzen zu vereinigen.

Es ist so vor allem erreicht, dass der in der modernen Mathematik eine so grosse Rolle spielende Gruppenbegriff nach seiner in der Algebra zur Geltung kommenden Seite eine umfassende Darstellung gewonnen hat. Dadurch ist Ersatz geschaffen für das seit 1870 nicht wieder aufgelegte

Buch von Camille Jordan; und es ist ganz selbstverständlich, dass eine aus Herrn Webers Feder fliessende Darstellung sowohl nach Seiten der abstrakten und allgemeinen Ideenbildung wie auch in den Anwendungen auf Arithmetik, Algebra und Geometrie den höchsten, eben jetzt erreichten Standpunkt der Entwickelung repräsentiert.

Gruppentheoretischen Untersuchungen sind drei unter den vier Büchern des zweiten Bandes gewidmet. Das vierte Buch führt den Titel „Algebraische Zahlen“ und wird gleichfalls ein besonderes Interesse erwecken. Herr Weber hat es nämlich in diesem Teile seines Werkes unternommen, eine arithmetische Behandlung der algebraischen Körper zu schaffen, welche den Theorien von Dedekind und Kronecker in gleicher Weise gerecht wird, indem sie den Zusammenhang zwischen diesen Theorien herstellt.

Um den Lesern der Zeitschrift ein etwas genaueres Bild vom Inhalt des vorliegenden Werkes zu geben, muss es genügen, die hauptsächlichen in den einzelnen Kapiteln behandelten Probleme zu bezeichnen.

Als die wichtigsten Abschnitte des ersten Buches mit dem Titel „Gruppen“ sind der zweite, dritte und vierte anzusehen. Der Begriff der kommutativen oder Abelschen Gruppe, das ist einer solchen Gruppe, deren sämtliche Elemente mit einander permutabel sind, ist hier nach seiner theoretischen Seite, wie sodann weiter in seinen Anwendungen auf die Kreisteilungstheorie verfolgt. Dieses Gebiet behandelte Herr Weber schon früher in wichtigen Abhandlungen, deren interessantestes Ergebnis der Beweis des von Kronecker aufgestellten Satzes war, dass alle dem rationalen Zahlenkörper angehörenden Abelschen Gleichungen Kreisteilungsgleichungen sind. Im ersten Buche kommt dieser Satz übrigens nur erst für die kubischen und biquadratischen Abelschen Gleichungen mit rationalen Koeffizienten zum Beweise. Der Grund für die Einfachheit dieser Fälle liegt in dem Umstande, dass sowohl bei den ganzen komplexen Zahlen aus dritten, wie bei denen aus vierten Einheitswurzeln für die Primfaktorenzerlegung dieselben einfachen Gesetze gelten, wie bei den rationalen ganzen Zahlen.

Die allgemeine Theorie der Abelschen Gruppen gründet sich auf den Begriff der „Basis“ einer einzelnen Gruppe. Eine solche Basis besteht aus gewissen ν Operationen $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ der Gruppe, in welchen jede Operation der Gruppe in der Gestalt $A_1^{\alpha_1} \cdot A_2^{\alpha_2} \ldots A_\nu^{\alpha_\nu}$ darstellbar ist. Dabei muss man, um die ganze Gruppe zu gewinnen, und jede Operation nur einmal, die ν Exponenten α_k volle Restsysteme nach gewissen ν Moduln a_k durchlaufen lassen.

Die genauere Untersuchung der verschiedenen für eine und dieselbe Gruppe möglichen Basen zeigt, dass die in den zugehörigen Moduln a_k vorkommenden höchsten Primzahlpotenzen bei Fortgang zu einer anderen Basis wieder auftreten, und dass sie demnach als „Invarianten“ der Gruppe bezeichnet werden können. Hierüber hinaus ist der Begriff des „Gruppencharakters“ grundlegend. Man hat darunter, wenn n der Grad (die Ordnung) der Gruppe ist, ein auf n Weisen wählbares System von n Einheits-

wurzeln zu verstehen, welche sich bei Multiplikation gerade so verhalten, wie die Operationen der Gruppe bei Kombination.

Auf der so gewonnenen Grundlage erwächst die Behandlung der Frage nach den Teilern (Untergruppen) einer Abelschen Gruppe. Eine spezielle Entwickelung ergiebt sich für die Teiler vom Grade 2, welche aus den sogenannten „zweiseitigen“ Elementen (Operationen der Periode 2) entspringen. Diese führen vermöge der Gruppencharaktere auf eine Einteilung aller Elemente der Gruppe in „Geschlechter“. Für die (Abelsche) Gruppe der Komposition der quadratischen Formen führt dieser allgemeine Ansatz auf die von Gauss eingeführten Geschlechter der quadratischen Formen zurück.

Auf Grund der Theorie der Abelschen Gruppen lässt sich nun diejenige der „Kreisteilungskörper“ bei weitem tiefer durchbilden als es in Band I möglich war. Der Begriff des Kreisteilungskörpers ist dabei so zu fassen, dass darunter irgend ein Körper endlichen Grades verstanden ist, dessen sämtliche Zahlen rationale Funktionen von Einheitswurzeln sind.

Es zeigt sich, dass bereits alle Kreisteilungskörper gewonnen werden, wenn man für die einzelnen Grade der Einheitswurzeln die zu den betreffenden „Kreisteilungsperioden“ (Gauss) gehörenden Körper aufstellt. Die Untersuchung gipfelt in der Aufstellung eines Algorithmus, um für eine gegebene Gruppe alle zugehörigen Kreisteilungskörper, und jeden nur einmal darzustellen. Die Spezialausführungen betreffen die kubischen und biquadratischen Kreisteilungskörper und hieran schliesst sich der schon oben erwähnte Beweis des Theorems über Abelsche Gleichungen dritten und vierten Grades mit rationalen Koeffizienten.

Der erste und letzte Abschnitt des ersten Buches ist allgemeinen gruppentheoretischen Betrachtungen gewidmet. Dort mussten überhaupt erst die Grunddefinitionen der Gruppentheorie in allgemeinster Gestalt gegeben werden (nachdem in Band I nur von Permutationsgruppen gehandelt wurde). Hier finden die Sylowschen und verwandte Sätze ihren Platz, und es wird über die neueren Untersuchungen von Hölder, Cole u. a. berichtet, welche als ein Hauptziel verfolgen, die gesamten einfachen und zumal nicht-metacyklischen Gruppen niederer Grade (Ordnungen) aufzufinden und zu charakterisieren.

Das zweite Buch ist den endlichen Gruppen linearer homogener Substitutionen von n Veränderlichen gewidmet. Und zwar behandelt unter den vier Abschnitten dieses Buches der erste die grundlegenden Sätze dieses Gegenstandes, soweit dieselben für die engeren Zwecke der Algebra von Wichtigkeit sind. Die drei folgenden Abschnitte sind besonderen hierher gehörenden Gruppengattungen gewidmet.

Im ersten Abschnitt sind zwei Gesichtspunkte als besonders wichtig zu bezeichnen. Als „Invariante“ einer Substitutionsgruppe von n Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ wird eine solche Form $F(x_1, \ldots, x_n)$ bezeichnet, welche unverändert bleibt, wenn man auf $x_1, \ldots, x_n$ irgend eine Substitution der Gruppe ausübt. Hier gilt dann das wichtige von Hilbert bewiesene Theorem,

dass sich die gesamten Invarianten einer Gruppe in einer endlichen Anzahl unter ihnen als ganze rationale Funktionen darstellen lassen. Es ist eine besondere Zierde des fraglichen Abschnitts, dass Herr Weber den Hilbertschen Beweis im einzelnen durchführt. Der zweite Hauptgesichtspunkt des Abschnitts besteht in der Besprechung einer von Klein herrührenden Erweiterung des algebraischen Grundproblems. Diese Erweiterung besteht in der Einführung der sogenannten „Formenprobleme“: Man soll aus den gegebenen Werten der Gruppeninvarianten die zugehörigen Wertsysteme der Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ berechnen. Hier ordnet sich die Auflösung der allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades als besonderer Fall ein. Die zugehörige Gruppe besteht aus den $n!$ Permutationen von $x_1, \ldots, x_n$, welche sich ja als Substitutionen der x_i auffassen lassen; die Invarianten sind die symmetrischen Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$. Insofern hier eine Gruppe in n Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ zu Grunde liegt, hat man es mit einem Formenproblem n^{ter} „Dimension“ zu thun. Die Auflösung einer „reinen“ Gleichung irgend eines Grades kommt entsprechend auf ein Formenproblem erster Dimension zurück; hier handelt es sich nämlich um eine „unäre“ aus einer Substitution $x' = \varepsilon x$ zu erzeugenden Gruppe. Die Aufgabe ist nun immer, den Auflösungsprozess einer Gleichung auf die Lösung eines oder mehrerer Formenprobleme von möglichst niedriger Dimension zurückzuführen. Bei den Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades reicht man mit Formenproblemen einer Dimension. Die Auflösung der Gleichung fünften Grades ist auf ein zweidimensionales Formenproblem reduzibel; und es ist neuestens durch Wiman gefunden, dass sich die Auflösung der Gleichung sechsten Grades auf ein Formenproblem dritter Dimension zurückführen lässt. Doch konnte Herr Weber diese letztere Entdeckung wegen des vorgerückten Druckes nicht mehr aufnehmen.

Der siebente Abschnitt hat als Hauptziel die Aufzählung aller endlichen Gruppen binärer Substitutionen, was auf die cyklischen Gruppen, die Diedergruppen und die Gruppen des Tetraeders, Oktaeders und Ikosaeders führt. Das Prinzip der Aufzählung dieser Gruppen besteht bei allen bekannten Ableitungen in der Lösung einer gewissen diophantischen Gleichung. Doch kann man zu dieser diophantischen Gleichung auf mehreren Wegen gelangen, welche teils geometrische, teils funktionentheoretische, teils algebraische Argumente benutzen. Dem Charakter des ganzen Werkes entsprechend leitet Herr Weber die fragliche diophantische Gleichung aus algebraischen Überlegungen ab.

Nun folgt in einem besonderen Abschnitt eine ausführlichere Theorie der endlichen Gruppen binärer Substitutionen. Das Ziel ist, die Gruppen in möglichst einfacher Gestalt wirklich herzustellen und die zugehörigen vollen Systeme der Invarianten (die Grundformen) kennen zu lernen.

Der neunte Abschnitt ist Untersuchungen über diejenigen einfachen Gruppen des Grades $\frac{1}{2}p(p^2-1)$ gewidmet, welche in der Transformation p^{ter} Ordnung der elliptischen Funktionen auftreten. Hierbei ist p als

Primzahl gedacht; und man kann die einzelne Gruppe als Gruppe aller inkongruenten Substitutionen:

$$x' \equiv \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \pmod p$$

deuten. Eine systematische Aufzählung aller in diesen Gruppen enthaltenen Teiler (welche Gierster zuerst ausführte) strebt der Herr Verfasser nicht an. Eine kurze Spezialausführung ist nur der bei $p = 7$ eintretenden Gruppe des Grades 168 gewidmet. Die nähere Besprechung der mit dieser Gruppe zusammenhängenden ternären Entwickelungen wird später gegeben.

Das dritte Buch enthält in sechs Abschnitten „Anwendungen der Gruppentheorie.“ Der erste, für sich stehende, Abschnitt giebt einen durch die zwischendurch gewonnenen gruppentheoretischen Ergebnisse basierten Ausbau der schon in Band I behandelten Theorie der metacyklischen Gleichungen.

Darüber hinaus sind es zwei grosse Untersuchungsrichtungen, welche hier zur Sprache kommen.

Einmal entstammt der analytischen Geometrie eine Reihe interessanter algebraischer Probleme, von denen Herr Weber zwei mit grosser Ausführlichkeit behandelt: das Problem der Bestimmung der neun Wendepunkte einer ebenen Kurve dritter Ordnung und dasjenige der Bestimmung der 28 Doppeltangenten einer ebenen Kurve vierter Ordnung. Die Darstellung behandelt auch die geometrische und invariantentheoretische Seite der Probleme elementar und ausführlich, sodass auch nach dieser Seite hin keine speziellen Vorkenntnisse erforderlich sind.

Fürs zweite finden hier die algebraischen Schöpfungen Kleins über die Zurückführung der Lösung einer Gleichung auf die Lösung von Formenproblemen ausführliche Berücksichtigung. Die Behandlung der Gleichung fünften Grades wird auf das binäre Ikosaederproblem reduziert. Diese Behandlung hängt direkt mit der Frage nach der Transformierbarkeit der allgemeinen Gleichung fünften Grades auf eine Gleichungsform mit nur einem Parameter zusammen; nach einem von Kronecker ausgesprochenen und von Klein bewiesenen Satze ist diese Transformation bei alleinigem Gebrauch von natürlichen Irrationalitäten (im Gebiete rationaler Resolventen) nicht ausführbar, sondern nur erst nach Adjunktion einer gewissen accessorischen Irrationalität. Die beiden letzten Abschnitte des dritten Buches sind der schon im vorigen Buche studierten Gruppe des Grades 168 gewidmet. Dieselbe wird hier in ihrer Gestalt als Gruppe von 168 ternären Kollineationen untersucht, und es werden diejenigen Gleichungen siebenten Grades diskutiert, welche entweder direkt oder nach Auflösung einer gewissen biquadratischen Gleichung auf das Formenproblem jener ternären Gruppe reduzibel sind.

Das vierte Buch, welches die voraufgehenden erheblich an Umfang übertrifft, behandelt die moderne Theorie der algebraischen Zahlen, wie schon oben kurz angedeutet ist. Es ist das besonders Wertvolle dieses Buches, dass der Herr Verfasser hier eine möglichst allseitige Darstellung

von den Fundamenten der fraglichen Theorie entwirft. Die Idealtheorie ist durch ihren Begründer, R. Dedekind, selbst in einer Darstellung behandelt, welche zumal in der neuesten Auflage durch Schärfe und Formvollendung die gerechte Bewunderung aller wirklichen Leser erwirbt. Daneben aber steht Kronecker, welcher von Beginn seiner mathematischen Forschungen an der Durchbildung einer eigenartigen Theorie der algebraischen Zahlen gearbeitet hat, die zwar künstlicher als die Idealtheorie fundiert, aber für viele fasslicher ist. Hierüber hinaus kommen in neuester Zeit die Entwickelungen von Minkowski hinzu, welche bei zahlreichen fundamentalen Fragen, so der Bestimmung der Klassenanzahlen, der Theorie der Einheiten, den Sätzen über den Zahlwert der Diskriminanten, ihren ausserordentlichen Wert gezeigt haben. Man muss Herrn Weber Dank wissen, dass er in alle diese verschiedenen Richtungen Einblick gewährt, ohne dass die Einheitlichkeit seiner Darstellung irgend darunter litte.

In der Fundierung der Theorie folgt der Herr Verfasser den Anschauungen Kroneckers. Der Begriff der zu einem algebraischen Körper gehörenden „Funktionale“ (die Benennung ist nach einem Vorschlage von Herrn Dedekind gewählt) steht im Mittelpunkt. Ein solches Funktional stellt eine rationale Funktion beliebig vieler unbestimmter Grössen $x, y, z \dots$ vor mit Koeffizienten, die im zu Grunde liegenden Körper enthalten sind. Ist letzterer der rationale Körper, so spricht man von einem „rationalen“ Funktional. Ein solches kann als Produkt eines positiven rationalen Bruches und eines Quotienten zweier ganzen ganzzahligen „primitiven“ Funktionen der $x, y, \dots$ dargestellt werden. Jener vortretende rationale Bruch heisst der absolute Betrag des Funktionals, und, ist derselbe ganzzahlig, so nennt man auch das Funktional „ganz“. Die Übertragung dieser Benennungen auf die Funktionale eines beliebigen Körpers vollzieht sich auf Grund des Umstandes, dass jedes Funktional Wurzel einer Gleichung:

$$t^m + A_1 t^{m-1} + A_2 t^{m-2} + \cdots + A_m = 0$$

ist, deren Koeffizienten rationale Funktionale sind. Jenes Funktional heisst alsdann „ganz“, wenn die rationalen Funktionale $A_1, \dots, A_m$ sämtlich ganz sind. Die Zahlen des zu Grunde liegenden Körpers gelten als Funktionale, bei denen die Unbestimmten $x, y, \dots$ nur im nullten Grade vorkommen.

Auf dieser Grundlage erheben sich nun diejenigen Entwickelungen, welche von der Anwendung der vier Grundrechnungsarten auf Funktionale herrühren. Es ergeben sich die „Einheiten“ unter den Funktionalen, die assoziierten Funktionale, die Primfunktionale, der Satz von der eindeutigen Zerlegbarkeit in Primfunktionale, falls assoziierte Funktionale als nicht verschieden gelten, etc. Möge unter den zahlreichen hier entspringenden Sätzen noch der eine genannt sein, dass jedes ganze Funktional assoziiert ist mit einem Funktional der Gestalt $(\alpha x + \beta y)$, wo α und β ganze Zahlen sind.

Bei der Weiterentwickelung tritt nun die Idealtheorie mehr in den Vordergrund. Es wird bewiesen, dass alle durch ein vorgelegtes ganzes

Funktional teilbaren ganzen Zahlen des zu Grunde liegenden Körpers ein Ideal im Sinne von Dedekind bilden, und dass solcherweise einem System assoziierter ganzer Funktionale ein Ideale eindeutig umkehrbar entspricht. Nach einer eben gemachten Angabe reicht man zur Gewinnung aller Ideale mit Funktionalen der Gestalt $(\alpha x + \beta y)$. Nimmt man eine einzelne ganze Zahl als Funktional, so gelangt man zu einem Hauptideale. Während also Dedekind die idealen Teiler Kummers durch reale Gebilde dadurch ersetzt, dass er allgemein eine reale oder ideale Zahl durch das Gesamtsystem der durch sie teilbaren realen Zahlen ersetzt, treten bei Kronecker die idealen Teiler direkt in realer Gestalt, nämlich als Funktionale, in die Erscheinung. Es handelt sich also bei Kronecker um eine sachgemässe Erweiterung des Körpers derart, dass im erweiterten Gebiete wieder die elementaren Gesetze der Teilbarkeit gelten.

Es folgen nunmehr zahlreiche Entwickelungen, die aus den Elementen der Dedekindschen Theorie bekannt sind, über Basen und Diskriminanten, über volle Restsysteme und Kongruenzen nach festen Moduln, über die Äquivalenz der Ideale, die Endlichkeit der Anzahl der Idealklassen etc.

Der folgende Abschnitt gewährt einen sehr interessanten Einblick in die Minkowskischen Methoden zur Bestimmung der Minima positiver quadratischer Formen von n Variabeln. Von den wichtigen Anwendungen, welche Minkowski von dieser Bestimmung gemacht hat, wird insoweit gehandelt, dass die Endlichkeit der Anzahl der Idealklassen von hieraus in neuer Weise dargelegt wird, sowie dass der schon früher vermutete, aber erst von Minkowski bewiesene Satz: „Es giebt ausser dem rationalen Körper keinen Körper von der Grundzahl ± 1“ gewonnen wird. Hieran sind Sätze über die Zerlegung der natürlichen Primzahlen in algebraischen Körpern, sowie über die Diskriminanten geschlossen.

In einem besonderen Abschnitt sind neuere Entwickelungen von Dedekind und Hilbert behandelt, in denen bereits von einem Körper höheren Grades ausgegangen wird und dadurch ein noch umfassenderer Körper definiert wird, dass eine Gleichung mit Koeffizienten jenes ersteren Körpers zu Grunde gelegt wird.

Die Anwendungen behandeln die beiden klassischen Beispiele der quadratischen Körper und der Kreisteilungskörper, wobei namentlich die letzteren ausführliche Berücksichtigung finden. Es ist dies um so erfreulicher, als Dedekind in der „allgemeinen Zahlentheorie“ den Kreisteilungskörpern nur wenig Raum widmen konnte. Hier hat nun Herr Weber auch alle Mittel beisammen, um seinen Beweis des Satzes, dass alle rationalen Abelschen Gleichungen Kreisteilungsgleichungen sind, zu entwickeln. Zwei besondere Abschnitte sind den Dirichletschen Methoden zur Bestimmung der Anzahl der Idealklassen in einem gegebenen Körper gewidmet. Der erste unter diesen Abschnitten ist allgemeinen Ansätzen gewidmet, und es musste zu diesem Ende eine Darstellung der bewunderungswürdigen Dirichletschen Einheitentheorie vorausgesandt werden. Diese Entwickelungen gelten für beliebige algebraische Körper, während

im folgenden Abschnitte die spezielle Durchführung für Kreisteilungskörper gegeben wird.

Der letzte Abschnitt, welcher für sich steht, hat das Ziel zu zeigen, dass über die algebraischen Zahlen hinaus noch sogenannte transcendente Zahlen existieren. Dieser Existenzbeweis wird zunächst auf Grund des Begriffs der abzählbaren Menge geliefert. Die Gesamtheit der algebraischen Zahlen ist abzählbar, ein Zahlenkontinuum jedoch auf keine Weise, sodass letzteres jedenfalls unendlich viele nicht-algebraische Zahlen enthält. Es folgt ein Referat über die Transcendenz von e und π, ein Gegenstand, der namentlich durch Hermites, Lindemanns und Hilberts glänzende Leistungen längst die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich gezogen hat.

Einige Ergänzungen zu Band I beschliessen das Werk.

Möchte es dem Herrn Verfasser gelingen, die geplante Fortsetzung seiner Untersuchungen zu einem ebenso glücklichen Abschluss zu bringen; und möchte dabei Kroneckers Vermutung, dass alle Abelschen Gleichungen quadratischer Zahlenkörper „Gleichungen der komplexen Multiplikation“ sind, zu einer wirklichen Erkenntnis werden.

Robert Fricke.

Vorlesungen über Algebra. Von Dr. Eugen Netto, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität zu Giessen. In zwei Bänden. Erster Band. Leipzig, B. G. Teubner, 1896. X und 388 Seiten.

Ungefähr zu gleicher Zeit mit dem zweiten Bande des Weberschen Lehrbuchs der Algebra hat Herr Netto einen ersten Band seines gleichfalls gross angelegten Algebrawerkes erscheinen lassen. Der Herr Verfasser hat in einer Voranzeige seines Werkes auf Herrn Webers Buch Bezug genommen; und man kann ihm nur durchaus zustimmen, dass beide Werke sehr wohl neben einander bestehen können, indem sie sich in verschiedener Hinsicht sehr glücklich ergänzen. Es entspricht dies den verschiedenartigen Tendenzen der beiden Herren Verfasser, die sich beide seit langer Zeit als Algebraforscher eines ausgezeichneten Namens erfreuen.

Der Unterschied beider Werke zeigt sich vornehmlich in der Stellung, welche sie zu den Nachbargebieten einnehmen. Es ist in dieser Hinsicht nicht von besonderem Belang, welche Vorkenntnisse von dem Leser verlangt werden. Herr Netto fordert vom Leser die Beherrschung der Grundlagen der Determinantentheorie und der elementaren Algebra, während Herr Weber möglichst alle zur Verwendung kommenden Begriffe ab ovo entwickelt. Weit wichtiger ist die Frage der Stellungnahme gegenüber dem Gruppenbegriff, den geometrischen Methoden und Anwendungen und der modernen Zahlentheorie. Die Stellung des Weberschen Werkes ist aus der vorangehenden Besprechung in dieser Hinsicht deutlich. In Anbetracht der Gruppentheorie und Geometrie ist Herr Netto der Kroneckerschen Tradition getreu. Ob der Ausschluss des Gruppenbegriffs nicht für die Be-

handlung der Galoisschen Theorie eine Erschwerung der Darstellung bedeutet, muss erst der zweite Band zeigen. Im übrigen hat Herrn Nettos Standpunkt, wie jeder konsequent durchgeführte und widerspruchsfreie Standpunkt, seine Berechtigung und sein Gutes. In arithmetischer Hinsicht ist ja selbstverständlich, dass alle diejenigen arithmetischen Momente, welche den Fundamenten der Algebra als solchen anhaften, nicht eliminiert werden können, vielmehr (wieder in Übereinstimmung mit Kronecker) besonders bevorzugt werden. Dagegen schliesst Herr Netto jedes Eingehen auf die Arithmetik im engeren Sinne, d. i. auf die Zahlentheorie aus; und wo eine Anleihe von den Elementen der Zahlentheorie nötig wird, wie z. B. bei den Kreisteilungsgleichungen, da werden die betreffenden Begriffe schnell nebenher entwickelt oder als bekannt angesehen. Während demnach Herrn Webers Buch namentlich in seinen letzten Teilen die weitestgehenden zahlentheoretischen Interessen befriedigte, beschränkt sich Herr Netto allein auf die Vertiefung des rein Algebraischen.

Was die Form der Darstellung der beiden in Rede stehenden Werke angeht, so fühlt man sich versucht, die Titel derselben mit einander auszutauschen. Herrn Webers Darstellung hat mehr den Charakter von Vorlesungen; ein und derselbe Gegenstand wird gelegentlich mehrfach und an entlegenen Stellen von verschiedenen Seiten beleuchtet (als Beispiel diene die Theorie der Gleichungen fünften Grades). Demgegenüber hat Herrn Nettos Art der Darstellung weit mehr den Charakter eines Lehrbuches. Enger gefasste Disposition und erschöpfende Behandlung der einzelnen zur Sprache kommenden Probleme sogleich an Ort und Stellen sind hier die Regel; dabei kommt auch die formale analytische Seite der einzelnen Gegenstände mit solcher ausführlichen Genauigkeit zur Geltung, wie es mehr in Lehrbüchern als in Vorlesungen geeignet erscheint.

Im ersten Bande giebt Herr Netto kein abgeschlossenes Ganze. Der Schluss des Bandes durchschneidet den Abschnitt über die algebraische Auflösung der Gleichungen, ein Gegenstand, der in der Hauptsache erst durch den zweiten Band zur Erledigung gebracht werden soll. Gerade dieser Teil des zweiten Bandes verspricht besonders interessant zu werden und dem ganzen Werke die Signatur aufzudrücken. Im ersten Bande kommen nur erst die algebraische Auflösung der Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades, sowie die Theorie der Kreisteilungsgleichungen zur Behandlung. Der letzteren Theorie sind drei Vorlesungen gewidmet. Die Gliederung ist so gewählt, dass in der ersten unter diesen Vorlesungen eine elementare Theorie der Einheitswurzeln gegeben wird, dass die zweite im wesentlichen Gauss' Theorie der Kreisteilungsgleichungen liefert, während die dritte Jacobis Anwendung Lagrangescher Methoden auf diejenigen Gleichungen darstellt, durch welche Perioden geringerer Gliederanzahl an solche höherer Gliederzahl gebunden sind.

Vom voraufgehenden Teile des vorliegenden Werkes steht die erste Vorlesung für sich. Der Mehrzahl der Leser dürften übrigens Definition und Rechnungsregeln der komplexen Zahlen ohne weiteres geläufig sein.

Anderseits sind die Entwickelungen über die aus zwei bez. drei Fundamentaleinheiten zusammengesetzten Zahlen an sich ja allerdings sehr interessant, kommen aber weiterhin kaum in Betracht.

Unter den folgenden Vorlesungen (2 bis 25) steht nur die fünfte für sich. Sie trägt einen durchaus arithmetischen Charakter und handelt von der Reduzibilität und Irreduzibilität ganzer rationaler Funktionen im natürlichen Rationalitätsbereich. Auf Grund des bekannten Gaussschen Satzes über Zerlegung ganzer ganzzahliger Funktionen hat man sich auf die Aufsuchung von Faktoren zu beschränken, die wiederum ganz und ganzzahlig sind.

Für die Aufsuchung solcher Faktoren wird die Methode von Kronecker entwickelt, welche letzterer in seinen „Grundzügen einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen" giebt. Weiter finden in dieser Vorlesung spezielle Theoreme von Eisenstein und Königsberger über irreduzible Funktionen ausführliche Berücksichtigung. Von diesen Theoremen wird später bei den Kreisteilungsgleichungen Gebrauch gemacht.

Die noch übrigen unter den 25 ersten Vorlesungen sind algebraischen Entwickelungen gewidmet. Dieselben gruppieren sich um folgende Hauptgesichtspunkte: Fundamentaltheorem nebst Anwendungen auf Zerlegung und Interpolation (Vorl. 2 bis 4), Kettenbruch- und Reihenentwickelungen rationaler Funktionen (Vorl. 6 bis 8), Theorie der symmetrischen Funktionen (Vorl. 9 bis 11), Beziehungen zur Invariantentheorie (Vorl. 12 bis 15), Theoreme über Anzahl der Wurzeln einer Gleichung innerhalb beschränkter Intervalle (Vorl. 16 bis 21), Methoden zur näherungsweisen Berechnung der Wurzeln (Vorl. 22 bis 25).

Alle diese Gegenstände werden in durchsichtiger Disposition und mit grosser Genauigkeit im einzelnen behandelt. Folgende kurze Andeutungen mögen zur näheren Orientierung ausreichen.

Beim Fundamentaltheorem über die Wurzelexistenz kommen neben Gauss erstem Beweise namentlich die bezüglichen Entwickelungen Cauchys zur Geltung, und zwar sowohl diejenigen von 1821, welche den Beweis der Existenz einer Wurzel zum Ziele haben, sowie auch die späteren Methoden Cauchys zur Bestimmung der Anzahl der Wurzeln in einem vorgeschriebenen Bereiche der Ebene der komplexen Variabeln. An die Linearfaktorenzerlegung der ganzen Funktionen schliesst sich die Ableitung der Lagrangeschen Interpolationsformel, welche ihrerseits die Quelle für die Eulerschen Identitäten und die Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen wird. Auch die Übertragung der durch die Lagrangesche Interpolationsformel für ganze Funktionen geleistete Aufgabe auf rationale Funktionen, wie sie durch Cauchy gelöst und späterhin durch Jacobi eingehend studiert wurde, kommt hier zur Behandlung.

Der Euklidsche Algorithmus zur Bestimmung des grössten gemeinsamen Teilers zweier ganzen Funktionen nebst den wichtigen hieraus entspringenden Anwendungen auf Bestimmung mehrfacher Wurzeln etc. kommt demnächst zur Darstellung. In den beiden folgenden Vorlesungen wird das

Problem des grössten gemeinsamen Faktors zweier Funktionen f_1 und f der Grade n_1 und $n\,(> n_1)$ sehr weit in die rechnerischen Einzelheiten verfolgt. Das Problem, zwei ganze Funktionen $\Psi(z)$ und $\Phi(z)$ zu finden, welche mit $f_1(z)$ und $f(z)$ die Gleichung

$$f_1 \cdot \Psi - f \cdot \Phi = F$$

so erfüllen, dass die Summe der Grade von Ψ und F kleiner als n ist, wird bereits durch den Algorithmus von Euklid gelöst. Hier handelt es sich darum, das Bildungsgesetz der Funktionen Ψ und Φ eingehender in Erfahrung zu bringen. Zu diesem Ende wird die Entwickelung von $\frac{f_1(z)}{f(z)}$ nach absteigenden Potenzen von z benutzt, welche, ins Unendliche fortgesetzt, eine sogenannte rekurrierende Reihe vorstellt; es besteht nämlich für die Entwickelungskoeffizienten eine $(n+1)$-gliedrige Rekursionsformel. Diese Reihe ist immer dann konvergent, wenn $|z|$ den absoluten Wert der grössten Wurzel der Gleichung:

$$f(z) = 0$$

übertrifft.

Bei Behandlung der symmetrischen Funktionen dürfte bemerkenswert sein, dass der Satz von der Darstellung aller ganzen symmetrischen Funktionen in den n elementaren nicht nur auf dem von Gauss herrührenden Wege bewiesen wird, sondern dass auch der von Cauchy gelieferte Beweis, an welchen Kronecker weitere Folgerungen knüpfte, besprochen wird. Im Anschluss an die Theorie der symmetrischen Funktionen wird nun gleich die Bildung rationaler Resolventen besprochen, sowie der allgemeine Ansatz der Tschirnhausen-Transformation, wobei im speziellen die Transformation der allgemeinen Gleichung fünften Grades auf eine Gleichung mit zwei Parametern geleistet wird. In einer besonderen Vorlesung wird von den wertvollen Folgerungen gesprochen, welche man bei der praktischen Verwendung der symmetrischen Funktionen aus dem Umstande ziehen kann, dass dieselben partiellen Differentialgleichungen genügen.

Die Resultante zweier Gleichungen $f = 0$ und $g = 0$ der Gerade n und $m \geqq n$ wird zunächst in der gewöhnlichen Form einer Determinante $(m+n)^{\text{ten}}$ Grades gegeben; und die Untersuchung wird so weit fortgesetzt, dass die Bedingung für die Existenz eines gemeinsamen Teilers ϱ^{ten} Grades von f und g angegeben wird. Die gleiche Untersuchung wird alsdann für den Fall ausgeführt, dass die Resultante in der von Bézout angegebenen Gestalt als Determinante m^{ten} Grades angesetzt wird. Eingehendere Entwickelungen über die Bildungsgesetze der Resultante nebst einer Anwendung auf das Fundamentaltheorem der Algebra füllen eine besondere Vorlesung. Eine weitere Vorlesung über Diskriminanten, sowie eine solche über quadratische Formen, wobei Sylvesters Trägheitsgesetz in den Mittelpunkt der Betrachtung rückt, schliessen den mit der Invariantentheorie verwandten Abschnitt des Buches.

In einer Reihe von Vorlesungen werden demnächst die zahlreichen Theoreme behandelt, welche die Abschätzung der Anzahl der Wurzeln

innerhalb begrenzter Intervalle zum Gegenstande haben. Alle diese Theoreme, welche einen klassischen Schatz der Gleichungstheorie vorstellen, finden ihren Höhepunkt in der Theorie der Sturmschen Funktionenketten. Auch Hermites Behandlung der gleichen Gegenstände auf Grund der Theorie der quadratischen Formen wird von Herrn Netto ausführlich dargestellt.

Vier Vorlesungen, welche von der näherungsweisen Berechnung der Wurzeln einer Gleichung handeln, schliessen sich würdig den voraufgehenden an. Die Newtonsche Näherungsmethode steht hier natürlich voran; doch wird auch hier der Gegenstand bis in seine neuesten Fortsetzungen verfolgt. Die mehrfache Wiederholung einer und derselben Operation (zum Zwecke der Annäherung an eine Wurzel) führt zum Begriff der Iteration, dem eine besondere Vorlesung gewidmet wird. Spezielle Berücksichtigung findet die Iteration einer linearen Funktion. Zweierlei Untersuchungen von Lagrange kommen hier noch zur Darstellung. Die erste betrifft die Gleichung der Quadrate der Wurzeldifferenzen einer gegebenen Gleichung; Ziel dieser Entwickelungen ist, die komplexen Wurzeln einer Gleichung durch Aufsuchung der reellen Wurzeln einer anderen Gleichung zu gewinnen. Die zweite Untersuchung bezweckt eine Annäherungsrechnung für reelle Wurzeln einer Gleichung durch gewisse Kettenbruchentwickelungen. Doch steht diese Methode der Newtonschen nach.

Es folgen nun die Vorlesungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen, über welche oben schon berichtet wurde, und welche ihre Fortsetzung im zweiten Bande finden sollen.

Als weiteren Hauptgegenstand des zweiten Bandes nimmt Herr Netto die Eliminationstheorie in Aussicht.

Robert Fricke.

Bibliographie

vom 25. November 1897 bis 13. Januar 1898.

Periodische Schriften.

Veröffentlichungen des königlichen astronomischen Recheninstituts zu Berlin. Nr. 6. BAUSCHINGER, J., Genäherte Opposition-Ephemeriden von 45 kleinen Planeten für 1898, Januar bis August. Berlin, Dümmler. M. 1. 20.

Abhandlungen der kaiserlich Leopoldinisch-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher. 71. Bd. Nr. 4. SATKE, LADISLAUS, Über den Zusammenhang der Temperatur aufeinander folgender Monate und Jahreszeiten. Leipzig, Engelmann. M. 4.

—— 72. Bd. Nr. 1. HAUSSNER, ROB., Tafeln für das Goldbachsche Gesetz. Ebenda. M. 15.

Sitzungsberichte, Münchner. Mathematische Klasse. 1897. 2. Heft. München, Franz. M. 1. 20.

Sitzungsberichte, Wiener. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. 1. Abt. 106. Bd. 4.—7. Heft. Wien, Gerolds Sohn. M. 5. 40.

Annalen der Physik und Chemie. Herausgegeben von G. und E. WIEDEMANN. Neue Folge. 63. Bd. 1897. (Festschrift für GUST. WIEDEMANN zum 50jährigen Doktorjubiläum). Leipzig, Barth. M. 5.

Publikationen der Sternwarte des eidgenössischen Polytechnikums zu Zürich. Herausgegeben von A. WOLFER. 1. Bd. Beobachtungen der Sonnenoberfläche in den Jahren 1887—1889. Zürich, Schulthess. M. 12.

Veröffentlichungen der königlichen Sternwarte zu Bonn. Herausgegeben von FRIEDR. KÜSTNER. Nr. 2. Untersuchungen über die Eigenbewegung von 335 Sternen. Bonn, Cohen. M. 7.

Zeitschrift für Luftschiffahrt und Physik der Atmosphäre. Inhalts-Verzeichnis der Jahrgänge XI—XV (1892—1896). Berlin, Mayer & Müller. M. —. 60.

Denkschriften der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. 64. Bd. Wien, Gerolds Sohn. geb. M. 70.

Sachregister der Abhandlungen und Berichte der mathematisch-physikalischen Klasse der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1846—1895. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2.50.

Kalender, astronomischer, für 1898. Berechnet für den Meridian und die Polhöhe von Wien ($16^0 20' 22''\cdot 3 = 1^h 5^m 21^s\cdot 49$ östlicher Länge von Greenwich, $48^0 13' 55''\cdot 4$ nördlicher Breite). Herausgegeben von der kaiserl. königl. Sternwarte. Wien, Gerolds Sohn. kart. 2.40.

Geschichte der Mathematik und Physik.

POGGENDORFFS Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. 3. Bd. 12. und 13. Lieferung. Leipzig, Barth. à M. 3.

Reine Mathematik.

MAHLER, G., Ebene Geometrie (Sammlung Göschen). 2. Auflage. Leipzig, Göschen. M. —. 80.

SIMON, MAX, Analytische Geometrie der Ebene (Sammlung Göschen). Leipzig, Göschen. M. —. 80.

FRICKE, ROB., Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung. Dritter (Schluss-) Teil. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 1.

KLEYER, A., Aufgabensammlung. 1375.—1386. Heft. Stuttgart, Maier. à M. —. 25.

ROTHE, RUD., Untersuchungen über die Theorie der isothermen Flächen. Dissertation. Berlin, Mayer & Müller. M. 2.

Angewandte Mathematik.

LAUENSTEIN, R., Die Festigkeitslehre. Elementares Lehrbuch für den Schul- und Selbstunterricht. 4. Auflage. Stuttgart, Bergsträsser. M. 3. 50.

—— Die graphische Statik. 4. Auflage. Ebenda. M. 5.

GROSSE, W., Unterhaltende Probleme und Spiele in mathematischer Beleuchtung. Leipzig, Quandt & Händel. M. 5. 20.

KLEIN, HERM. J., Astronomische Abende. Leipzig, E. H. Mayer. M. 5. 50.

WEISSBACH, JUL., Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. Dritter Teil. Die Mechanik der Zwischen- und Arbeitsmaschinen. 2. Auflage. Bearbeitet von GUSTAV HERRMANN. Dritte Abteilung. Die Maschinen zur Formänderung. 14.—16. Lieferung. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 9.

BRENNER, LEO, Spaziergänge durch das Himmelszelt. Leipzig, Mayer. M. 5. 50.

Handwörterbuch der Astronomie. 10. und 11. Lieferung. Breslau, Trewendt. à M. 3. 60.

Leuschner, Armin Otto, Beiträge zur Kometenbahnbestimmung. Dissertation. Berlin, Mayer & Müller. M. 2. 40.

Physik und Meteorologie.

Graham, Will. P., Über den Verlauf des Potentialgradienten in Geisslerschen Röhren. Dissertation. Berlin, Mayer & Müller. M. 1.60.

Lommel, E. v., Lehrbuch der Experimentalphysik. Leipzig, Barth. geb. M. 7. 20.

Glazebrook, R. T., Das Licht. Grundriss der Optik für Studierende und Schüler. Deutsch von E. Zermelo. Berlin, Calvary & Co. geb. M. 3. 60.

Korn, Arth., Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik. 2. Auflage. Zweiter Teil. Zweiter Abschnitt (Schluss). Berlin, Dümmler. M. 1.50.

Riggenbach, Alb., Ergebnisse 7jähriger Niederschlags-Registrierungen in Basel. Karlsruhe, Braun. M. 1. 50.

Rudolph, H., Die Konstitution der Materie und der Zusammenhang zwischen ponderabler und imponderabler Materie. Berlin, Friedländer & Sohn. M. 1.

Falb, Rud., Neue Wetterprognosen und Kalender der kritischen Tage für 1898, Januar bis Juni. Berlin, Steinitz. M. 1.

Abraham, Max, Die elektrischen Schwingungen um einen stabförmigen Leiter, behandelt nach der Maxwellschen Theorie. Dissertation. Berlin, Mayer & Müller. M. 1. 50.

Tafel I.

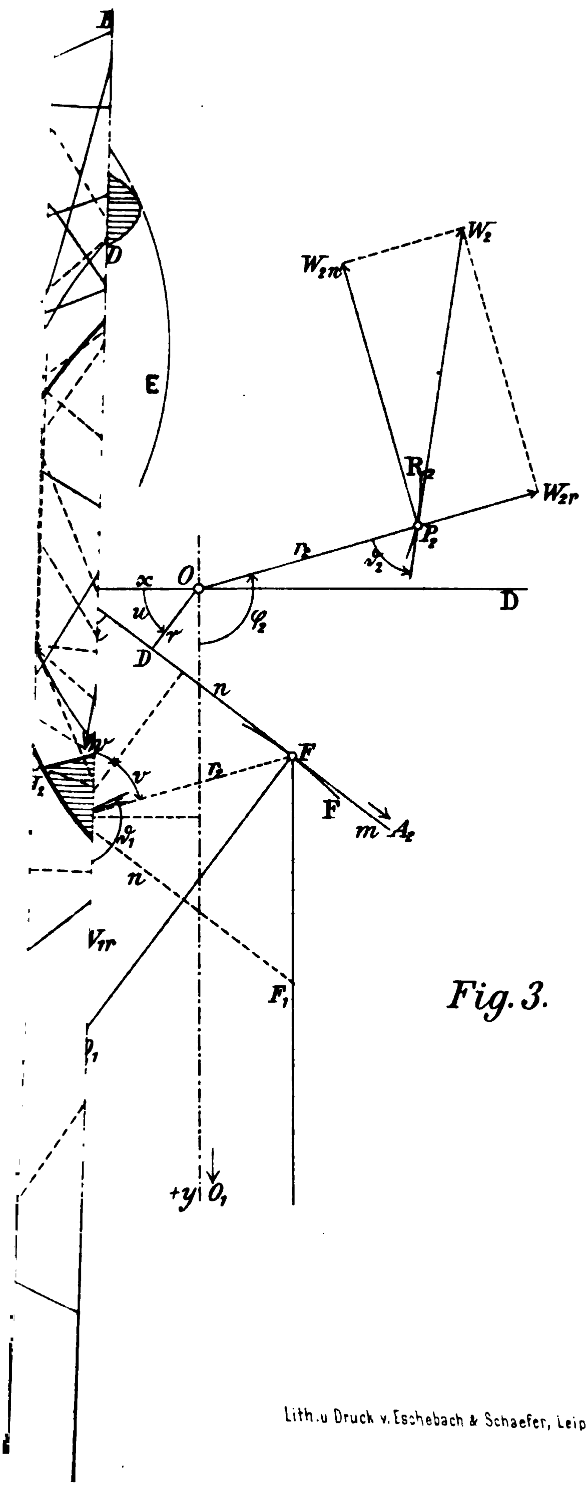


Fig. 3.

Lith. u Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.

Tafel II.

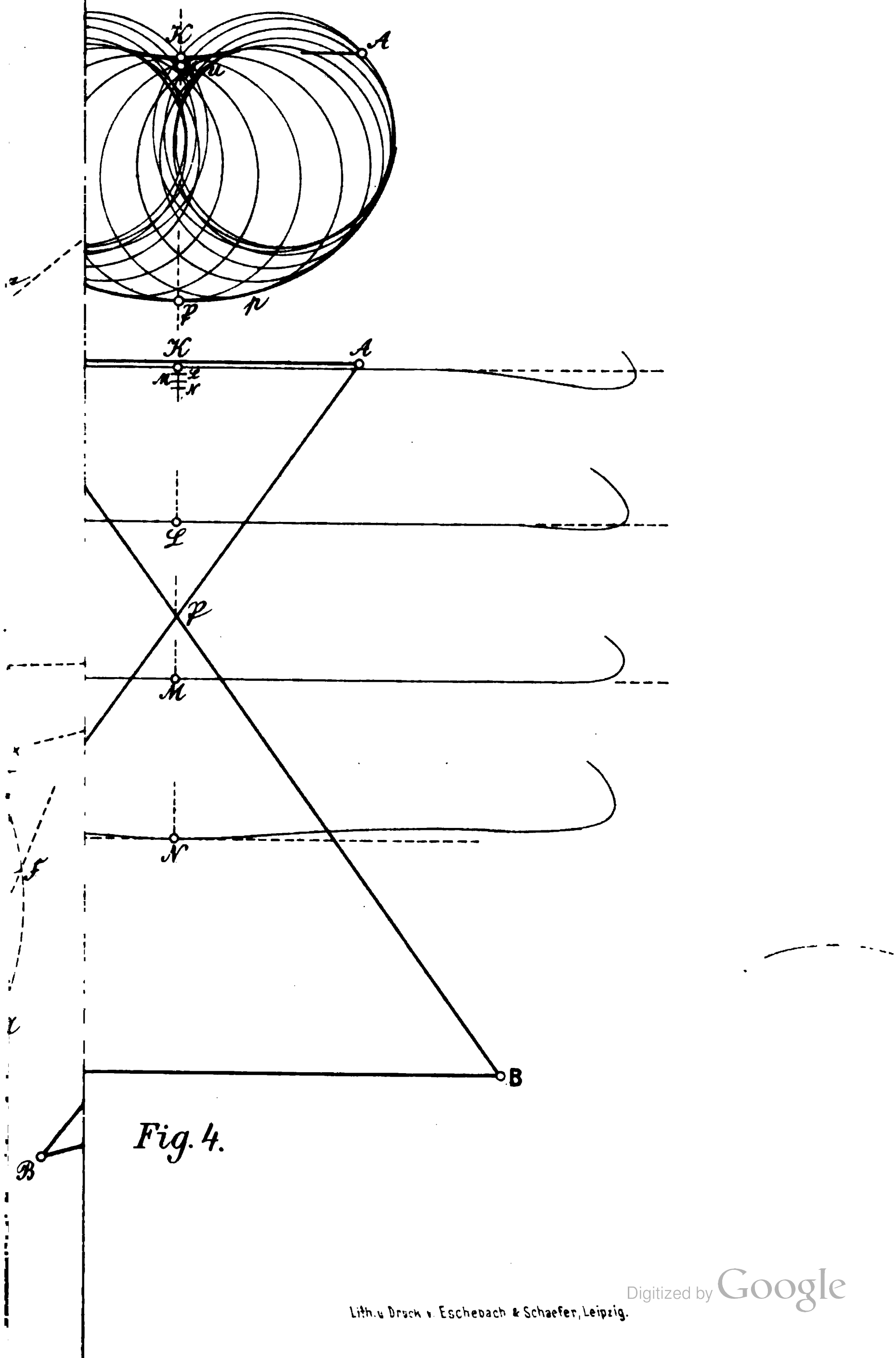
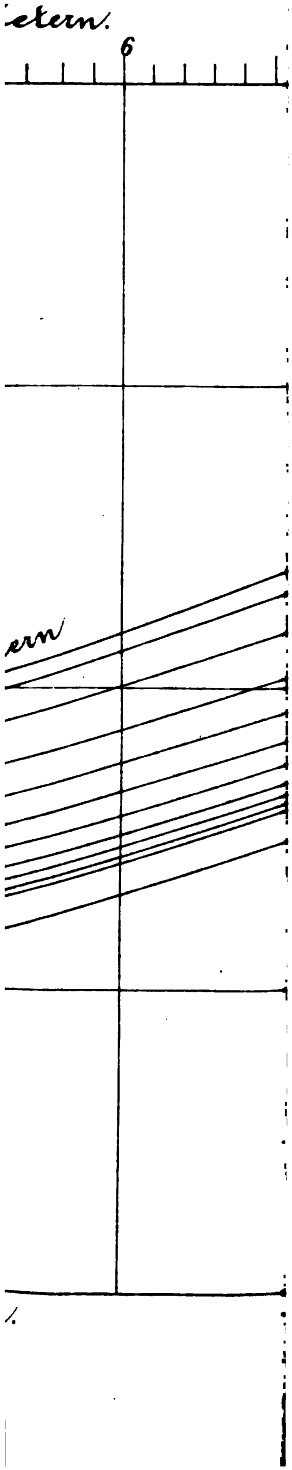
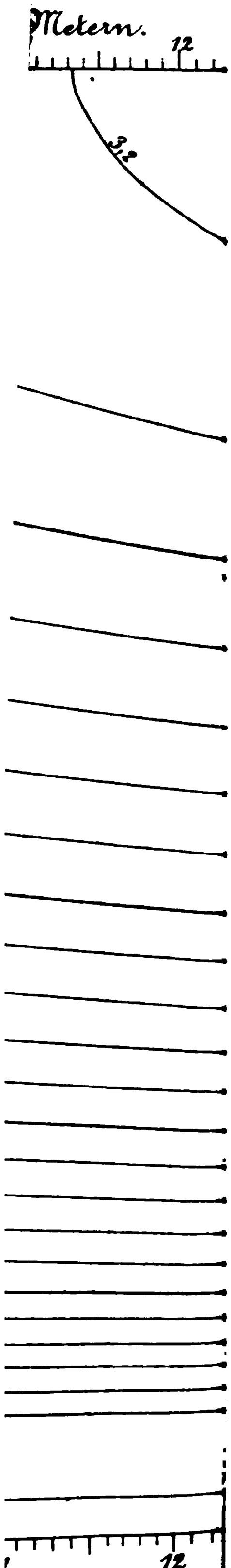


Fig. 4.

Lith. u Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.


…etern.
6
…ern


Metern.
12
3,2
12

Historisch-litterarische Abteilung.

Fermats Observatio zum Satze des Nikomachus.

Von

Prof. G. Wertheim.

Bekanntlich hat Bachet zu Diophants Schrift über Polygonalzahlen einen Anhang in zwei Büchern geschrieben. Der Satz 27 des zweiten Buches giebt die dem Nikomachus zugeschriebene Zerfällung der Kubikzahlen in aufeinander folgende ungerade Zahlen:

$$1 = 1^3, \quad 3 + 5 = 2^3, \quad 7 + 9 + 11 = 3^3, \ldots$$

Die auf diesen Satz bezügliche Observatio von Petrus Fermat war bis in die neueste Zeit nicht verstanden worden, so dass man den Text für verstümmelt hielt. Erst Tannery hat die wahre Bedeutung gefunden und S. 341 des ersten Bandes seiner Ausgabe der Werke Fermats mitgeteilt.

Der Satz lautet bei Bachet:

Unitas primum cubum; duo sequentes impares conjuncti, secundum cubum; tres sequentes tertium cubum; quatuor succedentes, quartum, semperque uno plures sequentem deinceps in infinitum cubum aggregati impares constituunt.

Fermat hatte dazu bemerkt:

Hanc propositionem ita constituo magis universalem. Unitas primam columnam in quacunque polygonorum progressione constituit; duo sequentes numeri, mulctati primo triangulo toties sumpto quot sunt anguli polygoni quaternario mulctati, secundam columnam; tres sequentes, mulctati secundo triangulo toties sumpto quot sunt anguli polygoni quaternario mulctati, tertiam columnam, et sic eodem in infinitum progressu.

Also in freier Übersetzung:

„Dieser Satz lässt sich in folgender Weise verallgemeinern. Für jede Reihe von Polygonalzahlen in die erste Säule gleich 1. Die zweite Säule wird erhalten, indem man das zweite und dritte Glied der

arithmetischen Reihe, aus welcher die betrachteten Polygonalzahlen entstehen, addiert und von der Summe das Produkt aus der ersten Dreieckszahl in die um 4 verminderte Anzahl der Ecken subtrahiert. Addiert man weiter die drei folgenden Glieder (das 4., 5. und 6.) der arithmetischen Reihe und vermindert die Summe um das Produkt aus der zweiten Dreieckszahl in die um vier verminderte Anzahl der Ecken, so erhält man die dritte Säule, u. s. w. ins Unendliche."

Der Satz war nicht verstanden worden, weil man nicht wusste, was der Ausdruck columna in diesem Zusammenhang bedeutete, und das hat Tannery l. c. erklärt. Fermat versteht unter columna das Produkt aus n in die n^{te} Polygonalzahl, sodass also die Säulen der Viereckzahlen mit den Kubikzahlen identisch sind. Tannery irrt nur darin, dass er meint, Fermat habe den in Rede stehenden Ausdruck selbst gebildet („Cette expression technique, qu'il semble avoir forgée lui-même, est généralement restée incomprise"). Franciscus Maurolycus schon hat ihn benutzt und in seinem Werke Arithmeticorum libri duo (Venedig 1575) eine ganze Reihe von Sätzen über Säulen von Polygonalzahlen hergeleitet.

Rezensionen.

Higher mathematics. A text-book for classical and engineering colleges. Edited by Mansfield Merriman and Robert S. Woodward New-York 1896. XI und 576 Seiten.

In diesem Buche ist durch die beiden Herausgeber eine Sammlung von Monographieen über einzelne Teile der höheren Mathematik dargeboten; und zwar sind elf verschiedene Gegenstände von ebenso vielen verschiedenen Autoren behandelt. Die Gegenstände der einzelnen Monographieen und die Autoren sind die folgenden: 1. Auflösung der Gleichungen von M. Merriman (Lehigh University), 2. Determinanten von L. G. Weld (University of Jowa), 3. Projektive Geometrie von G. B. Halsted (University of Texas), 4. Hyperbolische Funktionen von J. Mac Mahon (Cornell University), 5. Kugelfunktionen, Besselsche und Lamésche Funktionen von W. E. Byerly (Harvard University), 6. Funktionen einer komplexen Variabelen von T. S. Fiske (Columbia University), 7. Differentialgleichungen von W. W. Johnson (Naval Academy), 8. Grassmanns Ausdehnungslehre von E. W. Hyde (University of Cincinnati), 9. Vektorenanalysis und Quaternionen von A. Macfarlane (Lehigh University), 10. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Fehlertheorie von R. S. Woodward (Columbia University), 11. Geschichte der modernen Mathematik von D. E. Smith (Normal School of Michigan).

Bei den in Deutschland bestehenden Verhältnissen kann das vorliegende Buch für Studierende der Mathematik kaum in Betracht kommen; dieselben werden bei der Mehrzahl der behandelten Gegenstände zu ausführlicheren Spezialwerken greifen. Dagegen hat die Idee, welche die beiden Herren Herausgeber mit ihrem Werke verwirklichten, im Interesse der Studierenden an technischen Hochschulen viel Bestechendes. Es giebt zahlreiche Gebiete der höheren Mathematik, welche innerhalb der mathematischen Physik, Mechanik und Technik eine Rolle spielen, und welche gleichwohl nicht in den regelmässigen und obligatorischen Kursus der höheren Mathematik an den technischen Hochschulen hineingezogen werden können. In dieser Hinsicht begabteren Studierenden durch ein sachgemässes Buch zu Hilfe kommen, erscheint in der That sehr verdienstlich.

Nur würde die von den Herren Herausgebern getroffene Auswahl des Stoffes (welche natürlich in erster Linie dem amerikanischen Bedürfnis dienen soll) diesseits in mehreren Hinsichten nicht recht passen. Und andererseits hätte sich wohl auch die Anordnung des Stoffes nach sachgemässen Prinzipien gestalten lassen.

In ersterer Beziehung ist zu bemerken, dass ein verhältnismässig stark ausgedehntes Kapitel über hyperbolische Funktionen nicht beifällig aufgenommen werden dürfte. Dieselben bieten theoretisch über die Exponential- und die trigonometrischen Funktionen hinaus nichts neues von Belang, und für die Praxis werden Tafeln für die hyperbolischen Funktionen durch die Logarithmentafeln einigermaßen ersetzt.

Dass ein besonderes Kapitel der Grassmannschen Ausdehnungslehre gewidmet ist, wird man im Interesse der allgemeinen Anerkennung Grassmanns als sehr erfreulich ansehen. Doch dürfte die Ausdehnungslehre bei der grossen Abstraktion ihrer Grunddefinitionen und bei der Zeit und Mühe, welche man aufwenden muss, um mit Grassmannschen Methoden selbstständig und erfolgreich operieren zu können, für technische Unterrichtszwecke kaum in Betracht zu ziehen sein.

Demgegenüber ist es entschieden ein Fehler, dass dem Buche kein Kapitel über elliptische Funktionen eingefügt ist, zumal im übrigen die Funktionentheorie nicht schlecht wegkommt. Infolge einer Bemerkung in der Vorrede haben die Herausgeber diese Unvollständigkeit ihrer Sammlung selber empfunden.

Eine ausführliche Inhaltsangabe der einzelnen Abhandlungen ist hier wohl kaum am Platze. Doch muss bemerkt werden, dass sich die erste Abhandlung im Vergleich zu manchen der weiter folgenden recht dürftig ausnimmt. Der Verfasser hat hier freilich auch nur eine Ergänzung der in den „text-books" üblichen Darstellung der Algebra geben wollen. Die Folge ist, dass die Fundamentalsätze nur nebenher genannt werden, und dass die Mehrzahl der Entwickelungen nur in historischer und aphoristischer Form gegeben wird. Der modernen Gleichungstheorie scheint der Verfasser im wesentlichen fremd gegenüber zu stehen.

Betreffs der funktionentheoretischen Kapitel sei erwähnt, dass sich Herr Byerly als guter Kenner der älteren Theorie der Kugel-, Laméschen und Besselschen Funktionen erweist, und dass Herr Fiske in seiner Abhandlung über Funktionen einer komplexen Variabeln im wesentlichen die Cauchysche Theorie zur Geltung bringt. Im übrigen ist nur durchaus anzuerkennen, dass diese Kapitel in Ansehung ihres geringen Umfanges eine sehr vielseitige Behandlung ihrer Gegenstände darbieten; und dasselbe gilt auch von den übrigen hier nicht besonders genannten Abhandlungen der Sammlung.

ROBERT FRICKE.

Theorie der Abelschen Funktionen. Von Dr. HERMANN STAHL, Professor der Mathematik in Tübingen. Leipzig, B. G. Teubner, 1896. X und 354 Seiten.

Die neueren deutschen Bücher über Abelsche Funktionen betreffen meist spezielle Gebiete aus der Theorie dieser Funktionen. Eine allgemeine Behandlung dieser Theorie in Form eines Lehrbuches ist neuerdings von verschiedenen Seiten geplant und nunmehr durch Herrn Stahl wirklich zur Durchführung gebracht.

Bei dem Stande der bisherigen Lehrbücher über Abelsche Funktionen ist es zweifellos, dass Herr Stahl eine seit längerem bestehende Lücke ausgefüllt hat. Das bekannte Buch von C. Neumann ist mehr für das einführende Studium bestimmt und berücksichtigt auch die algebraische Seite der Theorie nur in sehr geringem Grade. Das Buch von Clebsch und Gordan, welches seinerzeit auf der Höhe der Wissenschaft stand, ist ausschliesslich auf kurventheoretisch-algebraische Vorstellungen basiert und lässt die allgemeinen funktionentheoretischen Begriffsbestimmungen Riemanns ausser Betracht. Zudem hat gerade auch die algebraische Seite der Theorie der Abelschen Funktionen nach Erscheinen des Clebsch-Gordanschen Buches vor allem durch Brill und Noether erhebliche Fortschritte gemacht. Wer demnach in einem Lehrbuche dem heutigen Stande der Theorie der Abelschen Funktionen gerecht werden will, muss vor allem den Schöpfungen Riemanns und den Forschungen der Algebraiker gleichmässig genügen, und dies ist durch Herrn Stahl in der That geschehen.

Allerdings ist zu bedauern, dass in den Grundlagen der Theorie der Riemannschen Fläche erst die zweite Stelle angewiesen ist, insofern überall von der Angabe einer algebraischen Relation $f(x, y) = 0$ ausgegangen wird. Die Folge ist, dass die Riemannschen Existenztheoreme, welche für gewisse Teile der modernen Funktionentheorie höchst wichtig sind, ausserhalb der Betrachtung bleiben. Im übrigen aber kann man nur sagen, dass das vorliegende Buch die Errungenschaften der Riemannschen Theorie der Abelschen Funktionen durchaus zur Geltung bringt, und es wird besonders interessieren, dass der Herr Verfasser zwei von Herrn Prym ausgearbeitete (ungedruckte) Vorlesungen Riemanns über elliptische und

Abelsche Funktionen aus dem Sommer 1861 und dem Winter 1861/62 hat benutzen können.

Die Anordnung des ganzen Stoffes und die Darstellung erscheinen sehr übersichtlich. Das ganze Buch zerfällt in zwei Teile: 1. Die algebraischen Funktionen und die Abelschen Integrale (die von Herrn Stahl gebrauchte Überschrift „Die rationalen Funktionen" könnte doch leicht zu irrtümlicher Auffassung Anlass geben); 2. Das Jacobische Umkehrproblem. Beide Male werden in ganz kurze Einleitungen die bei den elliptischen Funktionen vorliegenden Verhältnisse skizziert, so dass die allgemeine Theorie als konsequente Verallgemeinerung aller einzelnen im elliptischen Falle auftretenden Gesichtspunkte erscheint.

Ein tieferes Eingehen auf Spezialuntersuchungen, wie z. B. auf die Fälle $p = 2$ und $p = 3$ vermeidet Herr Stahl durchaus. Es ist in dieser Hinsicht für das vorliegende Buch charakteristisch, dass der hyperelliptische Spezialfall in demselben keine besondere Berücksichtigung findet.

Um nunmehr auf die Einzelheiten des Inhaltes etwas näher einzugehen, so ist im ersten Abschnitt der Ausgangspunkt von einer algebraischen Gleichung $F(x, y) = 0$ gewählt, welche in y auf den n^{ten} Grad ansteigt. Die genaue Untersuchung der n Zweige der Funktion y von x führt auf die Einführung der Riemannschen n-blättrigen Verzweigungsfläche. Die Untersuchungen von Lüroth und Clebsch über die Normalformen der Riemannschen Flächen werden dargestellt. Selbstverständlich wird ausführlich von der Zerschneidung gehandelt, die Arten der Potenzreihenentwickelungen von y in der Umgebung einzelner Stellen der Fläche werden besprochen etc.

Der zweite Abschnitt wendet sich zunächst stark von Riemann ab, und hier ist offenbar der Einfluss Brills auf den Verfasser ein bedeutender gewesen. Wäre im ersten Abschnitt der Begriff der Riemannschen Fläche das Primäre gewesen, so würde der natürliche Zugang zum Riemann-Rochschen Satz, dem Brill-Noetherschen Reziprozitätssatze etc. derjenige über die Theorie der Integrale erster und zweiter Gattung sein. Dieser Entwickelungsgang hätte der ursprünglichen Riemannschen Wendung unmittelbarer entsprochen. Zugleich wäre der Charakter der „Invarianz" der Darstellung mehr gewahrt geblieben. Die konsequente Fortbildung des im ersten Abschnitt eingenommenen Standpunktes lässt dagegen den Herrn Verfasser auch in Abschnitt II an die Angabe einer Relation $F(x, y) = 0$ knüpfen. Hierdurch wird ein mehr entwickeltes algebraisches Bild der Theorie gewonnen; und dabei sind es im wesentlichen Brill-Noethersche Gedanken, welche die Darstellung beherrschen. Die Theorie der algebraischen Funktionen auf einer Riemannschen Fläche kleidet sich in die Lehre vom Schnitt einer Grundkurve $F(x, y) = 0$ mit anderen Kurven. Die bekannten Fundamentalsätze Noethers, der Begriff der Punktgruppe auf der Grundkurve, der Restsatz etc. beherrschen die Entwickelung. Der Anschluss an Brill und Noether ist ein so enger, dass auch Herr Stahl den Brill-Noetherschen Reziprozitätssatz als Riemann-Rochschen Satz bezeichnet (wie in der

ursprünglichen Darstellung der Herren Brill und Noether), während man sonst gewöhnlich den Satz über die Anzahl linear-unabhängiger Funktionen mit gegebenen Unstetigkeitspunkten als Riemann-Rochschen Satz bezeichnet.

Im dritten Abschnitt wird eine ausführliche Theorie der Abelschen Integrale der drei Gattungen geliefert. Hier tritt dann wieder die Riemannsche Fläche als Fundament der Betrachtung in ihr Recht, welche ja vermöge ihrer kanonischen Querschnittsysteme den übersichtlichsten Zugang zu der Lehre von den Integralperioden bietet. Es findet in diesem Abschnitt gleich auch eine ausführliche Darstellung des Abelschen Theorems ihren Platz.

Im folgenden Abschnitt, welcher die eindeutige Transformation behandelt, wird der Ausgangspunkt wieder von einer Grundkurve gewählt. Der Satz von der Erhaltung der Zahl p bei eindeutiger Transformation erfordert für diesen Standpunkt ausführliche Diskussion, während er bei der eindeutigen und konformen Beziehung zweier Riemannschen Flächen auf einander direkter ersichtlich ist. Weiter werden die $(3p-3)$ Moduln einer „Klasse" algebraischer Funktionen mit $p > 1$ besprochen, und im zweiten Teile des Abschnitts wendet sich die Betrachtung der im Raume von $(p-1)$ Dimensionen gelegenen Normalkurve der Funktionen Φ zu, wobei auch die Noetherschen Sätze über die Anzahl linear-unabhängiger Flächen gegebenen Grades durch die Normalkurve abgeleitet werden.

Der zweite Teil des Werkes, welcher gleichfalls in vier Abschnitte zerfällt, ist vornehmlich der Theorie der ϑ-Funktionen von p Variabeln gewidmet. Die Einführung dieser Funktionen wird durch Formulierung und nähere Diskussion des Jacobischen Umkehrproblems motiviert. Die ϑ-Funktionen treten demnach nicht so unvermittelt wie in Riemanns Abhandlung auf, und zugleich meidet die Entwickelung den weiten durch Weierstrass eingeschlagenen Weg über die Integrale der dritten Gattung.

Im fünften Abschnitt findet man nun die zahlreichen Grundeigenschaften der ϑ-Funktionen m^{ter} Ordnung, speziell derjenigen erster Ordnung entwickelt, wobei für die letzteren die zweiteiligen Charakteristiken, die Einteilung in gerade und ungerade Funktionen etc. besprochen werden. Indem die Argumente der ϑ-Funktionen sodann mit p Integralen erster Gattung, das System der ϑ-Moduln aber mit dem System der zugehörigen Perioden identifiziert werden, sind die so ausgestalteten ϑ-Funktionen in ihrem Verhalten auf der zerschnittenen Riemannschen Fläche zu untersuchen. Hier spielen dann vor allem die bekannten Sätze über das Verschwinden der ϑ-Funktionen die fundamentale Rolle.

In den beiden folgenden Abschnitten wird nun das Fazit des ganzen Buches gezogen, indem die transcendenten Mittel der ϑ-Funktionen mit den algebraischen Entwickelungen des ersten Teiles in Beziehung gesetzt werden, um solchergestalt die Lösung des Jacobischen Umkehrproblems und die Darstellung der algebraischen Funktionen der Fläche durch Quotienten zu gewinnen. Die transcendent definierten p Nullpunkte einer

ϑ-Funktion erster Ordnung mit zweiteiliger Charakteristik liefern nun in algebraischer Formulierung die Berührungspunkte einer sogenannten Berührungskurve, welche überall da, wo sie die Grundkurve schneidet, dieselbe sogleich berührt. Der Quotient der linken Seiten zweier, derartige Berührungskurven darstellenden Gleichungen ist eine algebraische Funktion auf der Fläche, deren Quadratwurzel unverzweigt, aber nicht mehr eindeutig ist. Man gewinnt so die einfachsten, auf der Fläche existierenden „Wurzelfunktionen", welche das algebraische Gegenbild der ϑ-Quotienten erster Ordnung mit zweiteiligen Charakteristiken vorstellen. Diese Wurzelfunktionen mögen durch $\sqrt{\psi_\mu(x)}$ bezeichnet sein, wo μ ein Symbol für die zugehörige zweigliedrige Charakteristik ist. Die algebraische Definitionsweise von $\sqrt{\psi_\mu(x)}$ bringt es dann mit sich, dass erst die Quotienten zweier solcher Ausdrücke $\sqrt{\psi_\mu(x)}$, $\sqrt{\psi_\nu(x)}$ auf der Fläche unverzweigt sind. Bildet man die ϑ-Funktionen für solche Argumente, welche selbst mehrgliederige Integralsummen sind, so sind die Quotienten solcher ϑ algebraisch als symmetrische Funktionen der Integralgrenzen darstellbar, wobei stets ein Produkt von Wurzelfunktionen als Faktor in der Darstellung des ϑ-Quotienten auftritt. Dieser Ansatz wird für die $(p+1)$-gliederigen Integralsummen durchgeführt, wo die Wurzelfunktionen $\sqrt{\psi_\mu(x)}$ zur Geltung kommen, sowie dann weiter für $(2p-2)$-gliederige Integralsummen, wo gewisse aus den Riemannschen Φ-Funktionen zu bildende Wurzelfunktionen $\sqrt{\varphi_\mu(x)}$ zu verwenden sind. Zur Lösung des Umkehrproblems werden p Formeln der ersteren Art [d. i. solche mit $(p+1)$-gliederigen Summen] verwendet, welche nunmehr gestatten, dem Umkehrproblem gemäss die p oberen Integralgrenzen in den p Integralsummen des Jacobischen Ansatzes aus den Werten dieser p Summen zu berechnen. Die explizite Durchführung dieser Auflösung des Umkehrproblems erfordert die genauere algebraische Untersuchung der Wurzelfunktionen $\sqrt{\psi_\mu(x)}$, sowie die nähere Berechnung der in den gedachten p Gleichungen enthaltenen transcendenten Elemente, nämlich der ϑ-Funktionen. Im siebenten Abschnitt werden die Relationen zwischen ϑ-Funktionen mehrgliederiger Integralsummen und algebraischen Funktionen in der allgemeinsten Gestalt in Untersuchung gezogen. Die Wurzelfunktionen mit höheren Exponenten, die Darstellung der algebraischen Funktionen durch die Primfunktion etc. kommen hier zur Darstellung. Hier folgen denn auch die Grundsätze der eigentlichen Abelschen Funktionen, d. i. der rationalen symmetrischen Funktionen der p oberen Integralgrenzen x_i in Abhängigkeit von den Summen

$$U_h = \sum_{i=1}^{p} \int_{\alpha_i}^{x_i} du_h$$

betrachtet. Es übertragen sich vor allem die Sätze über Addition, Multiplikation und Division der elliptischen Funktionen auf die so gedachten Funktionen $Al(U_1, \ldots U_p)$.

Im letzten, für sich stehenden Abschnitte sind die Ansätze der linearen Transformation entwickelt. Hier, wie überall, darf man es als einen Vorzug des Buches bezeichnen, dass es sich niemals in Einzelentwickelungen verliert, sondern auf die klare Hervorhebung der Hauptgesichtspunkte den wesentlichen Nachdruck legt.

ROBERT FRICKE.

Conférences sur les mathématiques faites au congrès de mathématiques tenu à l'occasion de l'exposition de Chicago par FÉLIX KLEIN, recuillies par le professeur ALEX. ZIWET, traduites par M. L. LAUGEL. Paris 1898. A. Hermann. 8°, 128 S.

Über die Entstehung und den Inhalt des Evanston Colloquiums hat bereits Herr Fricke an dieser Stelle (Jahrgang 1895, S. 41—43) berichtet und die Bedeutung dieses Buches auch für deutsche Leser hervorgehoben; handelt es sich doch in ihm um die Darlegung der Grundgedanken und Hauptgesichtspunkte der modernen Mathematik. Die vorliegende französische Übersetzung wird daher nicht nur in Frankreich mit Freude begrüsst werden, sie wird auch vielen deutschen Mathematikern willkommen sein, die sich mit der englischen Sprache nicht befreundet haben. Herrn Laugel, dem wir schon eine Reihe vortrefflicher Übertragungen deutscher Abhandlungen verdanken, hat sich aber nicht mit der Rolle eines Übersetzers begnügt, er giebt vielmehr auf den letzten 17 Seiten bibliographische Noten, in denen die Entwickelungen des Textes weiter geführt werden und die um so wertvoller sind, als bei ihrer Abfassung Herr Klein selbst mitgewirkt hat.

Wir würden uns freuen, wenn diese Übersetzung auch in Deutschland recht weite Verbreitung fände, und Herr Laugel dadurch ermutigt würde, die von ihm geplante französische Übersetzung der Werke Riemanns wirklich erscheinen zu lassen.

PAUL STÄCKEL.

Bibliotheca Mathematica, Zeitschrift für Geschichte der Mathematik. Herausgegeben von GUSTAF ENESTRÖM. Stockholm. Generalregister für Band I bis X. 1887—1896.

Den Inhalt der Eneströmschen Bibliotheca mathematica pflegen wir regelmässig in unserem Abhandlungsregister mitzuteilen. Wenn wir des Generalregisters für die zehn ersten Bände besonders gedenken, so geschieht es, weil Herr Eneström in demselben die Photographien nahezu aller seiner Mitarbeiter, begleitet von kurzen, aber zuverlässigen biographischen Angaben, zum Abdrucke gebracht hat. Wir freuten uns ungemein in dieser Weise die persönliche Bekanntschaft von engeren Fachgenossen teils machen, teils erneuern zu können.

CANTOR.

Die Geschichte der Rechenkunst vom Altertume bis zum XVIII. Jahrhundert von FRANZ VILLICUS, kaiserl. Rate, emer. k. k. Professor,

Direktor der Gremial-Handelsfachschule der Wiener Kaufmannschaft, Besitzer des Anerkennungs-Diplomes der Wiener Weltausstellung vom Jahre 1873. Mit Illustrationen, Zahlzeichen, Zahlensystemen und Rechenmethoden der alten Kulturvölker und altamerikanischer Völkerstämme, nebst einer tabellarischen Darstellung von Zahlwörtern des Zehnersystemes aus 72 Sprachen. Dritte vermehrte Auflage. Wien 1897. Carl Gerolds Sohn. VIII, 114 S.

Im Vorworte macht uns der Herr Verfasser mit 10 lobenden Besprechungen der früheren Auflagen bekannt und zieht aus diesem Beifalle die Folgerung, es habe kein Anlass vorgelegen, die neue Auflage im Inhalte wesentlich zu verändern. Hinzugekommen ist hauptsächlich ein Anhang, der die sogenannten chaldaeischen Zahlzeichen des Noviomagus schildert und Varianten der indisch-arabischen Zahlzeichen mitteilt. Wer von der Geschichte der Rechenkunst noch nichts weiss, wird aus der Schrift des Herrn Villicus manches lernen können; wer andere umfassendere Untersuchungen gelesen hat, wird nicht selten mit einiger Verwunderung finden, dass mit Vorliebe auf ältere Werke zurückgegriffen ist, wo doch neuere Bücher vorhanden waren, die jene älteren Ergebnisse teils ergänzen, teils richtig stellen.

Cantor.

Troisième centenaire de la naissance de Descartes. Numéro de la Revue de metaphysique et de morale spécialement consaré à Descartes. Paris, Juillet 1896. Armand Colin et Co. 200 p.

René Descartes ist am 31. März 1596 geboren. Es war ein glücklicher Gedanke der durch Herrn Xavier Léon vertretenen Leitung der *Revue de métaphysique et de morale* die 300. Wiederkehr dieses Jahrestags durch ein Heft zu feiern, welches ausschliesslich durch Aufsätze über Descartes gebildet wäre. Dreizehn Verfasser haben Beiträge geliefert, und 200 Seiten stark liegt das Erinnerungsheft vor uns. Ebensowohl der Zweck unserer eigenen Zeitschrift als die Begrenzung unserer Berechtigung zur Urteilsfällung verwehren uns ein Eingehen auf alle Beiträge, wie sie uns anderseits ein Verweilen bei einigen wenigen derselben gebieten, bei den Aufsätzen von Herrn P. Tannery, von Herrn D. J. Korteweg, von Herrn Ch. Adam.

Descartes physicien ist der Titel des Aufsatzes, in welchem Herr P. Tannery die Frage aufwirft, ob Descartes befähigt war, in der Physik eine hervorragende Rolle zu spielen? Descartes Zwecke zuerst erwägend findet der Verfasser, dass sie überall philosophische waren, dass mathematische, dass physikalische Untersuchungen für Descartes nur Mittel waren, seine allgemeine Methode zu prüfen, und dass es fast Zufall genannt werden könnte, dass dabei Ergebnisse von einer Bedeutung sich offenbarten, welche für sich den wissenschaftlichen Lebenszweck jedes anderen als Descartes hätten bilden können. Den mathematischen Leistungen diesen hohen Wert beizulegen, war nichts Neues. Herr Tannery begegnet sich in ihrer

Anerkennung mit allen, welche mit Geschichte der Mathematik sich beschäftigen, von denen keiner zweifelt, dass Descartes, hätte er auf Mathematik sich beschränkt, sie noch unendlich weiter gefördert haben würde, als er es schon that. Weniger Übereinstimmung herrscht darüber, ob Descartes sich auch die Physik mit Erfolg als eigentliche Fachwissenschaft gewählt haben würde? Herr Tannery behauptet es und findet, dass die Dioptrik Descartes das erste Beispiel mathematischer Behandlung eines von der Mechanik verschiedenen Abschnittes der Physik darstelle, was allein schon einen grossen Fortschritt bedeute; er findet, dass die Fehler, welche der Descartesschen Physik vorgeworfen werden, darin ihren Ursprung haben, dass er nicht einzelnen Wahrheiten nachging, sondern ein System aufbaute. Herr Tannery hätte vielleicht hinzufügen dürfen, dass Descartes in diesem Systeme die Fernkräfte verschmähte, ein Vorzug, der manche Irrtümer aufhebt.

Herr D. J. Korteweg schrieb Descartes et les manuscrits de Snellius d'après quelques documents nouveaux. Die alte Frage, ob das Brechungsgesetz zuerst von Snellius und dann unabhängig von diesem abermals von Descartes entdeckt wurde, oder ob Descartes sich eines geistigen Diebstahls an Snellius, dessen handschriftliche Aufzeichnung er kannte, schuldig machte, wird zu Gunsten der ersten Annahme entschieden. In der That ist aus Briefen von Descartes der Nachweis geführt, dass dieser 1729 in Besitz des Brechungsgesetzes war, und aus einem durch Herrn Korteweg in Asterdam entdeckten Brief von Golius an Constantin Huygens den Vater vom 1. November 1632 ist mit grosser Wahrscheinlichkeit zu folgern, dass Descartes erst nach diesem letzteren Datum mit dem Erstlingsrechte des Snellius bekannt wurde.

Herr Ch. Adam endlich berichtet unter Correspondance de Descartes, autographes et copies manuscrites über die Briefe von Descartes, welche sich handschriftlich erhalten haben und zeigt an einigen auffallenden Beispielen, wie solche Briefe sich gegenseitig zur Bestätigung dienen, insbesondere wie aus dem bekannten Datum eines Briefes das vergessene Datum eines anderen Briefes annähernd, wenn nicht sogar genau, bestimmt werden kann.

CANTOR.

Christian Wolffs Verhältnis zu Leibniz. Habilitationsschrift von WALTHER ARNSPERGER, Dr. phil. Weimar 1897 bei Emil Felber. 72 S.

Der Verfasser der uns vorliegenden Abhandlung ist Philosoph, und so musste ihm wesentlich daran liegen ins Reine zu bringen, ob Wolffs Philosophie wirklich nur, wie man vielfach gemeint hat, eine Verwässerung Leibnizscher Gedanken war, oder ob man sie als eine Fortbildung derselben betrachten muss. Herr Arnsperger entscheidet sich für die letztere Auffassung. Wir selbst haben ja ganz andere Interessen bei Leibniz wie bei Wolff im Auge. Uns ist Leibniz der geniale Erfinder der Differentialrechnung, Wolff der Verfasser breitspuriger Lehrbücher und der in vielen

Zweigen sich zurechtsetzende Berichterstatter der Acta Eruditorum. Aber auch die mathematische Thätigkeit Wolffs erscheint in neuer und zweckmässiger Beleuchtung, wenn die Beziehungen zu Leibniz klar werden, und so ist schon nach dieser Richtung Herrn Arnspergers Untersuchung für die Geschichte der Mathematik fruchtbar zu machen. Die Mitarbeit an der Leipziger Zeitschrift vollends war meistens eine mathematische und deshalb haben wir allen Grund, Mitteilungen über die Entstehung des Mitarbeiterverhältnisses, wie sie zum Teil aus noch ungedruckten Briefen in Hannover uns werden, dankbar zu begrüssen.

Cantor.

Niklaus Blauner, der erste Professor der Mathematik an der bernischen Akademie. Von Professor Dr. J. H. Graf. (Separatabzug aus der Sammlung bernischer Biographien.) Bern 1897. Buchdruckerei K. J. Wyss. 23 S.

Niklaus Blauner wird vermutlich der grossen Mehrzahl unserer Leser ein durchaus unbekannter Name sein. Auch wir lernten ihn erst aus Herrn Grafs Biographie kennen, und vielleicht kennt Herr Graf selbst ihn erst, seit er ihm in den bernischen Unterrichtsakten aus der Mitte des 18. Jahrhunderts begegnete. Wir können weiter hinzufügen, dass es kein Unrecht gewesen wäre, Blauner der Vergessenheit zu überlassen. Dennoch ist die kleine Schrift in ihrer Art recht lesenswert, weil Blauner grade in seiner Unbedeutendheit ein Licht auf den armseligen Zustand des Unterrichtes in der Mathematik in der Schweiz um das Jahr 1750 zu werfen geeignet ist.

Cantor.

Essai sur la représentation analytique de la direction par Caspar Wessel. Traduction du mémoire intitulé: Om Directionens analytiske Betegning. [Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, Femte Del, Kjobenhavn 1799] publiée avec les trois planches de l'original et préfaces de M. M. H. Valentiner et T. N. Thiele par l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark à l'occasion du centenaire de sa présentation à l'Académie le 10 Mars 1797. Copenhague 1897. Höst & Sön. XIV, 60 p.

Der Diorismus der griechischen Geometer gab darüber Aufschluss, wann eine Konstruktion möglich sei, wann nicht. Wallis im 66.—69. Kapitel seiner Algebra von 1685 verband die geometrische Auflösung einer Aufgabe mit ihrer algebraischen Diskussion und kam der Hauptsache nach zu dem Ergebnisse, dass, wenn imaginäre Werte der Unbekannten auftreten, dieses daher rühre, dass gewisse Strecken in einer bestimmten Grösse oder Richtung gegeben waren, nach deren Abänderung die Auflösung reell d. h. thatsächlich konstruierbar werde. Nicht viel mehr war es, was Heinrich Kühn 1750 oder 1751 leistete. Von der wichtigsten Frage: wie lässt eine imaginäre Strecke sich versinnlichen? war weder bei Wallis noch bei Kühn

die Rede. Sie tauchte, wie es scheint, erst gegen 1786 auf. Wenigstens sagt Cauchy in seinem berühmten Aufsatze *Sur les quantités géométriques* von 1849 [Comptes Rendus XXIX, 250] in einer Anmerkung: *Une grande partie des résultats de ces recherches avaient été, à ce qu'il parait, obtenue même avant le siècle présent et dès l'année 1786 par un savant modeste, Mr. Henry-Dominique Truel, quil, après les avoir consignés dans divers manuscrits, les a communiqués, vers l'année 1810, à Mr. Augustin Normand, constructeur de vaisseaux au Havre.* Freilich war das Jahr 1810 ein viel zu später Zeitpunkt, um Erfinderrechte für Dinge geltend machen zu können, welche Argand 1806 im Drucke herausgegeben hatte. Aber auch Argands Veröffentlichung erweist sich nachgrade als eine jedenfalls selbständig erdachte Wiederholung dessen, was Caspar Wessel 1797 niedergeschrieben hatte, was seit 1799 in dänischer Sprache gedruckt war. Im 1. Bande von Poggendorffs Biographischem Wörterbuche von 1863 ist Wessel und seine Abhandlung genannt, aber wir glauben kaum, dass irgend ein Benutzer jenes Wörterbuches dadurch aufmerksam gemacht wurde. Erst 1895 hat Herr Christensen auf die Bedeutung jener Arbeit von 1797 hingewiesen, und die Dänische Akademie hat mit vollem Rechte einen Centenarneudruck derselben veranstaltet, welcher Caspar Wessel den verdienten Ehrenplatz in der Geschichte der Mathematik sichern wird.

Cantor.

Ludwig Otto Hesses gesammelte Werke herausgegeben von der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Mit einem Bildnisse Otto Hesses. München 1897. Verlag der K. Akademie. VIII, 732 S.

Die Bayerische Akademie der Wissenschaften hat drei unmittelbare Schüler Hesses, die Herren Gundelfinger, Lüroth, Noether, und neben ihnen noch Herrn Dyck mit der Aufgabe betraut, Hesses Abhandlungen neu herauszugeben und mit denselben zu vereinigen, was etwa druckreif in seinem Nachlasse sich vorfinde. In letzterer Beziehung waren zwar drei Nummern schon durch die Herren Gundelfinger und Caspary dem Drucke übergeben, aber immerhin fanden sich noch zwei Aufsätze, welche nunmehr erstmalig bekannt werden: Beweise zu einigen Sätzen von Chasles und insbesondere die Fortsetzung zu Hesses erster Abhandlung von 1837 über Oberflächen zweiter Ordnung. Sie war beim Abdruck der Abhandlung im 18. Bande von Crelles Journal in Aussicht gestellt, war unter dem Titel „Konstruktion der zweien gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung gemeinschaftlichen konjugierten Linien" seit 1837 im Entwurfe fertig und später zu stark zwei Drittel ins Reine geschrieben, aber zur Herausgabe kam es nicht, vermutlich (wie Herr Lüroth annimmt) weil Hesse einen darin ausgesprochenen Satz nachträglich nicht für genügend sichergestellt hielt. Die Herren Herausgeber haben den einzelnen Abhandlungen wertvolle Anmerkungen beigegeben, welche teils kritischer Natur sind, teils

die Geschichte der betreffenden Untersuchungen vor und nach Hesses Eingreifen betreffen. Ein Lebensabriss Hesses, warm empfunden und geschrieben, vervollständigt den stattlichen Band, dessen Ausstattung zu dem Schönsten gehört, was wir an deutschen Drucken noch gesehen haben.

Cantor.

Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Von Jacob Steiner. [Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 82 und 83.] Leipzig 1896. W. Engelmann. 126 und 162 S.

Wir haben im 41. Bande dieser Zeitschrift, Histor.-litter. Abt. S. 216 bei Gelegenheit der Anzeige von Steiners Geometrischen Konstruktionen das baldige Erscheinen seiner Systematischen Entwickelung in Ostwalds Klassikern ankündigen dürfen. Es ist nunmehr in zwei Heften erfolgt, herausgegeben durch Herrn von Oettingen, welcher insbesondere zu Heft 82 einen dankenswerten Zusatz in Gestalt von Bemerkungen über das perspektivische Zeichnen gegeben hat.

Cantor.

Grundriss der Differential- und Integralrechnung. Von Dr. Ludwig Kiepert, Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Hannover. I. Teil: Differentialrechnung, 8. Auflage; II. Teil: Integralrechnung, 6. Auflage.

Der fünften Auflage des II. Teils von 1894 folgte eine sechste von 1896, der siebente Auflage des I. Teils von 1895 folgte eine achte von 1897. Es wäre überflüssig diesen Daten ein weiteres Lob anzuschliessen. Wir bemerken nur, dass Herr Kiepert in der Vorrede zur Integralrechnung sich über den auch in dieser Zeitschrift ihm erteilten Rat, die beiden Bände zu verschmelzen, äussert. Rein äusserliche Gründe verhinderten die Befolgung des Rates, während Herr Kiepert, in der Sache mit uns einverstanden, den wirklichen Unterricht so geordnet hat, dass er auf die Abschnitte 1 bis 4 und 8 bis 11 der Differentialrechnung unmittelbar den ganzen ersten Teil der Integralrechnung folgen lässt, um dann wieder zur Differentialrechnung zurückzukehren. Bei dem geringen Unterschiede zwischen den beiden letzten Auflagen kann diese Anweisung auch den Besitzern der vorhergehenden Auflage dienen, und deshalb hielten wir es für wünschenswert, sie hier anzuführen.

Cantor.

Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung, als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen zusammengestellt von Dr. Robert Fricke, Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig. Heft I, 80 S. Heft II, 66 S. Heft III, 38 S. Braunschweig 1897. Friedrich Vieweg und Sohn.

Vorlesungen über Mathematik weichen in einer Beziehung von allen anderen an Hochschulen gehaltenen Vorlesungen ab. Während man bei

anderen Fächern dem Namen der Vorlesung den Inhalt, vielfach auch den Lehrgang entnehmen kann, ist das in der Mathematik ganz anders. Unter gleichem Titel werden oft himmelweit verschiedene Dinge vorgetragen! Kaum einige wenige Vorlesungen gleichen einander halbwegs, und zu diesen gehören diejenigen über Differential- und Integralrechnung. Um so wünschenswerter erscheint es, den Zuhörern gerade dieser gegenwärtigen Anfangsvorlesung einen Leitfaden empfehlen zu können, kurz genug, um die Vorlesung nicht entbehrlich zu machen, streng genug, um nicht bei jeder Gelegenheit durch den Lehrer als ungenügend bezeichnet werden zu müssen. Herr Fricke hat sich der Aufgabe unterzogen, ein solches Büchelchen herzustellen und, wenigstens was unser persönliches Urteil betrifft, mit vorzüglichem Erfolge. Wir haben bereits Zuhörer, welche eines Leitfadens in dem angegebenen Sinne sich bedienen wollten, auf die kurze, knapp elfeinhalb Druckbogen starke Schrift hingewiesen, und sie fanden darin genau was sie suchten, kein Lehrbuch, geschweige denn ein Handbuch, welches eine ganze Semesterfolge von Vorlesungen ersetzen will, aber eine zweckmässige Unterstützung bei der häuslichen Wiederholung des Vorgetragenen.

Cantor.

J. A. Serret, **Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung** mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Axel Harnack, zweite durchgesehene Auflage von G. Bohlmann. Erster Band: Differentialrechnung. Mit 85 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1897, B. G. Teubner. XVI, 570 S.

Als Harnack 1884 das in Frankreich schon hochgeschätzte Serretsche Lehrbuch übersetzt und mit Anmerkungen bereichert herausgab, war sofort die allgemeine Meinung dahin gerichtet, das Werk habe entschieden gewonnen, und der Serret-Harnack, wie man zu sagen liebte, stehe mehr als das Original auf der Höhe der Wissenschaft. Aber dreizehn Jahre sind in dem Leben der heutigen Mathematik ein langer Zeitraum, und was 1884 nahezu allen Wünschen genügte, bedurfte 1897 bereits wieder der Ergänzung. Herr Bohlmann hat sich der Mühe unterzogen, das im Buchhandel vergriffene Werk zum Zwecke einer neuen Auflage abermals auf die Höhe der Wissenschaft zu bringen. Zwei Wege standen dazu offen. Zu den Harnackschen Anmerkungen konnten neue sie vervollständigende Anmerkungen hinzutreten, oder aber eine Umarbeitung konnte versuchen, das Neue mit dem Älteren und Alten zu verschmelzen. Jener erste Weg wäre vielleicht der pietätvollere gewesen; er hätte auch die Verantwortlichkeit jedes der drei Bearbeiter für seinen Anteil deutlich hervortreten lassen; aber, sagt Herr Bohlmann, und seine Behauptung dürfte berechtigt sein, das Buch hätte dadurch einen so inhomogenen Charakter erhalten, dass es seinen ursprünglichen Vorzug grosser Lesbarkeit darüber verloren hätte. Das gab den Ausschlag. Wir befinden uns infolge des getroffenen Entschlusses beinahe einem neuen Lehrbuche gegenüber,

und man könnte eher fragen, was ist von dem ursprünglichen Serret geblieben, als was hat Herr Bohlmann daran verändert? Das Vorwort beantwortet uns allerdings diese Fragen, und eine Vergleichung der verschiedenen Auflagen setzt uns in den Stand, die Richtigkeit der Antwort zu prüfen und zu bestätigen. Das erste und das elfte Kapitel, jenes von den einleitenden Begriffen, dieses von den Funktionen einer komplexen Variabelen handelnd, sind vollständig umgearbeitet. In jenem sind die Paragraphen, welche den Grenzbegriff kennen lehren, mit besonderer Sorgfalt behandelt, in diesem will dem Leser ein Zugang zu der Funktionentheorie, wie sie in Deutschland gelehrt zu werden pflegt, eröffnet werden. Grössere Veränderungen sind auch im 6. und 7. Kapitel vorgenommen worden, dort bei der Bestimmung der Maximal- und Minimalwerte von Funktionen mehrerer unabhängiger Variabelen, hier bei Erörterung der singulären Stellen ebener Kurven. Das Bedürfnis zur gemeinschaftlichen Benennung von Maximal- und Minimalwerten ein Wort zur Verfügung zu haben, dürfte ein allgemein empfundenes sein. Herr Bohlmann spricht in dieser Beziehung von Extremwerten; Referent bedient sich, um an die Wellenform der die Funktion versinnlichenden Kurve oder Oberfläche zu erinnern, des Wortes Kulminationswert. Vermutlich wird jedem das selbstgewählte Wort als das zutreffendere erscheinen. Eine Veränderung des 7. Kapitels in einem grundsätzlich wichtigen Punkte dürfte allgemeine Billigung finden. Serret hat in seinem Lehrbuche die Differentialrechnung von der Integralrechnung geschieden. Gleichwohl hat er im 7. Kapitel von dem Differential einer Fläche, von dem eines Bogens gesprochen und dabei die Fläche als Grenzwert der Summe geradliniger Vierecke, den Bogen als Grenzwert der Summe geradliniger Sehnen behandelt, mit anderen Worten: er hat die Summendefinition des bestimmten Integrals benutzt, bevor der Leser überhaupt etwas vom Integrieren weiss. Das hat nun Herr Bohlmann abgestellt. Er setzt freilich auch die Möglichkeit voraus eine Fläche und eine Bogenlänge zu messen, denn ohne diese Voraussetzung ist die Frage nach deren Differential gegenstandslos, aber jene vorausgesetzte Messung ist eine, man möchte sagen, handwerksmässige mittelst eines Planimeters oder mittelst der Wage und mittelst eines um den Bogen gelegten und dann ausgespannten Fadens. Die richtigere Grenzdefinition ist dadurch dahin verschoben, wohin sie dem Zusammenhange nach gehört, in den zweiten Band. Eine ähnliche Veränderung ist im 9. Kapitel bei der Bogenlänge von Raumkurven eingetreten. Eine sehr dankenswerte Bereicherung des Werkes besteht in einem alphabetisch geordneten Sachregister, fast unentbehrlich für jeden, der nicht anhaltend zu lesen, sondern nach Bedürfnis bald da bald dort nachzuschlagen beabsichtigt.

Cantor.

Fünfstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen. Herausgegeben von Dr. Hermann Schubert,

Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Leipzig 1897, B. G. Teubner. VI, 157 S.

Die Schubertschen Tafeln unterscheiden sich in mehrfacher Beziehung von sämtlichen in Deutschland in Gebrauch befindlichen Werken ähnlicher Richtung. Erstens hat Herr Schubert nach den Tafeln auch Gegentafeln aufgenommen, wodurch der Übergang vom Logarithmus zur Zahl, von der trigonometrischen Funktion zum Winkel direkt aufgeschlagen werden kann. Zweitens ist bei den trigonometrischen Tabellen links ausschliesslich Sinus und Cosinus, rechts ebenso ausschliesslich Tangens und Cotangens zu finden; ein Abwechseln zwischen Vorwärtsblättern und Rückwärtsblättern wird vermieden, so lange die gleiche Funktionenart in Rechnung tritt. Wir glauben mit Herrn Schubert in diesen Eigentümlichkeiten, welche indessen ausserhalb Deutschlands nicht ohne Beispiel dastehen, wesentliche Verbesserungen zu erkennen.

Cantor.

Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Von Professor Dr. Ludwig Schlesinger. Zweiten Bandes erster Teil. Leipzig 1897, B. G. Teubner. XVIII und 532 S.

Kaum zwei Jahre nach dem ersten Bande des Werkes (vergl. das Referat der Zeitschrift für Mathematik und Physik 1895, S. 166 flg.) ist seine Fortsetzung erschienen, noch nicht der Abschluss. Denn „die Fülle des zu bearbeitenden Materials hat eine Teilung des zweiten Bandes notwendig gemacht. Der vorliegende erste Teil behandelt die Gruppentheorie, die Umkehrprobleme im allgemeinen und diejenigen speziellen Theorien, die sich an die Integration einer linearen Differentialgleichung durch bestimmte Integrale mit Hilfe der Eulerschen Transformierten angliedern lassen. Der zweite Teil wird die Theorie der eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunktionen (insbesondere der elliptischen Modulfunktion), der Allgemeinen Fuchsschen Funktionen und die linearen Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Koeffizienten zum Gegenstand haben."

Nach diesen Worten des Verfassers wenden wir uns sogleich zu einer knappen Darlegung des ausserordentlich reichen Inhalts des vorliegenden Bandes.

IX. Allgemeine Theorie der bei linearen Differentialgleichungen auftretenden Gruppen.

Der ganze Abschnitt steht wesentlich unter dem Zeichen der drei Namen Lie, Picard, Vessiot und enthält die neuerdings aufgedeckten Analogieen zwischen der Theorie der linearen Differentialgleichungen und derjenigen der algebraischen Gleichungen. Er steht in dieser Hinsicht zu dem Anfang des II. Abschnittes in Beziehung.

Die allgemeine lineare Gruppe L von n Veränderlichen ist eine n^2-gliedrige kontinuierliche Transformationsgruppe. Sie ist selbst nicht abzählbar, enthält aber als abzählbare Untergruppe die Gesamtheit der Substitutionen, die ein Fundamentalsystem von Integralen einer vorgelegten

Differentialgleichung bei allen möglichen Umläufen erleidet, d. h. die Gruppe $\mathfrak{R}$ der Differentialgleichung (später mit g bezeichnet).

Die Gruppe L von den n Veränderlichen $y_1 \ldots y_n$ bildet das Analogon zur symmetrischen Gruppe von n Unbestimmten $x_1 \ldots x_n$. Den elementaren symmetrischen Funktionen von $x_1 \ldots x_n$ entsprechen diejenigen rationalen Differentialfunktionen p aus $y_1 \ldots y_n$, die die Koeffizienten der linearen Differentialgleichung mit dem Fundamentalsystem $y_1 \ldots y_n$ bilden. — Die Gesamtheit der linearen Transformationen, die irgend eine rationale Differentialfunktion $R(y_1 \ldots y_n)$ ungeändert lässt, bildet eine bestimmte Untergruppe von L. R, als Funktion von x, genügt einer Differentialgleichung niedrigster Ordnung, der Resolvente. — Rationale Differentialfunktionen, die zur nämlichen Gruppe gehören, sind rational durch einander und durch die p ausdrückbar: ein Analogon des Lagrangeschen Satzes der Algebra.

Nimmt man als rationale Differentialfunktion von $y_1 \ldots y_n$ eine sogenannte empfindliche Funktion, analog der Galoisschen, d. h. eine solche, die bei keiner linearen Transformation ungeändert bleibt, und stellt ihre Resolvente auf, so ist diese von der Ordnung n^2 und irreduktibel, solange die $y_1 \ldots y_n$ unbestimmte Funktionen sind. Geht man aber von einer speziellen Differentialgleichung aus, so kann die Resolvente reduktibel und durch eine Differentialgleichung niedrigerer Ordnung ersetzbar werden. Die von der letzteren bestimmte Gruppe linearer Transformationen ist diejenige Untergruppe von L, die als Transformationsgruppe* G der vorgelegten linearen Differentialgleichung bezeichnet wird und eine hervorragende Rolle für sie spielt. Dies kommt namentlich in dem dem Galoisschen Fundamentaltheorem entsprechenden Picard-Vessiotschen Doppelsatz zum Ausdruck: „Jede rationale Differentialfunktion von $y_1 \ldots y_n$ (Fundamentalsystem einer speziellen, vorgelegten linearen Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten), die eine rationale Funktion von x ist, bleibt bei den Transformationen von G als Funktion von x ungeändert. Jede rationale Differentialfunktion von $y_1 \ldots y_n$, die als Funktion von x bei den Transformationen von G ungeändert bleibt, ist eine rationale Funktion von x."

Durch „Adjunktion" der „Gattung" einer Differentialfunktion $R(y_1 \ldots y_n)$, die bei den Transformationen von G und nur bei diesen formell ungeändert bleibt, zum „Rationalitätsbereich" der allgemeinen linearen Differentialgleichung (deren Transformationsgruppe L ist) wird deren Gruppencharakter identisch mit demjenigen der speziell vorgelegten Differentialgleichung mit der Transformationsgruppe G. — Für die Integration der Differentialgleichung handelt es sich um Reduktion der Transformationsgruppe durch

---

* Bei der fundamentalen Bedeutung dieses Begriffs wünschten wir seine Definition in Nr. 150 ganz explizite zusammengestellt und hervorgehoben, während man jetzt dieselbe unter mehrfachem Zurückblättern mühsam zusammensuchen muss. Das ist überhaupt eine wiederholt vorkommende Erscheinung.

geeignete Erweiterung des Rationalitätsbereichs. Die Integration hängt also mit der Struktur der Transformationsgruppe zusammen. — Auch die Integrabilität der Differentialgleichung durch Quadraturen kann an der Transformationsgruppe erkannt werden.

Das Bestehen einer algebraischen Relation zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems bedingt einen „Affekt" der Differentialgleichung. Ihre Transformationsgruppe ist als Untergruppe in der Gruppe jenes algebraischen Gebildes enthalten. Bei algebraischer Integrierbarkeit — ein Spezialfall des soeben erwähnten Falles — fällt die Transformationsgruppe G geradezu mit der Gruppe g der Differentialgleichung (siehe oben) zusammen. — Allgemein ist die Gruppe (g) eine Untergruppe der Transformationsgruppe (G).

Aus der Thatsache, dass eine rationale Differentialfunktion, die bei g ungeändert bleibt, im allgemeinen nur eine eindeutige Funktion von x, eine solche, die bei allen Transformationen von G aber ungeändert bleibt, eine rationale Funktion von x ist, rechtfertigt sich die Kleinsche Bezeichnung von g als Monodromie-, von G als Rationalitätsgruppe. — Die Reduktibilität einer linearen Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten fällt mit derjenigen ihrer Transformationsgruppe zusammen.*

X. Spezielle Probleme der Gruppentheorie. Invarianten.

Manche Eigenschaften gehören nicht einer einzelnen linearen Differentialgleichung an, sondern auch allen denen, die mit jener in Bezug auf einen gewissen Bereich E cogredient sind. Dabei heissen zwei Differentialgleichungen innerhalb E cogredient, wenn beide innerhalb E eindeutige Koeffizienten haben und die abhängige Variable der einen durch die der anderen und ihre Ableitungen linear und homogen mit in E ebenfalls eindeutigen Koeffizienten ausdrückbar ist. Treten an Stelle der eindeutigen rationale Koeffizienten, so gehören die Differentialgleichungen insbesondere zu derselben Art. („Differentialgleichungen derselben Art" heissen bei Herrn Fuchs „zur selben Klasse gehörig", welche Bezeichnung von Herrn Schlesinger später auch noch, aber wieder in dem ursprünglichen Riemannschen Sinne benutzt wird.) Die Reduktibilität innerhalb E, bezw. die Reduktibilität einer Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten schlechthin, ist z. B. eine Eigenschaft aller mit einer Differentialgleichung cogredienten, bezw. zur selben Art gehörigen Differentialgleichungen. — Differentialgleichungen derselben Art haben dieselbe Rationalitäts- und Monodromiegruppe.

Es folgen die eleganten Sätze über die einer vorgelegten assoziierten Differentialgleichungen, wobei eine geometrische Interpretation der Ele-

* S. 13, Z. 13 von unten lies: „stetig veränderlich". — S. 35, Z. 10 von oben lies: „r-gliedrige" statt „n-gliedrige". — S. 68, Z. 14 von unten lies: „Teilgebilde" statt „Teilgebiete". — S. 80, Z. 11 von oben und 1 von unten lies: „Transformationsgruppe" statt „Gruppe".

mente des Fundamentalsystems als homogene Koordinaten in einem $n-1$-dimensionalen Raum sich fruchtbar erweist. Da diese n homogenen Koordinaten Funktionen von x sind, so bestimmen sie eine „Integralkurve". Jene Sätze über die Differentialgleichung und ihre verschiedenen Assoziierten werden so zu geometrischen Sätzen über die Tangentialebenen verschiedener Stufe an der Integralkurve. Assoziierte Differentialgleichungen führen zu den Begriffen der „assoziierten Arten" und „assoziirten Gruppen", im Spezialfall zu den adjungierten Differentialgleichungen. — Mittelst der assoziierten Differentialgleichungen kann man die Frage entscheiden, ob eine vorgelegte lineare Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten reduktibel ist oder nicht.

Geht man von den Integralen der Differentialgleichung zu den Integralquotienten über oder geometrisch zur Darstellung derselben Integralkurve durch nicht homogene Koordinaten, so treten an Stelle der linearen Gruppen projektive. Die Erhaltung der Integralkurve bei der allgemeinsten Transformation

$$x = \varphi(\xi), \quad y = \lambda \cdot z$$

veranlasst die Frage nach den Invarianten dieser Transformation. Die Differentialgleichung mit verschwindenden Invarianten führt dann wieder auf den Fall, dass zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems homogene Relationen bestehen, und auf Differentialgleichungen mit algebraischer Integralkurve.*

XI. Formulierung und allgemeine Diskussion der Umkehrprobleme.

Die besondere Behandlung des Falles von homogenen Relationen zwischen den Integralen einer Differentialgleichung vierter Ordnung, ein Problem, dem schon die Inaugural-Dissertation des Verfassers gewidmet war, liefert das Ergebnis, dass, abgesehen von gewissen Ausnahmsfällen, die unabhängige Variable eine algebraische Funktion des Ortes auf der Integralkurve ist, und leitet damit zu den Umkehrproblemen hin.

---

* S. 112. Der in Gleichung 2) enthaltene Schluss dürfte nur dann zu halten sein, wenn ein die sämtlichen Punkte $a_1 \ldots a_\sigma$ einschliessender Umlauf die Integrale ungeändert lässt. — S. 150 Zeile 9 von oben lies ($\mathfrak{A}$) statt (A). — S. 157 Zeile 7 von unten. Vom „dritten Glied einer Gleichung" zu sprechen, ist unzulässig; mindestens müsste es dann heissen „Doppelgleichung". Thatsächlich ist aber hier in Gleichung 1) zunächst nur für den komplizierten Ausdruck der linken Seite die abkürzende Bezeichnung $\mathfrak{Z}(u)$ eingeführt, sodass das Gleichheitszeichen = beide Mal einen total verschiedenen Sinn hat, ein Umstand, auf den z. B. Kronecker gern aufmerksam machte. Es empfiehlt sich, das auch äusserlich kenntlich zu machen durch Gebrauch des Identitätszeichens $\equiv$ an der ersten Stelle. Dann genügt es auch von „rechter" und „linker Seite" der Gleichung zu sprechen.— S. 177 Zeile 16 von unten. Die spezielle lineare Gruppe L ist S. 92 definiert und seitdem nie wieder benutzt worden; es wäre daher geboten, hier wenigstens auf jene Definition zu verweisen. — S. 179 am Kopf lies 179 statt 180. — S. 187 Zeile 16 von oben lies „Exponent" statt „Potenz".

Die algebraisch integrierbaren Differentialgleichungen beliebiger Ordnung bilden ein Beispiel für den Fall, dass x eine eindeutige oder wenigstens endlich vieldeutige Funktion des Ortes auf der Integralkurve ist. Bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung können gewisse algebraische notwendige Bedingungen aufgestellt werden, zu denen aber im allgemeinen noch andere transcendente Bedingungen hinzutreten müssen, damit der gewünschte Umstand eintritt. Als Bedingung ergiebt sich namentlich die Diskontinuität der projektiven Monodromiegruppe ϑ von einer Variablen η, dem Integralquotienten. — Für Differentialgleichungen höherer Ordnung ergiebt sich Entsprechendes für die projektive Monodromiegruppe der Integralquotienten. — Als Beispiel dient die Umkehrung der hyperelliptischen Integrale erster Gattung.

Die Aufgabe, eine lineare Differentialgleichung mit gegebener Monodromiegruppe der Integralquotienten herzustellen, oder die Koeffizienten der Differentialgleichung als Funktionen der Parameter der zugehörigen projektiven Monodromiegruppe, d.h. im wesentlichen der Fundamentalinvarianten, zu studieren, führt bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu dem Ergebnis, dass eine Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchsschen Klasse ohne „scheinbar“ singuläre Punkte, für welche $0, 1, \infty$ drei der wirklich singulären Stellen sind, durch die projektive Monodromiegruppe der Integralquotienten eindeutig bestimmt ist. Man gelangt dabei zu einer (Riemannschen) Fläche F, ausgebreitet über der η-Ebene, in der x eine eindeutige Funktion des Ortes ist. Sie wird in solche Stücke F_0 (Fundamentalbereich, polygone générateur) zerschnitten, dass innerhalb derselben jeder Wert von x auch nur einmal auftritt. Endlich wird dieses Polygon F_0 zu einer Fläche $\overline{F}_0$ zusammengebogen, die im Sinne der Analysis Situs der x-Ebene, in der die singulären Punkte ausgesondert sind, äquivalent ist. Die umgekehrte Frage: der Existenzbeweis einer auf gegebener Fläche $\overline{F}_0$ eindeutigen Funktion X von η wird nach den Methoden der Herrn Schwarz und Neumann behandelt.

Verwandt mit den schon im X. Abschnitt eingeführten Begriffen von Differentialgleichungen derselben Art (= „Klasse“ nach Herrn Fuchs) sind die jetzt benützten von Differentialgleichungen derselben Familie (Poincaré) und Klasse (Riemann). Wir bemerken über das gegenseitige Verhältnis dieser Begriffe nur, dass die Zugehörigkeit zur gleichen Klasse ein Spezialfall der Zugehörigkeit zur gleichen Art und diese wiederum ein Spezialfall der Zugehörigkeit zur gleichen Familie ist. Die Theorie der Differentialgleichungen derselben Klasse wird von Herrn Schlesinger erheblich ausgebaut.

Ihre Verwendung finden diese Betrachtungen sogleich bei der Darstellung der Fuchsschen Untersuchungen über Differentialgleichungen, deren Monodromiegruppe von einem in den Koeffizienten auftretenden Parameter unabhängig ist. Diese gipfeln in dem „wunderbaren“ — wir würden lieber sagen „höchst merkwürdigen“ — Satz, dass die m^{te} Assoziierte

einer linearen Differentialgleichung $2m^{ter}$ Ordnung mit jener Eigenschaft reduktibel ist.*

XII. Theorie und Anwendung der Eulerschen Transformierten.

Schon durch die Überschrift — die darin enthaltene Bezeichnung ist von Herrn Schlesinger in seinen neuesten Arbeiten eingeführt worden — wird dieser Abschnitt in Hinsicht auf das ihn beherrschende Prinzip und den allgemeinen Teil seines Inhaltes als Eigentum des Verfassers gekennzeichnet. Er handelt von der Lösung linearer Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale, erstreckt auf geeignetem Wege — namentlich längs Pochhammerscher Doppelschleifen — und schliesst sich deshalb eng an den VII. Abschnitt an.

Den Eingang bildet eine Erweiterung des Abelschen Satzes von Vertauschung von Parameter und Argument bei linearen Differentialgleichungen. Als Eulersche Transformierte $\mathfrak{D}'=0$ bezw. $E'=0$, einer vorgelegten Differentialgleichung, (A) $P=0$, bezeichnet Herr Schlesinger eine Differentialgleichung, die aus (A) hergeleitet werden kann und die Eigenschaft hat, dass (A) durch ein gewisses bestimmtes Integral gelöst wird, sobald man darin für eine im Integranden enthaltene Grösse eine Lösung von $\mathfrak{D}'=0$ einsetzt. Die Beziehung ist eine reziproke: für die Adjungierte, $\mathfrak{D}=0$, von $\mathfrak{D}'=0$ ist die Adjungierte $P'=0$ von (A) Eulersche Transformierte, und daher wird auch $\mathfrak{D}=0$ mittelst einer Lösung von $P'=0$ durch bestimmte Integrale gelöst.

Dieser hochinteressante allgemeine Satz von Herrn Schlesinger, der für Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse besonders einfache Gestalt annimmt, dient in dem ganzen Abschnitt als gemeinsame Quelle auch für schon früher bekannte Einzelergebnisse. Dahin gehört die Fuchssche Methode der Berechnung der Fundamentalsubstitutionen mit Hilfe solcher bestimmter Integrale, deren Integrationswege sich bei den Umläufen ändern, der Ausdruck der Doppelschleifenintegrale durch Eulersche Integrale — von diesem Spezialfall ist der Name der ganzen Theorie hergeleitet — die Integration der Tissot-Pochhammerschen Differentialgleichung durch bestimmte Integrale, die weitere Spezialisierung dieser Differentialgleichung auf diejenige der Gaussschen Reihe und jeweils die Berechnung der Fundamentalsubstitutionen, die überhaupt als wichtigste Anwendung der Lösung durch bestimmte Integrale anzusehen sein dürfte. — Die Voraussetzung, dass das Integral der Eulerschen Transformierten der Tissot-Pochhammerschen Differentialgleichung algebraisch sei, führt auf die Periodizitätsmoduln der Abelschen Integrale als Funktionen eines Parameters, auf den allgemeinen, darauf bezüglichen Satz von Fuchs, die

* S. 243 Zeile 8 von unten lies $x_{\nu-1}$ statt x_n. — S. 347 Zeile 12 von oben lies „wirklich" statt „wirklichen". — S. 365 Zeile 2 von oben lies „(S. 108)" statt „(S. 156)".

explizite Ausführung für hyperelliptische Integrale und noch spezieller die elliptischen Periodizitätsmoduln und die Legendresche Relation.

Den Abschluss endlich bildet die Haedenkamp-Fuchssche Relation zwischen den hyperelliptischen Integralen verschiedener Gattung und zwischen verschiedenen Grenzen, die doppelte Ableitung der Weierstrassschen Relationen zwischen den kompletten Integralen erster und zweiter Gattung und die Fuchsschen Untersuchungen, die an den Abelschen Satz von Vertauschung von Parameter und Argument anknüpfen.

Zu beachten sind noch einige Ergänzungen und Berichtigungen, die sich auf den ersten Band beziehen.

Vorstehend haben wir kurz die Hauptmaterien bezeichnet, die in dem vorliegenden Band von Herrn Schlesinger zur Darstellung gebracht werden. Aber wir haben dabei nur in geringem Maße hervorheben können, wie vielseitig die Kenntnisse des Verfassers, wie eindringend ins Einzelne und weitschauend in Bezug aufs Ganze sein Blick sich erweist, wie viel Originelles er in dem Bande niedergelegt, wie er es verstanden hat, oft anscheinend ganz Verschiedenartiges unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt zu gruppieren und zu einer grossen Theorie zusammen zu weben.

Solchen Vorzügen gegenüber erscheint es fast kleinlich, einige allgemeine, rein äusserliche Einwendungen gegen die Form der Darstellung zu erheben. Wir wollen nicht davon reden, dass allerhand sprachliche Missbräuche sich häufig finden, dass der Ausdruck oft rein logisch an Präzision zu wünschen lässt, und dass die Interpunktion nicht immer nach jedermanns Geschmack sein wird, wiewohl möglichste Strenge auch in diesen Dingen die Lektüre eines mathematischen Werkes erheblich erleichtern kann. Abgesehen aber hiervon auch kann nicht geleugnet werden, dass das Buch im allgemeinen schwer zu lesen ist, schwerer, als es der an sich meist schwierige Gegenstand notwendig macht. Dass der Verfasser selbst niemals im Detail erstickt, sondern stets den Blick für den grossen Zusammenhang offen behält, haben wir oben voll anerkannt. Um so wünschenswerter aber wäre, dass er die Übersicht auch für einen erst lernenden Leser noch mehr erleichterte, zumal ja das Ganze glücklicherweise doch mehr die Form von „Vorlesungen" als die eines Nachschlage-Kompendiums trägt. Dazu würde z. B. schon beitragen, wenn die Kapitel eigene Überschriften erhielten. Wozu sind sie sonst eigentlich überhaupt da? Will man aber solche Kapitelüberschriften für den eigenen Gebrauch hinzufügen, so stösst man oft auf Schwierigkeiten, weil in der That die Einteilung nicht immer eine notwendige ist. Dass auch mitunter in einem „Urtext" eine andere Einteilung bestanden hat, dafür spricht verräterisch der Umstand, dass mehrmals die Numerierung der Gleichungen nicht mit dem Kapitel abbricht, sondern sich noch ein Stück in das neue Kapitel hineinzieht!

Vor allem aber würden ausführlichere und häufigere Übersichten — mindestens zu Beginn eines neuen Abschnittes — über das zuletzt Vorgetragene und das nun Folgende in der Art, wie sie z. B. Weierstrass in seinen Vorlesungen so meisterhaft zu geben pflegte, dem gerügten Übel-

stand abhelfen. Vielleicht lernt ja der Leser, der diese Ergänzung selbst vornimmt, am meisten; aber vielleicht ermüdet mancher andere vorher! Warum z. B. wird der noch unkundige Leser nicht gleich auf S. 416 darauf hingewiesen, dass an den dort aufgestellten Satz sich alles folgende anknüpft? — Je weiter man in dem Bande vorschreitet, desto spärlicher wird der Text: für eine mathematische Abhandlung vielleicht in vielen Fällen — auch nicht in allen! — ein Vorzug, für ein Handbuch sicher nicht in demselben Maße!

Endlich noch Eines. Die Gewohnheit, besonders wichtige Formeln nicht in die fortlaufende Numerierung aufzunehmen, sondern durch Buchstaben hervorzuheben, verdient durchaus Anerkennung. Wenn es sich dann aber z. B. um eine Differentialgleichung handelt, deren linke Seite auch wieder durch einen grossen Buchstaben symbolisiert wird, und dieser einmal mit dem Numerierungsbuchstaben übereinstimmt [z. B. S. 420 $(E) E_s(u) = 0$], ein anderes Mal aber nicht, wo es ebenso gut möglich wäre, z. B. in demselben Kapitel 1. XII $(A)\, D_x(y) = 0$, deren Koeffizienten durch P_k bezeichnet sind, und wenn man dann obendrein noch vom ersten Bande her (z. B. S. 37) an eine gewisse Übereinstimmung in der Bezeichnung der Koeffizienten und der ganzen Gleichung gewöhnt ist, so hört die Erleichterung auf und macht einer ausserordentlichen Erschwerung des Studiums Platz!

Indessen — noch einmal — alles dies sind kleine Äusserlichkeiten, die gegenüber den gerühmten Vorzügen kaum ins Gewicht fallen. Es wird nur als eine weitere Anerkennung für den Verfasser wirken, dass der Referent keine sachlicheren Einwendungen vorzubringen hatte; und er hätte auch über diese Dinge völlig geschwiegen, wenn er sich nicht von ihrer Erwähnung manchen Vorteil für den noch ausstehenden Schlussband verspräche. Er möchte ein so schönes Werk auch in einer vollendet schönen Form sehen.

Lothar Heffter.

Elemente der Arithmetik für die mittleren und oberen Klassen höherer Lehranstalten. Von W. Pflieger. Strassburg 1896. Fr. Bull. 128 S.

Der Verfasser vorliegenden Buches schliesst sich im wesentlichen der Darstellung an, welche Weierstrass in seinen Vorlesungen über die Theorie der analytischen Funktionen als Einleitung zu geben pflegte. Im besonderen hält auch er an dem Postulat fest, dass bei jeder Erweiterung des Zahlengebietes die neuen Zahlen den Gesetzen des alten Gebietes zu gehorchen hätten. Auf dieser Grundlage giebt er eine Darstellung der verschiedenen Rechnungsoperationen und schliesst hieran zwei ausführliche Abschnitte über den binomischen Lehrsatz und die Exponentialfunktion.

Ob die immerhin geschickte, aber im Ausdruck zu abstrakt gehaltene Darstellung für den Schulgebrauch geeignet ist, möchte Referent bezweifeln. Sicher dürfte sie dem einen oder anderen Fachgenossen eine bequeme Gelegenheit bieten, sich mit der Weierstrassschen Darstellung der Arithmetik bekannt zu machen.

E. Jahnke.

Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik für höhere Lehranstalten: erster, zweiter, dritter Lehrgang. Von K. Schwering. Freiburg i.B. 1896. Herder. 58 S.: Mk. 0. 80; 87 S.: Mk. 1; 95 S.: M. 1. 20.

Es ist eine vortreffliche Aufgabensammlung, welche den Vorteil bietet, dass sie die Einführung eines besonderen Lehrbuches unnötig macht. Die den einzelnen Abschnitten vorgesetzten Erläuterungen sind knapp und klar geschrieben, die Aufgaben geschickt zusammengestellt. Ein grosser Teil der Aufgaben ist neu. Insbesondere möchte Referent auf eine Reihe hübscher Aufgaben in geometrischer Einkleidung (vergl. dritten Lehrgang) aufmerksam machen. Es ist zu wünschen, dass die Sammlung an recht vielen Schulen Eingang finden möge.

E. Jahnke.

Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Von G. Holzmüller. Gymnasialausgabe. Zweiter Teil, im Anschluss an die preussischen Lehrpläne von 1892 nach Jahrgängen geordnet und bis zur Entlassungsprüfung reichend. Leipzig 1896, B. G. Teubner. 279 S.

Auf die Gymnasialausgabe des ersten Teiles musste eine solche des zweiten folgen, welche die aus dem ersten Teil ausgeschiedenen Abschnitte aufzunehmen hatte.

E. Jahnke.

Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik. Von Th. Bürklen. Enthaltend die wichtigsten Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, Algebra, niederen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, mathematischen Geographie, analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes, der höheren Analysis. Leipzig 1896, Göschen. 211 S. Mk. 0. 80.

Das vorliegende Büchlein soll in erster Linie den Bedürfnissen der Repetition und des Nachschlagens dienen. Es erscheint durch den reichen Inhalt, die übersichtliche Anordnung und die sorgfältige Gliederung für diese Zwecke in hohem Maße geeignet. So sind in der Geometrie die Sätze über Flächenvergleichung und -Berechnung zu einer Gruppe zusammengestellt. Ebenso findet man die geometrischen Örter unter wenigen Gesichtspunkten vereinigt. In der Algebra und algebraischen Analysis werden neben den Grundgesetzen und besonderen Fällen auch die Hilfsmittel gegeben, welche eine weitergehende, geschickte Anwendung der Formeln ermöglichen, z. B. die wichtigsten Formen der Einführung neuer Unbekannten bei der Lösung quadratischer Gleichungen, die Hauptformen der Exponentialgleichungen, welche auf algebraische zurückführen. Bei den Kettenbrüchen, diophantischen Gleichungen und bei der Lösung höherer numerischer Gleichungen u. a. finden sich nicht bloss die Formeln, sondern auch die Durchrechnung eines Beispiels nach zweckmässigem Schema.

Hieran schliessen sich Abschnitte über Stereometrie, ebene und sphärische Trigonometrie, mathematische Geographie, analytische Geometrie der Ebene und des Raumes.

In dem Abschnitt über höhere Analysis giebt der Verfasser zunächst aus dem Gebiete der Differentialrechnung allgemeine und spezielle Formeln über Differentiation, die Taylorsche und Mac-Laurinsche Reihe und Regeln zur Berechnung unbestimmter Ausdrücke, sowie der extremen Werte von Funktionen, weiter aus dem Gebiete der Integralrechnung die Grundformeln zur Integration einfacher Funktionen, Integrationsmethoden für explizite Funktionen und einige bestimmte Integrale, endlich als Beispiele für die Anwendung der Infinitesimalrechnung auf Geometrie die wichtigsten Begriffe aus der Theorie der ebenen und Raumkurven und der krummen Flächen.

E. Jahnke.

Die Grundlehren der Stereometrie. Von J. Lengauer. Ein Leitfaden für den Unterricht mit Übungsaufgaben. Kempten 1896. J. Kösel. 110 S.

Der vorliegende dritte Teil eines Lehrbuches der Geometrie enthält das geometrische Pensum der achten Klasse der bayerischen Gymnasien, die räumliche Geometrie und die sphärische Trigonometrie. Die letztere ist mit der Lehre vom Dreikant verknüpft.

Die Darstellung ist knapp und klar, die zahlreichen Figuren durchweg anschaulich. Für die Herleitung der Körperinhalte wird das Cavalerische Prinzip herangezogen.

Für den Ausdruck Parallelepipedon benutzt der Verfasser nicht die von Herrn Martus vorgeschlagene Verdeutschung Rautenprisma, welche schon in zahlreiche Lehrbücher übergegangen ist, er sagt statt dessen Parallelflach, das rechtwinklige Parallelflach nennt er mit Herrn Martus Quader.

Beigegeben sind den einzelnen Kapiteln eine grosse Zahl von Übungsaufgaben, ausser Rechenaufgaben auch Konstruktionsaufgaben, welche die Brauchbarkeit des Lehrbuches noch erhöhen dürften.

E. Jahnke.

Lehrbuch der Geometrie für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten. Von H. Fenkner. Zweiter Teil: Raumgeometrie. Nebst einer Aufgabensammlung bearbeitet mit besonderer Berücksichtigung der Anforderungen bei der Abschlussprüfung. Zweite Auflage. Braunschweig 1896. O. Salle. 109 S. Mk. 1.40.

Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten dadurch, dass die Hauptsätze über die dreiseitigen Ecken und in einem Anhange die Sätze über Kugelmütze, Kugelzone, Kugelausschnitt, Kugelabschnitt hinzugekommen, sowie dadurch, dass die Übungsaufgaben erheblich vermehrt sind.

Was die Figuren anbetrifft, so zeigen sie auch in der zweiten Auflage nicht überall die wünschenswerte Anschaulichkeit.

E. Jahnke.

Leitfaden der elementaren Mathematik. Von A. Sickenberger. Zweiter Teil: Planimetrie. 3. Auflage. München 1896. Th. Ackermann. 123 S.

Die zweite und dritte Auflage unterscheiden sich von der ersten durch die den einzelnen Abschnitten beigefügten Übungsbeispiele. Die dritte Auflage ist ein unveränderter Abdruck der zweiten.

E. Jahnke.

Lehrbuch der Geometrie. Von F. Meigen. Hildburghausen 1896. O. Pezoldt. 82 S.

Der Verfasser giebt die Hauptsätze der elementaren Geometrie in ansprechender Darstellung. Die Anschauung und Bewegung werden ausgiebig als Beweismittel herangezogen. Recht hübsch ist der Abschnitt über die Parallelen. Das Kapitel über das gleichschenklige Dreieck würde durch Einführung des Begriffs „Symmetrieaxe" an Einfachheit gewinnen, auch könnte der Abschnitt über die Ähnlichkeit von Dreiecken bedeutend gekürzt werden. Im grossen und ganzen aber kann das Buch, welches als viertes Heft der mathematischen Abteilung einer Sammlung „Technische Lehrhefte" erschienen ist, nur bestens empfohlen werden.

E. Jahnke.

Lehrbuch der Trigonometrie. Von F. Meigen. Hildburghausen 1896. O. Pezoldt. 59 S.

In diesem fünften Heft der mathematischen Abteilung der „Technischen Lehrhefte" werden die wichtigeren Abschnitte der Trigonometrie in passender Form behandelt. Den grössten Raum beansprucht die Berechnung des rechtwinkligen und schiefwinkligen Dreiecks. Die zahlreichen, durchgerechneten Beispiele sind grösstenteils der Bau- und Maschinenkunde, der praktischen Geometrie und Mechanik entnommen. Dabei ist der Hauptwert auf die Berechnung mit Hilfe der Funktionen selbst gelegt, während Logarithmen nur bei der Anwendung der Tangentenformel und bei der Berechnung eines Dreiecks aus den drei Seiten benutzt werden.

Das Buch dürfte auch an höheren Schulen wegen der vielen praktischen Beispiele mit Vorteil Verwendung finden.

E. Jahnke.

Ebene Geometrie. Von G. Recknagel. Lehrbuch mit systematisch geordneter Aufgabensammlung für Schulen und zum Selbststudium. Fünfte Auflage. München 1896. Th. Ackermann. 222 S.

Vom methodischen Standpunkt aus betrachtet bietet das Lehrbuch keinen Fortschritt. Soll es, wie Überschrift und Vorrede verraten, in erster Linie für den Schüler bestimmt sein, so wäre eine erhöhte Übersicht und knappere Ausdrucksweise wünschenswert.

Im einzelnen fiel dem Referenten auf, dass der Verfasser die Anwendung der Bildungen „Inkreis" und „Umkreis" vermeidet, ferner dass

er an mehreren Stellen schreibt: „das Eck eines Vielecks". Der Abschnitt, welcher von der Berechnung der Peripherie des Einheitskreises handelt, beginnt mit den Worten: „Es ist bisher nicht gelungen, die Maßzahl dieser Peripherie in geschlossener Form, d. h. als Resultat einer endlichen Zahlenverbindung darzustellen." In einer Anmerkung heisst es dann weiter: „π ist später ohne Nutzen bis auf 140 Stellen genau berechnet worden."

Dagegen möchte Referent den dritten Anhang lobend hervorheben, wo der Verfasser isoperimetrische Sätze in Legendrescher Weise behandelt und eine Reihe historischer Notizen beifügt. Leider fehlen letztere bei Abschnitt 161, 173, 174, 175, 176.

E. Jahnke.

Zur Auflösung der allgemeinen Gleichung des dritten Grades. Von E. Grohmann. Wien 1895. A. Hölder.

Es ist ein Versuch, für die kubische Gleichung eine Auflösungsmethode zu finden, welche praktisch schneller zum Ziele führt als die üblichen Methoden.

In dem irreduziblen Fall treten von goniometrischen Funktionen nur die Tangente auf.

E. Jahnke.

E. Rouché et Ch. de Comberousse. **Leçons de Géométrie** rédigées suivant les derniers programmes officiels et accompagnées, pour chaque leçon, d'exercices et de problèmes gradués. Première partie. Paris 1896. Gauthier-Villars. 173 p.

E. Rouché et Ch. de Comberousse. **Solutions détaillées des exercices et problèmes énoncés dans les Leçons de Géométrie.** Première partie. Paris 1896. Gauthier-Villars. 168 p.

Dieses Lehrbuch für Geometrie besteht aus vier Teilen, von denen uns der erste, „La ligne droite et la circonférence de cercle" überschrieben, vorliegt. In dreissig Lektionen wird ungefähr das geometrische Pensum der Quarta und Untertertia unserer höheren Schulen erledigt. Es braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden, dass die Darstellung der Verfasser der „Eléments de géométrie" sich durch Klarheit und Eleganz auszeichnet, und dass die jeder Lektion beigefügten Lehrsätze und Aufgaben geschickt ausgewählt sind. Sehr hübsch ist u. a. die 16. Lektion, welche von der Symmetrie der Figuren handelt, nebst den angehängten Übungsaufgaben.

Gesondert hiervon haben die Verfasser die Lösungen zu den Übungsaufgaben herausgegeben, indem sie je nach der Schwierigkeit der Frage die Lösung nur kurz angedeutet oder ausführlich mitgeteilt haben.

E. Jahnke.

Die elementare systematische und darstellende Geometrie der Ebene in der Mittelschule. Von K. Fink. Erster und zweiter Kurs für die Hand des Lehrers bearbeitet. 151 S.

Sammlung von Sätzen und Aufgaben zur systematischen und darstellenden Geometrie der Ebene in der Mittelschule. Von K. Fink.

Erster und zweiter Kurs für die Hand des Schülers bearbeitet. Mit zehn Figurentafeln und 84 Blättern für die darstellend-geometr. Übungen. Tübingen 1896, H. Laupp. 108 S. Mk. 1.60 und Mk. 2.80.

Der Verfasser ist der Ansicht, dass im geometrischen Unterricht auf die darstellende Geometrie mehr Gewicht als bisher gelegt werden müsse. Diesen Zweck will er einmal durch Modelle erreichen, zu deren Anfertigung der Schüler heranzuziehen sei, zweitens durch die dem Buche beigegebenen Blätter, welche er als Vorlagen für die Ausführungen der darstellenden Geometrie durch den Schüler betrachtet wissen will.

Im ersten „Kurs" werden die Elemente des Raumes, die Bewegungsfähigkeit der Figuren, die zentrale und axiale Symmetrie, die parallele Gerade, das Parallelverschieben, Drehen und Umklappen einer Figur, das Dreieck, Viereck und der Kreis, im zweiten „Kurs" die Euklidischen Axiome und Beweisformen, die Ähnlichkeit der Figuren, der Ähnlichkeitspunkt, die Kreisberechnung, die Sätze des Ceva und Menelaus, die harmonischen Elemente am vollständigen Viereck und Vierseit, Ähnlichkeitsaxen und Ähnlichkeitszentren bei drei Kreisen, die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis und das Taktionsproblem behandelt.

Ein erster Anhang enthält einen kurzen Abriss der historischen Entwickelung der Elementargeometrie (S. 108—131), ein zweiter ein Begleitwort für die Blättersammlung, wo die Ausführung in Farben empfohlen wird. So giebt Blatt 84 eine vielfarbige Darstellung der zwölf Potenzlinien dreier Kreise.

Ist auch vieles von dem, was der Verfasser als neu eingeführt wissen will, mit gutem Erfolg schon anderswo thatsächlich zur Ausführung gelangt, so dürften die Bücher doch dem einen oder anderen Fachgenossen mannigfache Anregungen bieten.

E. Jahnke.

Die analytische Form der Blätter. Von B. Habenicht. Mit 148 Figuren. Quedlinburg 1895. Selbstverlag. 18 S. Mk. 2.

Es ist ein interessanter Versuch, die analytische Form der Blätter zu bestimmen, den der Verfasser angestellt hat, um daraus Schlüsse auf die treibenden Kräfte zu ziehen. „Wie nämlich aus der mathematisch bestimmten Bahn eines Körpers auf die treibenden Kräfte geschlossen wird, so müssen diese auch aus der analytisch festgelegten Blattform zu entwickeln sein." Nun, bei einem Versuche, dieses Problem anzugreifen, würde der Verfasser vermutlich auf grosse Schwierigkeiten stossen

Unter den Blättern, deren analytischer Ausdruck mitgeteilt wird, seien folgende hervorgehoben:

Das Blatt vom Sauerklee:

$$r = 4(1 + \cos 3\varphi) + 4\sin^2 3\varphi,$$

das Blatt vom Steinklee:

$$r = 4(1 + \cos 3\varphi) - 4\sin^2 3\varphi,$$

das Blatt der Rosskastanie:

$$r = 2(\cos\varphi + \sqrt{3 + \cos^2\varphi}) - 6\sin^2\frac{7\varphi}{2} - 0{,}3\sin^2 60\varphi,$$

das Blatt des Epheus:

$$r = 3(1 + \cos^9\varphi) + 2\cos\varphi + \sin^2\varphi - 2\sin^2 3\varphi\cos^4\frac{\varphi}{2},$$

das Blatt des spitzblättrigen Ahorns:

$$r = 10\sqrt{1 + \cos\varphi} - 5\left(1 + \sin^2\frac{11\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}\right) + 2\sin^2 11\varphi\cos^4\frac{\varphi}{2}.$$

E. JAHNKE.

Der verjüngte Magister Matheseos. Von K. TRAUB. Ein Beitrag zur Sphärik und absoluten Geometrie. Lahr 1896, M. Schauenburg. 12 S.

Der Verfasser weist die Giltigkeit des Pythagoreischen Satzes in der Form: „Im rechtwinkligen Dreieck ist der Inhalt des Kreises, der mit der Hypotenuse als Radius beschrieben wird, das arithmetische Mittel aus den zwei Kreisen, welche bezüglich mit Summe und Differenz der Katheten als Radien konstruiert werden", auch für die Sphärik und absolute Geometrie nach.

Referent erlaubt sich den Herrn Verfasser auf V. Schlegel, Der Pythagoreische Lehrsatz in mehrdimensionalen Räumen. From the Congress Mathematical Papers, aufmerksam machen.

E. JAHNKE.

Praktische Geometrie auf dem Gymnasium. Von G. DEGENHARDT. Frankfurt a. M. 1896, Chr. Hermann. 30 S.

Es ist ein „Versuch, elementare Aufgaben aus der Feldmesskunde in den Gymnasialunterricht aufzunehmen, um durch dieselben namentlich in den Unter- und Mittelklassen des Gymnasiums eine Belebung des geometrischen Unterrichtes herbeizuführen. Wenn auch schon bisher hier und da die praktische Geometrie in der Schule Berücksichtigung gefunden haben dürfte, so fehlt es doch an einer Auswahl und Zusammenstellung des für das Gymnasium passenden Stoffes." Die hier gebotene Sammlung, der vier Figurentafeln angehängt sind, muss als recht brauchbar bezeichnet werden. Sie wird auch solchen Fachgenossen willkommen sein und manches Neue bieten, welche seit langem gewöhnt sind, Beispiele aus der praktischen Geometrie zur Belebung des geometrischen Unterrichts heranzuziehen. Die Mannigfaltigkeit der Aufgaben geht aus der beifolgenden Inhaltsübersicht hervor: Markieren und Messen von geraden Linien, Loten, Parallelen und Winkeln (Ohmanns Feld-Winkelmesser), Abstecken einer Geraden zwischen Hindernissen, Errichten von Loten und Dreiteilung des Winkels ohne Winkelinstrument, Anwendungen der Proportionalität von Linien, Flächenmessungen, Trigonometrische Aufgaben, Nivellierung, Meßtischaufnahme, Aufzeichnen von Plänen im verjüngten Maßstabe, Spiegelsextant, Vermessung in Stadt, Provinz und Staat.

Referent erlaubt sich, den Herrn Verfasser auf die Martussche Sammlung trigonometrischer Vermessungsaufgaben aufmerksam zu machen.

E. JAHNKE.

Zur Theorie der reellen Kurven einer rationalen Funktion n^{ten} Grades für komplexe Variable. Von H. Suhle. XIV. Jahresbericht des Herzoglichen Friedrichs-Realgymnasiums. Dessau 1896. C. Dünnhaupt. 16 S.

Die vorliegende Arbeit bildet eine Ergänzung und Fortsetzung von früheren Programmabhandlungen desselben Verfassers aus den Jahren 1893, 1894.

Macht man in der Gleichung:

$$z = u^n + a_1 u^{n-1} + \cdots + a_n$$

die Substitution:

$$u = x + iy,$$

so möge

$$z = U(x, y) + i\,V(x, y)$$

werden. Dann betrachtet der Verfasser einerseits die Flächen

$$z = U(x, y) \quad \text{und} \quad z = V(x, y),$$

anderseits die reellen Kurven:

$$z = U(x, y), \quad V(x, y) = 0.$$

Der erste und zweite Abschnitt handeln von den Asymptoten der zur Fläche $U(x, y)$ bezw. $V(x, y)$ gehörigen Niveaulinien n^{ten} Grades, der dritte von den Beziehungen der reellen Nebenkurven zu den Asymptoten der Niveaulinien jener Flächen und der vierte von dem reellen Kurvensystem der Funktion:

$$z = (x + iy)^n$$

und der geometrischen Darstellung der n^{ten} Einheitswurzeln.

Die ersten Abschnitte dürften an Übersicht und Einfachheit gewinnen, wenn von vornherein in

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

der zweite Term durch die Substitution:

$$x' = x + \frac{a_1}{n}$$

zum Verschwinden gebracht wird. Das Gleiche gilt vom vierten Abschnitt, wenn von vornherein Polarkoordinaten eingeführt werden.

E. Jahnke.

Leçons de cinématique professées à la Sorbonne par Gabriel Koenigs, avec des notes par M. G. Darboux et par MM. E. et F. Cosserat. Erster Teil: Cinématique théorique. Paris 1897. A. Hermann. X und 499 S.

Die Kinematik, d. i. die Lehre von der Bewegung ohne Rücksicht auf die wirkenden Kräfte, hat in den letzten Jahren von verschiedenen Gesichtspunkten aus eine Reihe hervorragender Bearbeitungen gefunden. Die Werke von Schoenflies und Mannheim untersuchen auf synthetischem Wege und ohne Benutzung des Zeitbegriffs die Eigenschaften der durch

Bewegung erzeugten Raumgebilde. In Verbindung mit dieser reinen „Geometrie der Bewegung" wird z. B. in Schells „Theorie der Bewegung und der Kräfte" auch der Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand, und zwar teilweise analytisch, behandelt, und damit erscheint, obwohl nur in der Rolle einer Hilfsvariabeln, die Zeit als ein der Geometrie fremdes Element. Auch in Burmesters noch unvollendetem Lehrbuche begegnen wir den Geschwindigkeiten als einem viel gebrauchten Hilfsmittel zur Lösung geometrischer Aufgaben; hier wird ausserdem das Forschungsgebiet durch Heranziehung von Problemen der Maschinentechnik beträchtlich erweitert.

Gegenüber der anfangs erwähnten streng geometrischen Auffassung bilden in den vorliegenden Vorlesungen über Kinematik die Formeln für die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen die eigentliche Grundlage und somit auch die Quelle für die geometrischen Eigenschaften der von dem bewegten System erzeugten Linien und Flächen. In der völlig folgerichtigen und einheitlichen Durchführung dieses Standpunktes, sowie in der vorwiegend analytischen Darstellung erblicken wir die charakteristische Eigenart des reichhaltigen Werkes, das wir als eine wertvolle und willkommene Ergänzung der kinematischen Litteratur begrüssen. In Anordnung und Behandlungsweise des vorgetragenen Lehrstoffes steht es in seinen ersten zehn Kapiteln dem Buche Schells verhältnismässig am nächsten, wenn es auch in seinen Ergebnissen über dieses häufig hinausgeht.

Die folgende Übersicht versucht den wesentlichen Inhalt in kurzen Zügen zu kennzeichnen, ohne bei der Fülle des vorhandenen Stoffes auf Vollständigkeit irgendwie Anspruch zu erheben.

Im ersten vorbereitenden Kapitel entwickelt der Verfasser im Anschluss an Möbius und Chasles die Geometrie der Streckensysteme, ungefähr in demselben Umfange wie in der zweiten Auflage des Schellschen Werkes, aber in vielfach selbständiger Gestaltung.

Das zweite Kapitel enthält die Definitionen der Geschwindigkeit und der Beschleunigung eines Punktes (Formeln für krummlinige Koordinaten etc.). Das dritte handelt von der relativen Bewegung und der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten und giebt u. a. die wichtigen Formeln für die Projektionen der Geschwindigkeit auf die Axen des bewegten Koordinatensystems. In der Anwendung solcher Koordinatensysteme, deren Axen nach dem von Darboux gegebenen Vorbilde in jedem einzelnen Falle passend gewählt werden, erkennt der Verfasser das sicherste und bequemste Werkzeug der kinematischen Untersuchung, und er macht davon in den folgenden Kapiteln ausgiebigen Gebrauch.

Im vierten Kapitel wird der Fundamentalsatz über die momentane Bewegung eines starren Körpers in eigenartiger Weise abgeleitet: Aus den im vorigen Kapitel erhaltenen Formeln folgt zunächst, dass zu jeder Lage des bewegten Körpers ein Streckensystem gehört, dessen Moment in Bezug auf irgend einen Punkt des Körpers die augenblickliche Geschwindigkeit des Punktes darstellt. Dieses Streckensystem kann in bestimmter Weise ersetzt werden durch eine Einzelstrecke und ein Streckenpaar, dessen Ebene auf

jener senkrecht steht. Die Einzelstrecke ist gleichbedeutend mit einer Drehung des Körpers um die durch die Strecke gehende Axe, und das Paar bewirkt eine Verschiebung parallel zu dieser Axe; der Körper vollführt also augenblicklich eine unendlich kleine Schraubenbewegung. Der so gefundene Satz wird nachträglich in herkömmlicher Weise geometrisch bewiesen; hieran schliessen sich die bekannten Eigenschaften über das Nullsystem, welches die Punkte des Körpers mit den Normalebenen ihrer Bahnkurven bilden etc.

Es folgt ein Kapitel über die Beschleunigung der relativen Bewegung (Formeln für die Projektionen der Beschleunigung auf die Axen des bewegten Koordinatensystems, Satz von Coriolis, Beschleunigungszustand eines starren Körpers).

Die beiden nächsten Kapitel beziehen sich auf die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene. Die allgemeinen Formeln für die Geschwindigkeit der Systempunkte führen, angewendet auf den speziellen Fall der ebenen Bewegung, zur Auffindung des Pols und der Rollkurven; die entsprechenden Formeln für die Beschleunigung liefert die Savary (Euler)sche Gleichung für die Krümmungsmittelpunkte der von den Systempunkten erzeugten Bahnkurven. Auf S. 152 begegnen wir der etwas voreiligen Behauptung, dass ein gewisser Systempunkt momentan eine Inflexionsstelle beschreibt, weil der zugehörige Krümmungsmittelpunkt unendlich fern liegt. Dass ein bestimmter Punkt des Wendekreises in der Regel einen Undulationspunkt durchschreitet, bleibt unbeachtet; dann wird natürlich auch auf die Punkte stationärer Krümmung und verwandte Dinge nicht eingegangen. — Der Verfasser betrachtet (S. 154) den singulären Fall, dass die Rollkurven einander oskulieren, aber die schönen und wesentlich allgemeineren Untersuchungen von Mehmke im 35. Bande dieser Zeitschrift finden hierbei keine Erwähnung. Die auf S. 163 angegebene Einteilung der cyklischen Kurven ist nicht ganz zutreffend; hier fehlt der Satz von der doppelten Erzeugungsweise dieser Kurven. Auf S. 167 finden wir die Aufgabe, für einen beliebigen Systempunkt den Krümmungsmittelpunkt seiner Bahnkurve zu konstruieren, wenn zu zwei anderen Systempunkten die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte gegeben sind. Die mitgeteilte Lösung, bei welcher zunächst der Wendepol bestimmt wird, erscheint uns umständlicher als die bekannte Bobilliersche Konstruktion. — Recht ansprechend ist dagegen am Schlusse des 7. Kapitels der Abschnitt über den Inhalt der Flächenstücke, die von einer starren oder veränderlichen Strecke bestrichen werden.

Das achte Kapitel giebt die bekannten Sätze und Formeln über die sphärische Bewegung; das neunte nimmt die im vierten Kapitel abgebrochene Betrachtung wieder auf und beschäftigt sich mit der allgemeinsten Bewegung eines starren räumlichen Systems, dargestellt durch das Rollen und Gleiten zweier geradlinigen Flächen. Besondere Beachtung verdienen die Abschnitte über solche Systemkurven, die eine Hüllbahnkurve besitzen, sowie über zwei Sonderfälle der allgemeinen Bewegung: Im ersten sind die

windschiefen Axenflächen aufeinander abwickelbar, im zweiten sind sie abwickelbare Flächen, deren Rückkehrkanten einander beständig berühren.

Das zehnte Kapitel handelt von den Graden der Bewegungsfreiheit. Wir heben hervor die allgemeinen Untersuchungen über die Bewegung eines starren Körpers, dessen Freiheit grösser ist als Eins.

Die beiden letzten Kapitel stehen mit den vorhergehenden in loserem Zusammenhang. Das elfte — das umfangreichste von allen — ist den Gelenkmechanismen gewidmet. Es umfasst das Gelenkviereck — jedoch ohne die allgemeine Theorie der Koppelkurve — die Mechanismen zur Umwandlung einer Bewegung in eine gesetzmässig entsprechende, die angenäherten Geradführungen von Watt und Evans, Mechanismen zur genauen Geradführung, sowie einige unebene Gelenkmechanismen. Der Kempesche Satz, nach welchem jede ebene algebraische Kurve durch einen Gelenkmechanismus erzeugt werden kann, wird dahin erweitert, dass überhaupt jede algebraische Verbindung zwischen n gegebenen Punkten im Raume sich durch einen solchen Mechanismus verwirklichen lässt.

Das zwölfte Kapitel betrachtet die komplane Bewegung eines starren ebenen Systems als speziellen Fall der Kollineationen einer Ebene in sich, sowie ihre Beziehungen zu den imaginären Kreispunkten der Ebene. Hieran schliessen sich die entsprechenden Untersuchungen über die Bewegung eines starren Körpers im Raume. Auf diese folgt endlich die analytische Darstellung der ebenen, sowie der sphärischen Bewegung durch lineare ganze, bez. gebrochene Substitutionen einer komplexen Variabeln, mit einem Hinweise auf die gruppentheoretische Auffassung.

Die Zusätze von Darboux (47 S.) betreffen:

1. eine neue Ableitung der Transformationsformeln von Euler und Ol. Rodriques (Kap. 8),
2. die Lehre von den Umwendungen und ebenen Spiegelungen, angewendet auf den Fundamentalsatz von der Momentanbewegung eines starren Körpers (Kap. 4),
3. eine inhaltreiche Untersuchung über algebraische Bewegungen.

Als Beitrag von E und F. Cosserat finden wir eine anziehende Arbeit über die Kinematik eines kontinuierlichen (veränderlichen) Mittels (27 S.).

Den Schluss des Werkes bildet eine Reihe von Anmerkungen des Verfassers, in denen einzelne Abschnitte weiter ausgeführt und gewisse Nachbargebiete, wie Balls Schraubentheorie und Hamiltons Quaternionen kurz gestreift werden (71 S.). In der siebenten Anmerkung (S. 446) scheint ein Irrtum vorzuliegen, wenn bezüglich des Beschleunigungszustandes eines starren Körpers auf Schoenflies „Geometrie der Bewegung“ verwiesen wird. Übrigens sind auch an einigen anderen Stellen die Litteraturangaben recht unbestimmt, z. B. S. 13:

> „On pourra consulter à ce sujet un Mémoire de M. Lindemann inséré dans les Mathematische Annalen.“

Die Darstellung ist in dem ganzen Werke klar und leicht fasslich, dabei anregend und geschmackvoll. Dem Erscheinen des zweiten Bandes, der die Anwendungen der Kinematik enthalten soll, sehen wir mit berechtigter Spannung entgegen.

R. MÜLLER.

Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen. Von C. NEUMANN. Leipzig 1896, B. G. Teubner.

Die C. Neumannschen Bücher zeichnen sich bekanntlich, trotzdem sie zumeist eigene Untersuchungen des Verfassers behandeln, durch eine klare und ausführliche (für manche Leser fast zu ausführliche) Exposition aus. Dies gilt insbesondere auch von den Vorreden, in denen der Verfasser die Stellung seiner Untersuchungen gegenüber den verwandten anderer Forscher mit aller Freimütigkeit fixiert, es aber auch nicht verschmäht, die Tragweite und den Giltigkeitsbereich seiner Sätze und Methoden einer unparteiischen Selbstkritik zu unterziehen. Damit sind dem Rezensenten schon im voraus, so zu sagen, die Waffen aus den Händen gewunden, und er darf sich im wesentlichen darauf beschränken, das Positive und Neue zu betonen.

Von Green stammt eine merkwürdige Arbeit aus dem Jahre 1832 in der an die Stelle der Newtonschen Potentialfunktion

$$\varphi(r) = \frac{1}{r}$$

die allgemeinere

$$\psi(r) = r^{p-2} \, (0 \leqq p < 1)$$

gesetzt wird. Das auffallendste (wenigstens implizite bei Green vorkommende) Resultat dieser Substitution ist, dass die elektrische Verteilung in einer isolierten Metallkugel — im Gegensatz zu der Newtonschen Theorie — in einer räumlichen Ausbreitung der elektrischen Materie im Innenraum der Kugel besteht, ohne dass dabei noch eine besondere Oberflächenbelegung vorhanden wäre. Nähert sich p der Einheit, so wird sich die räumliche Ausbreitung der elektrischen Materie in der Nähe der Oberfläche mehr und mehr verdichten. Nähme man also p nur wenig von der Einheit verschieden an, so würde man zu einer Theorie gelangen, die von der gewöhnlichen Theorie nur äusserst wenig abweicht, den Beobachtungserfahrungen gut entspricht, und dabei doch jene unendlich dünne Ausbreitung einer Schicht auf der Kugeloberfläche vermeidet, die von jeher auf mehr oder weniger Misstrauen gestossen ist.

Die Schwierigkeiten, mit denen Green bei der näheren Untersuchung der Potentialfunktion

$$\psi(r) = r^{p-2}$$

zu kämpfen hatte, scheinen zuerst Herrn C. Neumann veranlasst zu haben, die Greensche Funktion $\psi(r)$ wiederum als Grenzfall einer noch allgemeineren Funktion $\Phi(r)$ anzusehen, um auf diese Weise die neue Theorie von all dem Fremdartigen, was ihr anhaftete, zu befreien, und ihren Horizont zu erweitern.

Es lässt sich nämlich das Produkt aus r^{p-2} und r mit Hilfe von Integralbetrachtungen (S. 86) in eine Reihe nach Exponentialfunktionen entwickeln, wie folgt:

$$1) \qquad r \cdot r^{p-2} = A_1 e^{-\alpha_1 r} + A_2 e^{-\alpha_2 r} + A_3 e^{-\alpha_3 r} + \cdots,$$

wo die α, wie die A alle reell und positiv sind.

Der Gedanke, durch Einführung derartiger Exponentialfunktionen die gewöhnliche Potentialtheorie zu modifizieren, findet sich, wie es scheint, zuerst bei Laplace (S. 114). An einer klassischen Stelle seiner Mécanique celeste ändert Laplace den Newtonschen Ausdruck $\frac{m_1 m_2}{r^2}$ (für die Kraft, mit der zwei Massenpunkte m_1, m_2 im Abstande r aufeinander wirken) dahin ab, dass er noch den verkleinernden Faktor $e^{-\alpha r}$ (α positiv) hinzufügt. Nach einer wichtigen, neueren Beobachtung von Seeliger scheint diese Laplacesche Korrektion in der That geeignet, eine gewisse, schon von Leverrier untersuchte Vorwärtsbewegung des Perihels des Merkur zu erklären.

Aus diesen wenigen Bruchstücken hat der Verfasser eine ganze, umfassende Theorie geschaffen, indem er eine Potentialfunktion $\Phi(r)$ nach Analogie von 1), nur in Form einer endlichen Reihe:

$$2) \qquad \Phi(r) = \sum \frac{A_i e^{-\alpha_i r}}{r} \quad (A_i, \alpha_i \text{ reell und positiv})$$

zu Grunde legt.

Unzweifelhaft liegt zunächst in dem Ansatze 2) eine gewisse Willkür; man wird fragen, welche Vorzüge, oder gar welche innere Notwendigkeit der Ansatz 2) gegenüber anderen aufweist, und in zweiter Linie, wenn die Vorteile der Form $\Phi(r)$ wirklich zu Tage liegen sollten, welche physikalische Bedeutung die über die Konstanten A, α getroffenen Festsetzungen besitzen?

Der Verfasser hat das elektrische Gebiet als Ausgangspunkt gewählt und hat hier nach einem Prinzip oder Axiom gesucht, welches sich gegenüber allen Abänderungen der Newtonschen Potentialfunktion

$$\varphi(r) = \frac{1}{r}$$

invariant verhielte.

Nun wird allgemein zugegeben, dass man aus der Annahme der Form

$$\varphi(r) = \frac{1}{r}$$

die Existenz eines elektrostatischen Gleichgewichtszustandes (für ein beliebiges System elektrisch geladener Konduktoren) einwandsfrei herleiten kann. Da auch von physikalischer Seite her an der Vorstellung eines derartigen Gleichgewichtszustandes nichts wesentliches ausgesetzt wird, so hat der Verfasser dies „Prinzip des elektrostatischen Gleichgewichts“ zum Leitstern genommen.

Sollte man nun wirklich annehmen, dass das genannte Prinzip einen so bestimmenden Einfluss auf die Form einer im übrigen willkürlichen Potentialfunktion ausüben möchte?

Der Verfasser hat dies schwierige Problem zunächst von negativer Seite her in Angriff genommen und hat nach Beispielen von Potentialfunktionen gesucht, bei deren Annahme ein elektrischer Gleichgewichtszustand ausgeschlossen sei. Ein solches merkwürdiges Beispiel — und das scheint die primäre Entdeckung gewesen zu sein, die den Gang der weiteren Untersuchung veranlasst hat — bot sich ihm in der Funktion:

$$3)\qquad f(r) = \frac{1 - e^{-\alpha r}}{r},$$

wo die Konstante α positiv und sehr gross sein soll.

Es sei eine isolierte Metallkugel mit der Elektrizitätsmenge $M = 1$ geladen, die man sich teils im Innern der Kugel, teils an ihrer Oberfläche beliebig verteilt denke. Das von dieser Verteilung auf irgend einen innern Punkt ausgeübte Potential V werde aufgestellt, sowie, nach Entwickelung von $f(r)$ nach Potenzen von α und r, die Ausdrücke ΔV und $\Delta\Delta V$.

Dann ergiebt sich die einfache Relation:

$$4)\qquad \Delta\Delta V - \alpha^2 \Delta V - 4\pi\alpha^2 \varepsilon = 0,$$

wo ε die (variable) räumliche Dichtigkeit bezeichne.

Lässt man nunmehr noch die — allerdings wesentlich beschränkende — Voraussetzung Platz greifen, dass der der Zeit $t = 0$ entsprechende Anfangszustand in Bezug auf das Kugelzentrum symmetrisch sei, so folgt aus 4), mit Rücksicht auf frühere, von Laplace und Bertrand herrührende Sätze, dass die Elektrizität der Kugel niemals zur Ruhe kommen kann, sondern sich in unaufhörlicher Bewegung (die sogar niemals stationär werden kann) befinden muss.

Und solcher Beispiele kann man leicht noch mehrere aufstellen.

Umgekehrt beweist nun der Verfasser in der That den Fundamentalsatz, dass alle mit dem Prinzip des elektrostatischen Gleichgewichtszustandes verträglichen Potentialfunktionen $\Phi(r)$ die Gestalt 2) besitzen müssen. Das ist sein „Exponentialgesetz“, das je nach der Anzahl der Glieder von $\Phi(r)$ ein eingliedriges, zweigliedriges u. s. f. heisst.

Die Hauptformeln dieser allgemeinen Potentialtheorie haben eine weitgehende Analogie mit denen der gewöhnlichen Theorie; die Laplacesche Gleichung $\Delta V = 0$ nimmt jedoch eine wesentlich andere Gestalt an, indem z. B. für das eingliedrige Exponentialgesetz $\Phi(r) = \frac{e^{-\alpha r}}{r}$ gilt:

$$5)\qquad \Delta V = \alpha^2 V.$$

Wirken auf einen isolierten Konduktor elektrische Massen von aussen her, so ist im Gleichgewichtszustande neben einer elektrischen Oberflächenbelegung noch eine räumliche Ausbreitung der Elektrizität im Innern des Konduktors vorhanden, die ein einfaches Gesetz befolgt.

Der oben berührte singuläre Vorteil des Greenschen Grenzfalles 1) würde also damit im allgemeineren Falle wieder verloren gehen.

Besondere Beachtung verdient es, was übrigens nach anderen Erfahrungen zu erwarten war, dass sich der Beweis des sogenannten „Existenztheoremes" der Potentialtheorie, unter Zugrundelegung der C. Neumannschen Methode des arithmetischen Mittels, mit Hilfe von 5) weit einfacher und durchsichtiger führen lässt, als im extremen Falle der Newtonschen Potentialfunktion.

Bei allen diesen Untersuchungen war bisher stillschweigend, nach Newton, die Hypothese der momentanen Fernwirkung vorausgesetzt.

In einem kurzen, aber höchst interessanten Kapitel (Nr. VIII S. 222 bis 251) lässt der Verfasser jene Hypothese fallen, ohne übrigens von seinem Exponentialgesetz weiterhin Gebrauch zu machen.

Er denkt sich wiederum zwei Massenpunkte m, m_1, von denen der eine dem anderen zur Zeit t_0, wo sie den Abstand r_0 haben mögen, das gewöhnliche Potential $W = mm_1\varphi(r_0)$ „zusendet". Diese Zusendung soll aber, einer ersten Hypothese zufolge, einer gewissen, wenn auch sehr kleinen Zeit $t - t_0$ bedürfen, nach deren Ablauf die — in irgend welcher Bewegung befindlichen — Punkte die Entfernung r besitzen; zudem soll die Zusendung mit konstanter (sehr grosser) Geschwindigkeit erfolgen.

Der Verfasser macht dann die weitere Hypothese, das Potential W habe in Wirklichkeit die zur Zeit t vorhandene Entfernung r durchlaufen, wozu also die Zeit

$$t - t_0 = \frac{r}{c}$$

erforderlich sei.

Ob und inwieweit sich diese zweite Hypothese mit der ersten in Übereinstimmung befindet, mag dahingestellt sein.

Durch einfache Rechnung ergiebt sich so ein Ausdruck für W, der alsdann dem Hamiltonschen Prinzip — das der Verfasser als suprema lex hinstellt — unterworfen wird. Man kann auch sagen, dass der Ausdruck W nach den Koordinaten variiert werde, sodass W eigentlich den Namen eines „Variations-Potentials" verdiente (im Gegensatz zu dem gewöhnlichen „Differentiations-Potential").

Nimmt man noch im besonderen

$$\varphi(r) = \frac{1}{r},$$

so führt das angedeutete Verfahren auf den merkwürdigen Satz:

> „Die gegenseitige Einwirkung der beiden Punkte wird von solcher Art sein, als fände zwischen ihnen eine gewisse repulsive Kraft R statt. Diese Kraft R, die geradezu durch Variation von W entsteht, ist identisch mit der durch das Webersche Gesetz definierten Kraft:
>
> 6) $$R = \frac{mm_1}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}r'^2 + \frac{2r}{c^2}r''\right],$$
>
> falls man nur jene konstante Transmissionsgeschwindigkeit c als identisch sich denkt mit der Weberschen Konstanten c."

Alsdann lässt sich auch ein Theorem der lebendigen Kraft aufstellen, das dem gewöhnlichen nahe verwandt ist.

Danach wäre es sehr wahrscheinlich, dass in den Fällen, wo Kräfte ein gewöhnliches Potential nicht besitzen, wenigstens ein derartiges „Variationspotential" existiert, dessen innerer Grund eben durch die Hypothese einer zeitlichen Transmission der Kräfte aufgedeckt sein würde.

Für weitere Forschungen wäre damit ein weites Feld eröffnet.

W. Franz Meyer.

Bibliographie

vom 13. Januar bis 14. April 1898.

Periodische Schriften.

Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1896, dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 52. Jahrg. 2. Abt. Physik des Äthers. Red. von Rich. Börnstein. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 30.

—— im Jahre 1892, dargestellt von d. physikal. Gesellschaft zu Berlin. 48. Jahrg. 3. Abt. Kosm. Physik, red. v. Rich. Assmann. Braunschweig, Ebenda. M. 25.

—— 48 Jahrg. 1. Abt. Physik der Materie, red. v. Rich. Börnstein. Ebenda. M. 20.

Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorol. Instituts. Herausgegeben durch Dir. Wilh. v. Bezold. 1897. 1. Heft. Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. u. III. Ordnung i. Jahre 1897, zugleich deutsches meteorol. Jahrbuch für 1897. Beobachtungssystem des Königreich Preussen und benachbarter Staaten. Berlin, Asher & Co. M. 3.

—— d. hydrogr. Amtes d. k. u. k. Kriegsmarine in Pola. Nr. 1-4. Wien, Gerold & Co.

1. Gruppe II. Jahrbuch der meteorologischen u. erdmagnetischen Beobachtungen des Jahres 1896. M. 6.
2. Gruppe III. Relative Schwerebestimmungen durch Pendelbeobachtungen. 1. Heft. Beobachtungen in d. Jahren 1893—1896. M. 3.
3. Gruppe IV. Erdmagn. Reise-Beobacht. 1. Heft. 1895/96. M. 2.
4. Gruppe V. 1. Heft. Gareis, Ant., Geschichtliche Darstellung der Entwickelung des kaiserl. u. königl. hydrograph. Amtes. M. 2.

Annalen d. schweizer. meteorol. Centralanstalt. Zürich 1895. Fäsi & Beer. M. 18.

Publikationen des astrophysikal. Observatoriums zu Potsdam. Nr. 37. 11. Bd. 4. Stück. Wilsing, J., Beobachtungen veränderlicher Sterne in den Jahren 1881—1885. Leipzig, Engelmann. M. 3.

—— Nr. 38. 11. Bd. 5. Stück. Müller, G. und Kempf, P., Untersuchungen über die Absorption des Sternenlichts in der Erdatmosphäre, angestellt auf dem Ätna und in Catania. Ebenda. M. 4.

Abhandlungen d. königl. sächs. Gesellsch. d. Wissenschaften. Mathem.-physikal. Klasse. 24. Bd. Nr. II. Wundt, Wilh., Die geometr.-optisch. Täuschungen. Leipzig, B. G. Teubner. M. 5.

—— 24. Bd. Nr. III, Peter, Bruno, Beobacht. am sechszölligen Repsoldschen Heliometer der Leipziger Sternwarte. II. Abhandlg. Ebenda. M. 5.

Jahrbuch, Berliner astron. für 1900 mit Angaben f. die Oppositionen d. Planeten (1)—(422) für 1898. Herausgeg. von dem königl. astron. Recheninstitut unter Leitung von J. Bauschinger. Berlin, Dümmler. M. 12.

Gezeitentafeln für das Jahr 1899. Herausgegeben vom Reichsmarineamt. Berlin, Mittler & Sohn. M. 1. 50.

Förster, W. u. Lehmann, P., Die veränderl. Tafeln d. astronom. u. chronolog. Teils des königl. preuss. Normalkalenders für 1899. Nebst einem allgem. stat. Beitrage von E. Blenck. Berlin, Verlag d. königl. stat. Bureaus. M. 5.

Verhandlungen d. Gesellsch. deutscher Naturforscher u. Ärzte. 68. Versammlung zu Frankfurt a. M. 1896. 1. Naturw. Abhandlungen. Leipzig, Vogel. M. 5.

Bibliotheca mathematica. Zeitschr. f. Gesch. d. Mathem. Hrsg. v. Gust. Eneström. Generalreg. d. J. 1887-1896 (m. eingedr. Bildn.). Berlin, Mayer & Müller. M 4.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgeg. von Emil Lampe. 26. Bd. Jahrg. 1895. 3. (Schluss-) Heft. Berlin, Reimer. M. 11. 40.

Veröffentlichungen d. kgl. preuss. meteorol. Instituts. Hrsg. d. Wilh. v. Bezold. Ergebnisse der magn. Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1896 u. internationale magnet. Simultanbeobachtungen 1896. Berlin, Asher & Co. M. 6.

Arbeiten, astronom.-geodätische. Veröffentlichung der kgl. bayer. Kommission für die internationale Erdmessung. 2. Heft. München, Franz. M. 8. 60.

Jahrbuch der Astronomie u. Geophysik. Hrsg. v. Herm. J. Klein. 8. Jahrg. 1897. Leipzig, Mayer. kart. M. 7.

Sitzungsberichte, Münch., Mathem. Kl., 1897. 3. Heft. München, Franz. M. 1. 20.

Albrecht, Th., Bericht üb. d. Stand d. Erforsch. d. Breitenvariation i. Dezbr. 1897. Hrsg. vom Centralbureau der intern. Erdmessung. Berlin, Reimer. M. 3.

Arbeiten, astr., d. k. k. Gradmessungsb., 9. Bd. Längenbest. Leipz., Freytag. M. 16.

Ergebnisse d. meteorol. Beobacht. i. Systeme d. deutsch. Seewarte f. d. Dezennium 1886-1895. Hrsg. von d. Dir. d. Seew. Hamburg, Friederichsen & Co. M. 2.

Jahrbuch, deutsches meteorol., f. 1896. Beobachtungssyst. d. deutschen Seewarte. XIX. Jahrg. (21. Jahrg. d. meteorologischen Beobachtungen in Deutschland). Herausgegeben von der Direktion der Seewarte. Hamburg, Ebenda. M. 13.

Förster, W., u. E. Blenck, Populäre Mitteilungen zum astronom. u. chronol. Teile d. preuss. Normalkalenders f. 1899. Berlin, Verl. d. k. stat. Bureaus. M. 1.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Petri Philomeni de Dacia in algorismum vulgarem Joh. de Sacrobosco commentarius. Una cum algorismo ipso edidit et praefatus est Prof. Max. Curtze. Sumptibus societ. regiae scientiar. danicae. Kopenhagen, Höst & S. M. 2. 25.

Poggendorff, J. C., biogr.-litter. Handwörterbuch z. Gesch. d. exakten Wissenschaften. 3. Bd. (1858—1883). Herausgegeben von B. W. Feddersen und A. J. v. Oettingen. 14. u. 15. (Schluss-) Lieferg. Leipzig, Barth. à M. 3.

Graf, J. H., Der Mathematiker Jak. Steiner v. Utzendorf. Bern, Wyss. M. 1. 20.

Killing, Wilh., K. Weierstrass. Rektoratsrede. Münster, Aschendorff. M. —. 60.

Helm, G., Die Energetik n. ihrer gesch. Entwickelung. Leipzig, Veit & Co. M. 8. 60.

Lindemann, Ferd., Gedächnisr. a. Philipp Ludw. v. Seidel. München, Franz. M. 3.

Reine Mathematik.

Hammer, E., Lehrb. d. eb. u. sphär. Trigonom. 2. Aufl. Stuttgart, Metzler. M. 7. 40.

—— Der logarithm. Rechenschieber und sein Gebrauch. Ebenda. M. —. 40.

Czuber, Eman., Vorlesungen über Differential- und Integral-Rechnung. 1. Bd. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 12.

Schell, Wilh., Allgem. Theorie der Kurven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung. 2. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. M. 5.

Weber, Heinr., Lehrb. d. Algebra. 2. Aufl. 1. Bd. Braunschw., Vieweg & S. M. 10.

Döhlemann, Karl, Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung (Sammlung Göschen Nr. 72). Leipzig, Göschen. M. —. 80.
Schubert, Herm., Arithm. u. Algebra (S. Göschen Nr. 47). 2. Aufl. Ebenda. M. —. 80.
Killing, Wilh., Einf. in d. Grundl. d. Geom. 2. (Schl.-) Bd. Paderb., Schöningh M. 7.
Sailer, Engelb., Die Aufgaben aus d. Elem.-Mathematik, welche bei der Prüfung f. d. Lehramt d. Mathem. u. Physik an d. kgl. bayer. hum. u. techn. Unterr.-Anstalten i. d. J. 1873-1893 gestellt wurden. München, Ackermann. M. 3. 80.
Steiner's, Jac., Vorlesungen üb. synthet. Geometrie 2. T. Die Theorie d. Kegelschnitte, gestützt auf projektive Eigenschaften, bearb. von Heinr. Schröter. 3. Aufl. Durchgesehen von Rud. Sturm. Leipzig, B. G. Teubner. M. 14.
Diakow, G., Multiplikationstabelle (in russ., franz. und deutscher Sprache). St. Petersburg, Ricker. geb. M. 15.
Männchen, Phpp., Die Transformation der trilinearen ternären Form in eine teilweise symmetrische. Dissertation. Leipzig, B. G. Teubner. M. 1. 20.
Dölp, H., Aufgaben z. Differential- u. Integralrechn., nebst d. Resultaten u. d. z. Lösung nötig. theor. Erläut. 7. Aufl. Von E. Netto. Giessen, Ricker. geb. M. 4.

Angewandte Mathematik.

Weickert, A., u. Stolle, R., Prakt. Maschinenrechn. 3. Aufl. Berlin, Seydel. M. 3. 50.
Bortkewitsch, L. v., Das Gesetz der kl. Zahlen. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2.
Routh, Edward John, Die Dynamik d. Syst. starrer Körp. Deutsch v. Adf. Schepp. Mit e. Vorw. v. F. Klein. 1. Bd. Die Elemente. Leipz., B. G. Teubner. geb. M. 10.
Föppl, Aug., Vorles. üb. techn. Mechanik. 3. Bd. Festigkeitsl. Ebenda. geb. M. 12.
Lüling, E., Mathematische Tafeln für Markscheider u. Bergingenieure, sowie zum Gebrauche für Bergschulen. 4. Aufl. Berlin, Springer. geb. M. 6.
Möbius, A. F., Astronomie, Grösse, Beweg. u. Entfern. d. Himmelskörper (Samml. Göschen Nr. 11). 9. Aufl. Von Walt. F. Wislicenus. Leipz., Göschen. M. —. 80.
Becker, E., Tafeln z. Berechn. d. Präcession (Aus: Annalen der kaiserl. Univers.-Sternwarte in Strassburg. 2. Bd.). Karlsruhe, Braun. M. 5.

Physik und Meteorologie.

Neudrucke v. Schriften u. Kart. üb. Meteor. u. Erdmagn. Hrsg. v. G. Hellmann. Nr. 10. Magnet., rara. 1269-1599. P. de Maricourt. F. Falero. P. Nunes. J. de Castro. G. Hartmann. M. Cortés. G. Mercator. R. Norman. W. Borough. S. Stevin. M. 15. Nr. 11. J. H. Winkler. B. Franklin. T. F. Dalibard. L. G. Le Monnier: Über Luftelektrizität. 1746—1753. Asher & Co. M. 3. 50.
Landolt, H., Das opt. Drehungsverm. organ. Subst. u. d. prakt. Anwend., bearb. u. Mitwirk. von O. Schönrock u. a. 2. Aufl. Braunschw., Vieweg & S. geb. M. 18.
Ernecke, Erich, Über elektr. Wellen u. ihre Anwend. z. Demonstr. d. Telegraphie o. Draht n. Marconi. Experimentalvortr. 2. Abdr. Berlin, Gärtner. M. —. 80.
Hentze, Willy, Analyt. Berechnung elektr. Leitungen. Berlin, Springer. M. 3.
Maiss, Ed., Aufgaben über Wärme einschl. der mechan. Wärmetheorie u. der kinetischen Theorie der Gase. Wien, Pichler's Wwe. & Sohn. M. 2. 40.
Voigt, W., Die fund. phys. Eigensch. d. Kryst. in elem. Darst. Leipz., Veit & Co. M. 5.
Bebber, W. J. van, Die Wettervorhersage. 2. Aufl. Stuttgart, Encke. M. 5.
Lehmann, O., Die elektr. Lichterschein. od. Entlad., bez. als Glimmen, Büschel, Funken u. Lichtbogen, in fr. Luft u. in Vacuumröhren. Halle, Knapp. M. 20.
Maser, H., Die Phys. 4. H. (Haussch. d. W., H. 199). Neudamm, Neumann. M. —. 30.
Scheel, Karl, Über Fernthermometer. Halle, Marhold. M. 1

Historisch-litterarische Abteilung.

Preisaufgabe.

Die Fürstlich Jablonowskische Gesellschaft schlägt für das Jahr 1901 als Preisaufgabe vor:

Die Theorie der quadratischen Differentialformen in einem wesentlichen Punkte zu vervollkommnen.

Die Theorie der quadratischen Differentialformen, welche von Riemann angebahnt und namentlich von Christoffel und Lipschitz weitergeführt worden ist, hat durch neuere Untersuchungen in der Geometrie, der Dynamik und der Theorie der Transformationsgruppen eine erhebliche Bedeutung gewonnen, und jeder Fortschritt in jener Theorie würde auch hier einen Gewinn bedeuten. Indem die Gesellschaft wünscht, dass die Theorie der quadratischen Differentialformen in einem wesentlichen Punkte vervollständigt werde, lenkt sie die Aufmerksamkeit der Bewerber besonders auf die durch Lies Forschungen angeregte Frage nach der Natur und den Eigenschaften der Formen, welche kontinuierliche Gruppen von Transformationen gestatten. Für den Spezialfall $n = 3$ hat neuerdings Bianchi* wertvolle Beiträge geliefert: es ist zu hoffen, dass die Darstellung der Kriterien für die Zugehörigkeit einer gegebenen Form zu einem bestimmten Typus in invarianter Form gelingen, und dass das Studium der in den betreffenden Räumen herrschenden Geometrien sich als lohnend erweisen werde.

Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen einseitig geschrieben und paginiert, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Umschlage begleitet sein, welcher auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Jede Bewerbungsschrift muss auf dem Titelblatte die Angabe einer Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, dass sie nicht preiswürdig befunden wird,

* Memorie della Società Italiana delle Scienze, Ser. IIIa T. XI, 1897.

zurückzusenden ist. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November 1901, und die Zusendung ist an den derzeitigen Sekretär der Gesellschaft (für das Jahr 1898 Professor Dr. August Leskien, Stephanstrasse Nr. 10) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigentum der Gesellschaft.

W. Scheibner, Präs.

A. Leskien. E. Sievers. K. Lamprecht. H. Lipsius.
K. Bücher. F. Zirkel. W. Pfeffer. W. Hankel.

Rezensionen.

Zur Entdeckung des Elektromagnetismus. Abhandlungen von Hans Christian Örsted und Thomas Johann Seebeck (1820—1821). Herausgegeben von A. J. Öttingen. [Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 63.] Mit 30 Textfiguren. Leipzig 1895. Verlag von Wilhelm Engelmann. 83 S. Preis 1.40 M.

Die Örstedsche Abhandlung umfasst nur acht Seiten und führt den Titel: Versuche über die Wirkung des elektrischen Konflikts auf die Magnetnadel. Sie erschien in lateinischer Sprache und wurde von Gilbert ins Deutsche übersetzt.

Seebecks Arbeit lautet: Über den Magnetismus der galvanischen Kette und ist 65 Seiten gross. Sie verdankt ihre Entstehung zweien Vorlesungen.

Den Schluss bilden Anmerkungen, in welchen uns die beiden Gelehrten persönlich näher bekannt gemacht werden.

B. Nebel.

Über Faradays Kraftlinien. Von James Clerk Maxwell (1855—1856). Herausgegeben von L. Boltzmann. [Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 69.] Leipzig 1895. Verlag von Wilhelm Engelmann. 130 S. Preis 2 M.

Der Inhalt zerfällt in drei Teile, von denen der erste lautet: Anwendung auf statische Zustände und stationäre Strömung. Der zweite behandelt Faradays elektrotonischen Zustand, während der dritte eine Reihe von Beispielen mathematisch löst.

Die Anmerkungen erstrecken sich über 32 Seiten und lassen erkennen, wie sehr der Herausgeber bemüht ist, die knappe und deshalb schwer verständliche Ausdrucksweise Maxwells einem grösseren Leserkreis mund-

gerecht zu machen; denn nur auf solche Weise ist es möglich, die moderne Theorie über die Elektrizität rasch einzuführen und die alten, seit dem Aufschwung der Elektrotechnik nicht mehr ausreichenden Anschauungen zu verdrängen.

B. NEBEL.

Magnetische Polarisation der Metalle und Erze durch Temperatur-Differenz. Von TH. J. SEEBECK (1822—1823). Herausgegeben von A. J. VON ÖTTINGEN. [Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 70.] Mit 33 Figuren. Leipzig 1895. Verlag von Wilhelm Engelmann. 120 S. Preis 2 M.

Die vorliegende Arbeit Seebecks ist an Inhalt wichtiger, als die in Nr. 63 dieser Sammlung wiedergegebene. Jedoch ist es der Ausdrucksweise wegen nötig auch diese zu lesen. Da der Lebensgang des Autors in die Anmerkungen von Nr. 63 aufgenommen ist, so beziehen sich die jetzigen Zusätze lediglich auf die Abhandlung selbst, die einen Auszug aus vier Vorlesungen bildet.

B. NEBEL.

Chemische Analyse durch Spektralbeobachtungen. Von G. KIRCHHOFF und R. BUNSEN (1860). Herausgegeben von W. OSTWALD. [Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 72.] Mit 2 Tafeln und 7 Figuren im Text. Leipzig 1895. Verlag von Wilhelm Engelmann. 74 S. Preis 1.40 M.

In diesem Bändchen sind zwei Abhandlungen aus Poggendorffs Annalen abgedruckt, welche das Fundament der nunmehr unentbehrlich gewordenen Spektralanalyse bilden. Obwohl Text und Inhalt wesentlich von Bunsen herrühren, so wird das Verdienst Kirchhoffs bei dieser wichtigen Entdeckung keineswegs geschmälert. Der Herausgeber teilt in den Anmerkungen mit, wie Bunsen den Hergang der Entdeckung schildert, die namentlich der Chemie zu einem ungemein wichtigen Hilfsmittel geworden ist.

B. NEBEL.

Untersuchungen über die Gesetze der Verwandtschaft. Von CLAUDE LOUIS BERTHOLLET (1801). Herausgegeben von W. OSTWALD. [Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 74.] Leipzig 1896. Verlag von Wilhelm Engelmann. 113 S. Preis 1.80 M.

Wir haben es hier lediglich mit einem Neudruck einer im Jahre 1802 in Berlin erschienenen Übersetzung von Berthollets französischer Ausgabe zu thun. In den Anmerkungen wird zunächst der interessante Lebenslauf des Verfassers mitgeteilt, an den sich einige kritische Bemerkungen anschliessen.

B. NEBEL.

Abhandlung über die Herleitung aller kristallographischen Systeme mit ihren Unterabteilungen aus einem einzigen Prinzipe. Von AXEL GADOLIN (1867). Deutsch herausgegeben von P. GROTH. [Ostwalds

Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 75.] Mit 26 Textfiguren und 3 Tafeln. Leipzig 1896. Verlag von Wilhelm Engelmann. 92 S. Preis 1.50 M.

Gadolin führte auf Grund des von Hauy entdeckten Erfahrungsgesetzes der Rationalität der Indices, ohne irgend welche Annahme über die Molekularstruktur der Kristalle, den Nachweis, dass es nur 32 Klassen von Kristallen geben könne, die sich durch ihre ganz bestimmte Art der Symmetrie von einander unterscheiden. Zu dieser Erkenntnis kam schon 1830 der deutsche Mineralog Hessel. Seine Arbeit ist aber 60 Jahre lang nicht berücksichtigt worden. Die eleganteste Ableitung rührt doch von Gadolin her.

Hier zeigt sich wieder deutlich der Nutzen, welcher durch die Herausgabe dieser Sammlung von Klassikern der exakten Wissenschaften gestiftet wird. Werke, welche in einer dem Gelehrten nicht geläufigen Sprache und in einer dazu noch weniger verbreiteten Zeitschrift erschienen sind, kommen auf diese Weise in den Besitz der Allgemeinheit, wodurch auch das unabhängige Arbeiten über denselben Gegenstand vermieden wird.

B. Nebel.

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1893. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 49. Jahrgang:

Zweite Abteilung, enthaltend: Physik des Äthers. Redigiert von Richard Börnstein. Braunschweig 1895. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 900 S. Preis 30 M.

Dritte Abteilung, enthaltend: Kosmische Physik. Redigiert von Richard Assmann. Braunschweig 1895. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 727 S. Preis 25 M.

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1894. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 50. Jahrgang:

Erste Abteilung, enthaltend: Physik der Materie. Redigiert von Richard Börnstein. Braunschweig 1895. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 600 S. Preis 22.50 M.

Zweite Abteilung, enthaltend: Physik des Äthers. Redigiert von Richard Börnstein. Braunschweig 1896. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 853 S. Preis 30 M.

Dritte Abteilung, enthaltend: Kosmische Physik. Redigiert von Richard Assmann. Braunschweig 1895. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 716 S. Preis 25 M.

Über den Nutzen der Fortschritte der Physik für den thätigen Physiker zu sprechen, hiesse: Eulen nach Athen tragen. Aber gerade weil die Physiker zu thätig waren, so mangelte ihnen die Zeit, die Referate so schnell wie möglich zu liefern. Daher kam eine solche Verschleppung in dem Erscheinen der Bände, dass der Vorteil doch sehr fraglich erschien. Schon sahen Einige den Untergang, bis es der Tüchtigkeit zweier neuer Redakteure gelang, dass der 50. Band zum 50jährigen Jubiläum der Physi-

kalischen Gesellschaft erscheinen konnte, also die Zeit innehielt, welche von den Gründern als Ideal angesehen wurde. Dieses Ergebnis ist um so höher anzuschlagen, als auch die restierenden Jahrgänge noch in Angriff genommen werden mussten. Stolz können jene Männer auf ihre Thätigkeit zurückblicken, denn jetzt ist nur noch ein Jahrgang einzuholen, während die laufende Arbeit keine Verzögerung dadurch erleidet. In Kurzem wird alles normal gehen, und die Wiedergeburt ist glücklich vollzogen. Möge eine derartige Krisis nie mehr eintreten, damit auch der 100. Band dereinst rechtzeitig erscheinen kann!

B. Nebel.

Die Lehre von der Elektrizität von Gustav Wiedemann. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. Zugleich als vierte Auflage der Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. Dritter Band. Mit 320 eingedruckten Holzstichen. Braunschweig 1895. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 1139 S. Preis 28 M.

Die Gruppierung des Inhalts ist im grossen und ganzen dieselbe geblieben, wie in dem entsprechenden Bande der früheren Auflage; jedoch bemerkt man überall die unermüdliche Thätigkeit des Verfassers, dessen Streben es ist, dem Physiker ein Werk an die Hand zu geben, ohne das er nicht mehr erfolgreich arbeiten kann. Wiedemanns Lehre von der Elektrizität ist aber schon dem jüngsten Physiker derart bekannt, dass es nur eines Hinweises bedarf, dass wieder ein neuer Band erschienen sei. Es gehört ein immenser Bienenfleiss dazu, das täglich rasch anwachsende Material sorgfältig zu sammeln und es in solcher Weise zu vereinigen, dass es als Ganzes ein Bild liefert von dem Stande der Wissenschaft, dessen Grenze in dem vorliegenden Falle der Anfang des Jahres 1895 bildet. — Mögen auch die beiden letzten Bände in Bälde erscheinen!

B. Nebel.

Lehrbuch der Experimentalphysik von Adolph Wüllner. Fünfte vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. Zweiter Band: Die Lehre von der Wärme. Mit 131 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. Leipzig 1896, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 935 S.

Die elektromagnetische Lichttheorie gab die Veranlassung, in dem zweiten Band nunmehr die Wärmelehre zu behandeln, während die Lehre vom Lichte den vierten Band umfassen soll. — Begonnen wird die Lehre von der Wärme wieder mit der Thermometrie und der Ausdehnung der Körper durch die Wärme. Bei dieser Inhaltseinteilung war es erforderlich, die Temperaturmessungen mit Thermoströmen in diesen Band aufzunehmen, während die Thermoströme selbst erst im nächsten Band eingehender berücksichtigt werden. Die wichtigen Ergebnisse der experimentellen Erforschung der Gase sind voll gewürdigt worden. Da die Strahlung einen wesentlichen Teil der Optik ausmacht, so wurde in dem zweiten Kapitel nach Besprechung der Messinstrumente nur die Emission und Absorption

aufgenommen. Die mechanische Theorie der Wärme ist im wesentlichen unverändert geblieben. Obwohl die spezifische Wärme über ein reiches experimentelles Material zu verfügen hat, so sind die Schlüsse daraus noch nicht befriedigend. Von den grossen Errungenschaften auf dem Gebiete der physikalischen Chemie durch van t'Hoff und seine Mitarbeiter haben diejenigen Aufnahme gefunden, welche mehr die Physik streifen. So kommt es auch, dass die Wärmeentwicklung durch chemische Prozesse nicht auf Grund der neueren Untersuchungen behandelt wird, obwohl diese für den Chemiker so überaus fruchtbar geworden sind, sondern sich aufbaut auf die physikalischen Grundsätze, die ihre Entstehung den älteren Untersuchungen verdanken. Dieses Verfahren mag ja jetzt noch hingehen, bis die physikalische Chemie weiter ausgebaut ist. — Das Buch eignet sich insbesondere für den jungen Physiker, der sich im Laboratorium selbstständig machen will.

B. Nebel.

Lehrbuch der Experimentalphysik von E. von Lommel. Mit 430 Figuren im Text und einer Spektraltafel. Dritte Auflage. Leipzig 1896. Verlag von Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner). 556 S.

Die rasche Aufeinanderfolge der drei Auflagen spricht dafür, wie sehr es der Verfasser verstanden hat, ein Buch zu schaffen, welches den Bedürfnissen der Studierenden in jeder Hinsicht entspricht. Ein Grund zu wesentlichen Änderungen lag somit nicht vor, gleichwohl hat der Verfasser da und dort seine bessernde Hand angelegt. — Die seit dem Erscheinen der letzten Auflage erfolgte wichtige Entdeckung der Röntgen-Strahlen ist entsprechend berücksichtigt worden. Die Beigabe einer schönen Spektraltafel darf als besonders willkommen bezeichnet werden. — Auch diese Auflage begleite unser „Glück auf“!

B. Nebel.

Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik und Meteorologie. Neunte umgearbeitete und vermehrte Auflage von Leop. Pfaundler, unter Mitwirkung von Otto Lummer. In drei Bänden. Mit gegen 2000 Holzstichen, Tafeln, zum Teil in Farbendruck. Zweiter Band. Erste Abteilung. Zweite Lieferung. Braunschweig 1895. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 608 S. Preis 4.50 M.

Die vorliegende zweite Lieferung beginnt mit dem fünften Kapitel, der Spektralanalyse. In einem besonderen Kapitel werden die Umwandlungsprodukte oder Wirkungen des absorbierten Lichtes behandelt, also die Fluorescenz, Phosphorescenz und Photographie. Die Wellenlehre des Lichtes wird durch einen geschichtlichen Überblick eingeleitet, worauf dann zur Ableitung der Grundgesetze der geometrischen Optik übergegangen wird. Den centrierten optischen Systemen ist wegen ihrer Wichtigkeit in der praktischen Optik ein besonderes Kapitel gewidmet, in welchem die bei der Abbildung auftretenden Fehler und die Mittel zu deren Hebung eingehend behandelt werden. Den Abschluss dieser Lieferung bildet der An-

fang des elften Kapitels: Das Auge und die Gesichtsempfindungen. — Die Fehler der Linsensysteme wurden früher meistens nur kurz erwähnt; erst die allgemeine Verbreitung der Photographie spornte die Optiker zum Auffinden der besten Linsensysteme an, womit natürlich eine eingehende Kenntnis der Abbildungsfehler verbunden war. Das Streben, diese schwierigen Teile der Optik so deutlich wie möglich darzustellen, giebt sich schon in dem äusseren Umstande zu erkennen, dass in den Figuren die roten und blauen Strahlen farbig wiedergegeben sind, was von sehr grossem Wert ist. — Auch dieser Teil des Werkes sei bestens empfohlen.

B. Nebel.

Das Mikroskop und seine Anwendung. Von Dippel. Zweite umgearbeitete Auflage. Zweiter Teil. Anwendung des Mikroskopes auf die Histologie der Gewächse. Erste Abteilung. Mit 302 eingedruckten Holzstichen und drei Tafeln in Farbendruck. Braunschweig 1896. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 443 S. Preis 24 M.

Seit dem Erscheinen der früheren Auflage ist die mikroskopische Untersuchung der Pflanzen wesentlich gesteigert worden. Dabei sind auch die Methoden teils verbessert, teils neu geschaffen worden. Dies gilt besonders von den Polarisationserscheinungen. Der erste Abschnitt des Werkes beschäftigt sich ausschliesslich mit den Untersuchungen über den Bau der Zelle, während der zweite die Gewebe der höheren Gewächse zum Gegenstand hat. Der dritte und vierte Abschnitt sind der zweiten Abteilung des Werkes vorbehalten und sollen die Untersuchungen der vegetativen Organe der höheren Gewächse und die aus der Entwickelungsgeschichte umfassen. Die zahlreichen, zum Teil farbigen Figuren tragen wesentlich zum leichteren Verständnis bei und entheben den Verfasser von weitschweifigen und sehr oft doch ungenügenden Beschreibungen. Das Entgegenkommen hierin von Seiten der Verlagsbuchhandlung sei besonders anerkannt. Bezüglich der äusseren Ausstattung wäre die Wahl eines solchen Papiers zu wünschen, bei welchem die Rückseite nicht durchschlägt. Wie unschön sind z. B. Seite 178, 249, 253 und andere mehr! — Von welcher Wichtigkeit die mikroskopischen Untersuchungen der organischen Substanzen, speziell auch die in der Botanik für das praktische Leben sind, dafür sprechen die durch das Mikroskop in Kürze feststellbaren Verfälschungen von Mehl und anderen Lebensmitteln. Ein derartiges Handbuch wird daher nicht nur dem Gelehrten, sondern auch dem gerichtlichen Sachverständigen ein wichtiges Werkzeug sein.

B. Nebel.

Vorlesungen über Gastheorie. Von Ludwig Boltzmann. I. Teil: Theorie der Gase mit einatomigen Molekülen, deren Dimensionen gegen die mittlere Weglänge verschwinden. Leipzig 1895. Verlag von Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner). 204 S.

Auch die Wissenschaft hat ihre Mode, und wer dieselbe nicht mitmacht, wird von seinen Fachgenossen ebenso beurteilt, wie wenn er kein

modernes Gewand trägt. Lächerlich ist es, aber leider wahr. Verfasser empfindet dies auch und erläutert in seinem Vorwort, wie er eigentlich dazu kommt, der Öffentlichkeit ein Werk über Gastheorie zu übergeben. Dies kann aber nur als ein Zug von Bescheidenheit angesehen werden; denn der Verfasser gehört zu den Menschen, die sich unabhängig von der Mode kleiden können und doch nicht unmodern sind. Während die kinetische Gastheorie von O. E. Meyer mehr für Chemiker ist, die auf dem Grenzgebiet zwischen Physik und Chemie thätig sind, so existieren doch nur die Kirchhoffschen Vorlesungen über Wärmetheorie, denen die Gastheorie als Anhang folgt. Angeregt durch die Kirchhoffsche Gastheorie, war der Verfasser bestrebt, die vielen Lücken darin auszufüllen und die Arbeiten von Clausius und Maxwell im Zusammenhang wiederzugeben. Nach einer Einleitung über die mechanische Analogie für das Verhalten der Gase und der Berechnung des Druckes eines Gases werden im ersten Abschnitt die Moleküle als elastische Kugeln aufgefasst, wobei äussere Kräfte und sichtbare Massenbewegungen fehlen. In dem zweiten Abschnitt werden die Moleküle als Kraftcentra angesehen und äussere Kräfte und sichtbare Bewegungen des Gases der Betrachtung unterworfen. Im dritten und letzten Abschnitt wird der Nachweis geliefert, dass die Moleküle sich mit einer der fünften Potenz der Entfernung verkehrt proportionalen Kraft abstossen. Der zweite Teil soll die van der Waalssche Theorie, die Gase mit mehratomigen Molekülen und die Dissociation zum Gegenstand haben.

B. Nebel.

Magnetische Kraftfelder. Die Erscheinungen des Magnetismus, Elektromagnetismus und der Induktion, dargestellt auf Grund des Kraftlinienbegriffes. Von H. Ebert. I. Teil. Mit 93 Abbildungen im Text und auf zwei Tafeln. Leipzig 1896. Verlag von Johann Ambrosius Barth. 223 S.

Durch die genialen experimentellen Untersuchungen von Heinrich Hertz wurde der Faraday-Maxwellschen Theorie über die Elektrizität der wichtigste Stützpunkt geliefert, so dass die früheren Anschauungen plötzlich verdrängt wurden. Dies geschah in so unglaublich kurzer Zeit, dass z. B. die Elektrotechnik sofort mit den Kraftlinien rechnete. In der Physik wurde in dem Unterricht auch der Kraftlinienbegriff eingeführt, jedoch bildete er noch nicht allgemein die Basis für die Elektrizitätslehre, zumal noch kein Lehrbuch für den ersten Physikunterricht an Hochschulen existierte, in welchem der ganze Stoff vom Standpunkt der Kraftlinientheorie aus einheitlich zur Darstellung gelangte. Das vorliegende, dem Andenken von Heinrich Hertz gewidmete Werk soll diese Lücke ausfüllen. Zunächst ist nur der erste Teil erschienen, welcher einen mehr vorbereitenden Charakter besitzt. Die neuen Begriffe werden an den längst bekannten Beispielen aus dem ersten Physikunterricht erläutert und durch Einüben geläufig gemacht. So werden schon bei dem natürlichen Magnet das magnetische Kraftfeld und die Kraftlinien eingeführt. Der zweite Teil soll die In-

duktion im weitesten Sinne des Wortes umfassen. Dahin gehören zunächst die Erscheinungen der Induktion in qualitativer und quantitativer Hinsicht, sodann diejenigen der Selbstinduktion, der ein- und mehrphasigen Wechselströme und der magnetischen Drehfelder. Mittels der Helmholtzschen Cykeltheorie sollen auch die Erscheinungen der Transformation der elektromagnetischen Energie in Wärme und auch die Energieansammlung bei ungeschlossenen Strömen behandelt werden. Sehr wichtig wird dann das Kapitel über Elektrooptik sein, in welchem neben den Leuchterscheinungen auch die Kathoden- und Röntgenstrahlen ihren Platz finden werden. Aus diesen kurzen Andeutungen folgt schon, welche Fülle von Material unter dem einen Gesichtspunkt der Kraftlinien behandelt werden soll. — Es bedarf wohl kaum des Hinweises, dass sich ein solches Buch sehr rasch in dem Unterricht über Experimentalphysik einbürgern wird, um die neue Generation nicht zu sehr mit dem leidigen Übergangsstadium von der alten zur neuen Theorie zu belästigen. — Auch die äussere Ausstattung entspricht ganz dem gediegenen Inhalt des Werkes. B. Nebel.

Populär-wissenschaftliche Vorlesungen. Von E. Mach. Mit 46 Abbildungen. Leipzig 1896. Verlag von Johann Ambrosius Barth. 135 S.

Die 15 populär-wissenschaftlichen Vorlesungen sind zuerst in Chicago in englischer Sprache erschienen, verdanken aber ihre Entstehung nicht, wie dies so häufig der Fall ist, einem Vortragscyklus in einem kürzeren Zeitraum; ihr Erscheinen erstreckt sich über einen Zeitraum von mehr als 30 Jahren, und schon daraus folgt, dass sie vollständig unabhängig von einander sind. Auch der Charakter des Inhalts ist durchaus verschieden, bald wird ein ganz spezieller Gegenstand behandelt, wie z. B. über die Geschwindigkeit des Lichtes, bald eine allgemeine, das heutige Leben lebhaft beschäftigende Schulfrage, wie z. B. über den relativen Bildungswert der philologischen und der mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächer der höheren Schulen. Bei dieser unabhängigen Stoffauswahl kann der Leser seinem Geschmack folgen und ist nicht genötigt, schrittweise vorzugehen, was gerade dem Laien, der sich mehr belehrend unterhalten will, nur zu schwer wird. Alle aus dem Gebiet der Naturwissenschaften stammenden populären Vorlesungen begrüssen wir mit besonderer Freude; denn sie tragen dazu bei, dem klassischen Philologen seinen bisher dominierenden Platz in der Schule auf das richtige Maß zu beschränken.

B. Nebel.

Grundriss der Wärme für Studierende und Schüler. Von R. T. Glazebrook. Deutsch herausgegeben von Otto Schönrock. Mit 88 Figuren im Text. Berlin 1896. Verlag von S. Calvary & Co. 280 S. Preis 3. 60 M.

Das kleine Werk ist sehr nett und äusserst praktisch eingerichtet. Hinter den mit Zahlen versehenen Abschnitten ist in fettem Druck das den

Inhalt angebende Stichwort gesetzt. Handelt es sich um eine Definition, so fällt sie äusserlich schon durch den Druck in Kursivschrift auf. Durch kleinen Druck werden Aufgaben und Fehlerquellen bei Experimenten angedeutet. Dabei war der Verfasser bestrebt, so knapp und präzis wie möglich zu sein. Kurz gesagt, es ist ein Vademecum für den angehenden Physiker, sei er mit Experimentieren, sei er mit Examensvorbereitungen beschäftigt.

B. Nebel.

Grundgesetze der Molekularphysik. Von Th. Schwartze. Mit 25 in den Text gedruckten Abbildungen. Leipzig 1896. Verlagsbuchhandlung von J. J. Weber. 209 S. Preis 2 M.

Durch die überraschenden experimentellen Ergebnisse von Heinrich Hertz machten sich die Faraday-Maxwellschen Anschauungen über die elektrischen Vorgänge derart schnell geltend, dass man zunächst noch in Verlegenheit kam, da die Ausdrucksweise der alten Lehre mit derjenigen der neuen bei der Behandlung der gesamten Elektrizitätslehre in Kollision geriet. Verfasser ist mit seiner Lehre von der Elektrizität und deren praktische Verwendung als ein Apostel der neuen Lehre anzusehen, da die Darstellung ganz im Sinne Faradays erfolgte. — Der Umschwung auf dem Gebiet der Elektrizität und des Magnetismus ist aber ein solch gewaltiger, dass auch die Mechanik hiervon ergriffen wird. Längst hat man es empfunden, dass es mit dieser in dem bisherigen Geleise nicht weiter gehen kann. Schon Lagrange und Hamilton waren der Ansicht, dass sich die mechanischen Grundprinzipien von einem Gesichtspunkt aus behandeln lassen müssen. Verfasser sucht dieses Ziel dadurch zu erreichen, dass er das dem Wechselspiel von Wirkung und Gegenwirkung Ausdruck gebende Prinzip der Zusammensetzung der Kräfte nach dem Parallelogrammgesetz zur Grundlage der physikalischen Mechanik macht. Durch die Aufstellung einer allgemeinen, für Statik und Dynamik giltigen Grundformel, analog der Maxwellschen elektrodynamischen Grundgleichung gelingt es, die gesamte Statik und Dynamik in eine systematische Gestalt zu bringen. — Den Anhang bildet eine auf neuere Beobachtungen gegründete Farbentheorie, die mit der Newtonschen Hypothese, dass weisses Licht zugleich vielfarbiges Licht sei, im Widerspruch steht.

B. Nebel.

Repetitorium der Experimentalphysik für Studierende auf Hochschulen. Mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Mediziner und Pharmazeuten. Von L. Weber. Mit 121 in den Text gedruckten Abbildungen. München und Leipzig 1895. Wissenschaftlicher Verlag von Dr. E. Wolf. 256 S. Preis 4.20 M.

Gewöhnlich wird in den Vorträgen über Experimentalphysik auf die speziellen Bedürfnisse einzelner Studentenkategorien keine Rücksicht genommen, so dass namentlich den Chemikern, Medizinern und Pharmazeuten in vielen Teilen der Physik die Vorträge allzu eingehend erscheinen. Dadurch wird die für das Examen zu treffende Auswahl recht schwer, zumal

die grösseren Lehrbücher zu viel, die kleineren zu wenig bringen. Verfasser hat es verstanden, ein nicht zu umfangreiches Werk zu schaffen, welches die wesentlichen Grundlagen der Experimentalphysik in solchem Umfang enthält, wie sie für ein erfolgreiches physikalisches Praktikum speziell für Mediziner und Pharmazeuten ausreichen. Die in diesen Kreisen so häufig gefürchtete Mathematik tritt völlig zurück und beschränkt sich nur auf die einfachsten Mittel. Zur schnelleren Orientierung sind auf den Rand die Stichwörter gedruckt. Die Figuren sind nur schematisch angedeutet, setzen also die Bekanntschaft mit den Apparaten aus der Experimentalphysik voraus. — Sicherlich wird dieses Repetitorium der Experimentalphysik bei den Studenten sehr willkommen geheissen.

B. Nebel.

L'école pratique de physique. Cours élémentaire de manipulations de physique, à l'usage des candidats aux écoles et au certificat des études physiques et naturelles. Par Aimé Witz. Deuxième édition revue de augmentée. Paris 1895. Gauthier-Villars et fils. 218 S. Preis 5 Fr.

Obwohl der Charakter des Buches gegenüber der ersten Auflage sich nicht geändert hat, so hat es doch darin eine wesentliche Änderung erfahren, als es in zwei Bände geteilt worden ist. Äussere Rücksichten gaben hierzu die Veranlassung. Der erste Band ist für Schulamtskandidaten, Mediziner und Pharmazeuten bestimmt, er ist daher elementar gehalten. Zugleich dient er auch als Vorbereitung für den zweiten Band, welcher die jungen Leute zu tüchtigen Physikern heranziehen soll, indem sie mit den genauen Messungen schwierigerer Versuche vertraut gemacht werden sollen. Jedem Abschnitt geht ein theoretischer Teil vor, in welchem das Wichtigste zum Verständnis der anzustellenden Versuche kurz zusammengestellt wird. Sodann folgt eine Beschreibung der zu benützenden Apparate und erst dann werden die von dem Schüler durchzuführenden praktischen Übungen besprochen. Den Schluss bildet jedes Mal eine Zusammenstellung der Ergebnisse und der daraus zu ziehenden Folgerungen. Diese Einteilung weicht wesentlich von derjenigen unserer deutschen Bücher für das physikalische Praktikum ab. Durch jene Anordnung wird dem Studierenden die ganze Arbeit sehr erleichtert und das Selbststudium ermöglicht.

B. Nebel.

Cours de physique de l'école polytechnique par J. Jamin. **Premier supplément** par Bouty. Chaleur. — Acoustique. — Optique. Paris 1896. Gauthier-Villars et fils. 182 S.

In dem vorliegenden Ergänzungsband zu dem Jaminschen Werk werden die neueren Fortschritte der Physik in Bezug auf die Wärme, Akustik und Optik behandelt. Um aber das Ganze in zusammenhängender Form darstellen zu können, konnten nicht alle Einzelheiten bis in die neueste Zeit aufgenommen werden, sondern nur solche, welche seit einigen Jahren eine gewisse Entwicklung erfahren haben, wie z. B. der osmotische

Druck und dergleichen mehr. — Auf diese Weise werden auch die Besitzer der letzten Auflage mit dem heutigen Stand der Physik bekannt gemacht.

B. Nebel.

Die Erhaltung der Arbeit. Von Richard Heger. Hannover 1896. Helwingsche Verlagsbuchhandlung. 305 S. Preis 8 M.

In dem vorliegenden Buch sollen die Naturerscheinungen vom Standpunkte der Erhaltung der Arbeit aus wissenschaftlich behandelt werden, ein Streben, das schon sehr viele Anhänger gewonnen hat. Wenn nun auch dieser Standpunkt nicht allgemein angenommen wird, so ist es doch ein nützliches Werk, die Wichtigkeit des Prinzipes von der Erhaltung der Arbeit an der Hand der physikalischen Erscheinungen nachgewiesen und die Bedeutung dieses Gesetzes durch eine leichtverständliche Darstellung den weitesten Kreisen zugänglich gemacht zu haben. Je grösser die Verbreitung dieses den Haushalt der Natur betreffenden Gesetzes ist, um so grösser ist die Wahrscheinlichkeit, dass neue Gedanken und neue Gesichtspunkte auftreten zu der schnelleren Klärung über die künftige Behandlung der Physik; denn die sich mehr und mehr bahnbrechenden Anschauungen in der Elektrizitätslehre erheischen immer energischer eine baldige Umgestaltung der Mechanik und daher der ganzen übrigen Physik. — Figuren, wie z B. Fig. 53 ohne weitere Buchstabenbezeichnung, sind für solche, die sich erst belehren lassen wollen, von geringem Nutzen.

B. Nebel.

Die Luftwiderstands-Gesetze, der Fall durch die Luft und der Vogelflug. Mathematisch-mechanische Klärung auf experimenteller Grundlage entwickelt von Friedrich Ritter von Loessl. Wien 1896. Alfred Holder. 304 S.

Die Lüfte zu durcheilen, war schon jeher das Bestreben der Menschen, und es fehlte nicht an Versuchen, diesem Ziel näher zu kommen. Zwei Richtungen sind es hauptsächlich, welche eingeschlagen werden, einmal das Bestreben, den Luftballon lenkbar zu machen und sodann das grossartigere Problem, den Vogelflug nachzuahmen. Um dieses Ziel zu erreichen, sind aufmerksame Naturstudien erforderlich. Dazu gehören nun nicht nur eifrige Beobachtungen des Vogelfluges, sondern auch eine eingehende Kenntnis von den Gesetzen des Luftwiderstandes, um richtige Konsequenzen für den künstlichen Vogelflug ziehen zu können. Die seit einer Reihe von Jahren angestellten Experimente und teilweise auch schon veröffentlichten Resultate hat der Verfasser in dem vorliegenden Buche zu einem Ganzen vereinigt. Nachdem die verschiedenen Ansichten über das Verhalten der Luft gegen eine bewegte Fläche einander gegenüber gestellt worden sind, wird auf das nach Ansicht des Verfassers thatsächliche Verhalten der Luft hingewiesen, das in einer Lufthügelbildung bestehen soll. Diese wird nun der eingehendsten experimentellen und rechnerischen Untersuchung unterworfen, und dabei die Ergebnisse erforscht, wenn die Versuchsbedingungen

entsprechend geändert werden. Dies führt schliesslich zu dem Problem des Vogelfluges, wobei auch die bisherigen Vorstellungen über diesen nicht unerwähnt bleiben. Aus den speziellen Betrachtungen des Taubenfluges und den rechnerisch ergründeten Arbeitsleistungen glaubt der Verfasser die gewonnenen Resultate sinngemäss auf jede Vogelgattung übertragen zu dürfen, weshalb von einer weiteren Betrachtung abgesehen wird. Dass die mathematischen Ergebnisse nur Annäherungswerte sein können, dessen ist sich auch der Verfasser bewusst; denn für eine durchsichtige mathematische Behandlung müssen zunächst die Bedingungen so einfach wie möglich gewählt werden. Daher sind die Probleme über den Stirnwiderstand schwach gebogener dünner Flächen, sowie der Widerstand parallel gestellter Flächen, insbesondere der von Gittern und Sieben wegen ihres bedeutenden Umfanges künftigen selbständigen Abhandlungen vorbehalten worden. B. Nebel.

Les radiations nouvelles. Les rayons X et la photographie à travers les corps opaques par Ch.-Ed. Guillaume. Deuxième édition. Paris 1896. Gauthier-Villars et fils. 144 S. Preis 3 Frcs.

Seit dem Erscheinen der ersten Auflage dieses Buches ist in theoretischer Hinsicht über die Natur der X-Strahlen oder Röntgen-Strahlen, wie sie in Deutschland nur noch bezeichnet werden, kein Fortschritt zu verzeichnen, der uns die Lösung für das immer noch unbekannte X gebracht hätte. Der Verfasser verzichtet daher, die verschiedenen Vermutungen über das Wesen dieses neuen Phänomens in dieses Buch aufzunehmen, sondern begnügt sich mit den bedeutenden Ergebnissen in praktischer Hinsicht. Wer sich daher Aufklärung hierüber verschaffen will und selbst erfolgreiche Versuche anzustellen wünscht, dem kann dieses Buch nur bestens empfohlen sein. Der erste Teil und die beiden ersten Kapitel des zweiten Teiles betreffen diejenigen Kapitel der Physik, welche zum Verständnis der Röntgen-Strahlen erforderlich sind. Die Figuren einer Ratte, mit natürlichen und Röntgen-Strahlen aufgenommen, liefern den deutlichsten Beweis über den Unterschied dieser Strahlengattungen. Die übrigen Tafeln geben ausgezeichnete Röntgen-Photographien wieder. B. Nebel.

Untersuchungen über die Quellung der Stärke von H. Rodewald. Kiel und Leipzig 1896. Verlag von Lipsius und Tischer. 87 S. Preis 2.40 M.

Verfasser beschäftigt sich zunächt mit der Bestimmung des Ausdehnungskoeffizienten der Stärke und sodann eingehend mit Wärmemessungen. Hier werden die spezifischen Wärmen der trockenen, gequollenen Stärke und des Stärkekleisters gemessen, dann erst wird die Quellungswärme der Stärke im Eiskalorimeter und bei Zimmertemperatur ermittelt. Der Bestimmung der spezifischen Volumina der Stärke folgt diejenige des Wassergehaltes der Stärke im Quellungsmaximum. Nach diesen experimentellen

Untersuchungen wird in Kürze die mechanische Wärmetheorie auf die Quellung angewendet, und aus den zusammengestellten, auf experimentellem Wege gefundenen Resultaten noch eine Reihe von Grössen abgeleitet, unter anderem auch die bei der Quellung auftretende Arbeitsleistung. — Durch diese Spezialarbeit ist aber auch das Interesse auf andere Gebiete gelenkt worden, erwähnt sei nur die Physiologie bezüglich der Muskelthätigkeit.

B. Nebel.

Barometrische Höhentafeln für Tiefland und für grosse Höhen von W. Jordan. Hannover 1896. Helwingsche Verlagsbuchhandlung. 48 S. Preis 2 M.

Diese Tafeln bilden die Ergänzung der zweiten Auflage der im Jahre 1886 im Verlage von J. B. Metzler, Stuttgart, erschienenen barometrischen Höhentafeln nach Unten und Oben, so dass nunmehr ein barometrisches Tabellenwerk existiert, welches bei barometrischen Höhenmessungen im Tiefland, im Mittelgebirge, im Hochgebirge und auf Ballonfahrten bis 8000 m Höhe benutzt werden kann. — Sicherlich wird auch diese Arbeit des ungemein thätigen Verfassers in den beteiligten Kreisen grossen Anklang finden.

B. Nebel.

Isenkrahe, Dr. C. **Das Verfahren der Funktionswiederholung, seine geometrische Veranschaulichung und algebraische Anwendung.** Leipzig 1897. Druck und Verlag von B. G. Teubner. 113 S.

Die sogenannte Funktionswiederholung oder Iteration, welche darin besteht, dass man auf eine Grösse z_0 die Operation f wiederholt ausübt, also aus $z_1 = f(z_0)$, weiter $z_2 = f(z_1) = f[f(z_0)] = f_2(z_0)$ bildet u. s. f. bis $z_n = f_n(z_0)$, ist nicht neu. Verfasser selbst weist auf Archimedes, Newton, Gauss, Günther, E. Hoffmann, Netto hin, Namen, welchen unter anderen noch Stern, Schlömilch, Schröder, Schapira und v. Schaewen beigefügt werden können.

Die Frage der Anwendung iterierter Funktionen auf Algebra hat eigentlich so recht Günther in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der 34. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Trier (Sept. 1879) in Fluss gebracht. Man vergleiche J. C. V. Hoffmanns Zeitschr., 11. Jahrg., S. 68: „Eine didaktisch wichtige Auflösung trinomischer Gleichungen“. Denn der Güntherschen Fragestellung folgte noch in demselben Bande dieser Zeitschrift eine entsprechende Abhandlung von v. Schaewen, sodann eine verwandte Arbeit von E. Hoffmann im Archiv d. Math., 66. Teil, S. 33 (1881). Etwas später erschienen zwei Abhandlungen von Netto im 29. Bd. der Math. Annalen (1887), S. 141 u. 148 und an diese anschliessend eine Arbeit von Isenkrahe, Math. Annalen, Bd. 31, S. 309 (1888), welche als der Vorläufer seines jetzt erschienenen Buches bezeichnet werden kann.

In allen diesen Arbeiten fehlt, von einigen sehr unbestimmt gehaltenen Äusserungen abgesehen, die geometrische Deutung des ana-

lytischen Vorganges bei dem Iterationsprozess, und diese Lücke soll nun im wesentlichen durch das uns vorliegende Buch ausgefüllt werden.

Der Verfasser zerfällt eine Gleichung $F(x) = 0$ in $f(x) = g(x)$ und betrachtet die Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$. Von der einen Kurve nach der anderen schlägt er sodann eine „Brücke", d.h. er fügt eine die genannten Kurven schneidende Kurve $y = k(x)$ hinzu und sucht mittelst solcher sich aneinander schliessender Brücken den Schnittpunkt der ersten beiden Kurven zu erreichen. Die Abscisse jenes Schnittpunktes kommt dann offenbar mit einer reellen Wurzel der vorgelegten Gleichung überein. Die aufeinander folgenden Brücken bilden, wie leicht ersichtlich, je nach der Neigung der Kurven gegen die x-Axe, entweder einen treppenartigen „Brückenzickzack", kurz eine „Treppe" oder auch eine „eckige Spirale", ein Ausdruck, welcher allerdings an „eckiger Kreis" u. dergl. erinnert. — Nach Einführung dieser allgemeinen Begriffe wird die Kurve $y = k(x)$ spezialisiert, genauer gesprochen: es werden die aufeinander folgenden Brücken durch Strecken ersetzt, welche abwechselnd parallel den Koordinatenaxen verlaufen; es entsteht so zwischen den Kurven ein geradliniger, gebrochener Zug. Aber auch die Kurve $y = g(x)$ wird spezialisiert; an ihrer Stelle wird einfach die Gerade $y = x$ eingeführt. Diese Gerade nennt Verfasser „Wurzelaxe", und er legt ihr eine prinzipielle Bedeutung bei, welche sie indessen keineswegs besitzt. Gerade dadurch, dass er jene Axe auswählt und $y = x$ an Stelle einer noch passend auszusuchenden, leicht umkehrbaren Funktion $y = g(x)$ setzt, beraubt er sich der Bewegungsfreiheit und gestaltet die geometrischen Bilder unnötig verwickelt.

Bei der Neuheit und Wichtigkeit des Gegenstandes halten wir uns für verpflichtet, diesen genauer darzulegen.

Nehmen wir die kubische Gleichung:

$$a_0 + a_1 x + x^3 = 0,$$

welche Verfasser auf Seite 61 behandelt. Er bildet:

$$1) \qquad x = -\frac{a_0 + x^3}{a_1} = f(x);$$

$$2) \qquad x = \sqrt[3]{-a_0 - a_1 x} = v(x)$$

und legt somit die Gerade $y = x$ fest, während die kubischen Parabeln:

$$y = -\frac{a_0 + x^3}{a_1}, \quad \text{resp.} \quad x = \sqrt[3]{-a_0 - a_1 y}$$

mit wechselnden Werten der Parameter a_0 und a, in veränderlicher Gestalt und Lage die Ebene durchsetzen. Man vergl. die Figuren 52—55, von denen die erste, welche sich auf eine quadratische Gleichung bezieht, nicht weniger als sechzehn verschiedene Parabeln aufweist.

Bringt man dagegen die vorgelegte Gleichung auf die Form:

$$x^3 \mp x - c = 0,$$

was mittelst einer einfachen Substitution immer möglich ist, und spaltet sie in $y = x^3$ und $y = c \pm x$, so hat man eine feste kubische Parabel von

unveränderlicher Gestalt, während das wechselnde Element in einer Geraden $y = c + x$ oder $y = c - x$ besteht, welche für verschiedene Werte von c parallel zu sich selbst zu verschieben ist. — Dieselbe Bemerkung gilt für trinomische Gleichungen überhaupt, denn die Gleichung

$$x^n \mp x^p - c = 0$$

kann in eine solche mit $p = 1$ verwandelt werden, nur ist dann n als gebrochen zu denken, was keinerlei Störung in dem Iterationsprozess herbeiführt.

Betrachten wir weiter eine biquadratische Gleichung der Form

$$x^4 - \alpha x^2 - \beta x - \gamma = 0.$$

Mit Herrn Isenkrahe müssten wir dieselbe etwa spalten in $y = x$ und

$$1) \quad y = \frac{x^4 - \alpha x^2 - \gamma}{\beta}, \quad \text{resp.} \quad 2) \quad x = \sqrt{\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta y + \gamma}},$$

sodann aber wären die letzten Gleichungen als Kurven vierter Ordnung zu deuten, welche mit den Konstanten α, β, γ nicht nur ihre Lage, sondern auch ihre Gestalt wechselten. — Verzichten wir dagegen auf die Wurzelaxe $y = x$ und transformieren die vorgelegte Gleichung so, dass sie durch die beiden Gleichungen $x^2 = a + y$ und $y^2 = b + x$ ersetzt werden kann, d. h. dass sie übereinkommt mit

$$(x^2 - a)^2 - x - b = 0,$$

so erreichen wir eine beträchtliche Vereinfachung. Die hier auftretenden Parabeln sind vom zweiten Grade und kongruent, denn sie besitzen denselben Parameter und unterscheiden sich nur durch ihre Lage. Ihre Gleichungen sind überdies leicht umkehrbar und liefern daher folgende einfache Kettenlösungen:

$$1) \qquad x = \sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{a + \cdots}}},$$

$$2) \qquad x = -b + \sqrt[\frac{1}{2}]{-a + \sqrt[\frac{1}{2}]{-b + \cdots}},$$

welche in der That sämtliche Wurzeln der biquadratischen Gleichung zur Darstellung bringen. — Ähnliche Bemerkungen gelten für quadrinomische Gleichungen der Form:

$$x^{2n} - \alpha x^n - \beta x - \gamma = 0 \quad \text{und} \quad x^n - \alpha x^2 - \beta x - \gamma = 0.$$

Wenn also Herr Isenkrahe auf gewisse merkwürdige und einfache Algorithmen nicht verzichten will, so muss er die Beschränkung, welche er durch die Wurzelaxe $y = x$ einführt, von vornherein fallen lassen. Mit dieser Axe scheiden natürlich auch die „Oktanten“ aus, deren er bei seiner Darstellung bedarf. Solange er aber die Funktion $y = g(x)$ einfach durch $y = x$ ersetzt, so geschieht das eben auf Kosten der anderen

$y = f(x)$, welche unnötig kompliziert wird, sodass sie sich schwer oder garnicht invertieren lässt. Nun braucht zwar die Umkehrbarkeit von $f(x)$ nicht unbedingt gefordert zu werden, wenn man eine Iterationsmethode wie etwa die Newtonsche in Anwendung bringt; aber dann bewegt man sich in ausgefahrenen Gleisen.

Und weiter: Die iterierten Funktionen sind geeignet in der angewandten Mathematik eine hervorragende Rolle zu spielen. Dort kommt es darauf an, möglichst schnell die definitiven numerischen Lösungen zu erhalten, und man wird deswegen die Iteration mit einem recht günstigen Anfangswert beginnen wollen. Solche Anfangswerte können aber auf geometrischen Wege sehr leicht gefunden werden; wir wollen das durch ein Beispiel klar machen.

Um eine beliebig vorgelegte biquadratische Gleichung zu lösen, bringe man sie zunächst auf die Form:

$$(x^2 - a)^2 - x - b = 0,$$

was, wie bemerkt, durch einfache Substitution stets möglich ist. Nun konstruiere man sich ein für alle Mal auf eine durchscheinende Tafel (Fliesspapier) die Parabel $v = u^2$ in zwei Exemplaren und bringe dieselben durch Aufeinanderlegen zu Schnitt nach Maßgabe der beiden Gleichungen

$$x^2 = a + y \quad \text{und} \quad y^2 = b + x.$$

Die Abscissen der unmittelbar erkennbaren Schnittpunkte sind selbstverständlich angenäherte Lösungen der oben angeschriebenen Gleichung vierten Grades, und die nun vorzunehmende Iteration führt von diesen günstig gewählten Anfangslösungen zu solchen mit beliebig grosser Genauigkeit. Sobald also die Konstanten der Gleichungen derartig reduziert werden, dass sie keinen Einfluss mehr auf die Gestalt der Kurven haben, reicht ein fertiges Kurvenpaar, ein in allen Fällen brauchbarer mechanischer Apparat zu einer angenäherten Bestimmung der Wurzeln aus; andernfalls müsste man die Kurven für jedes Beispiel besonders zeichnen.

Auf eine solche Reduktion geht aber Herr Isenkrahe nicht ein, er würde sie bei quadrinomischen Gleichungen auch gar nicht mehr erzwingen können, weil er durch die einseitige Entlastung der Kurvengleichung

$$y = g(x),$$

d. h. durch ihre Verwandlung in $y = x$, die andere Gleichung $y = f(x)$ mit Konstanten überlastet. Aber abgesehen von allen Spezialitäten muss ganz allgemein folgendes konstatiert werden. Das gewöhnliche rechtwinklige Koordinatensystem mit seinen zwei Axen und vier Quadranten reicht zur geometrischen Interpretation der analytischen Vorgänge bei der Iteration völlig aus und ist zugleich das zweckmässigste. Unter Umständen kann es bequem sein, die auftretenden Gleichungen auch in Polarkoordinaten zu deuten, und dann treten an Stelle der horizontalen Brücken einfach Kreisbögen.

Trotz all' der Einwände, die wir gemacht, möchten wir die Schrift des Herrn Isenkrahe doch zur Lektüre empfehlen, denn sie ist die einzige

Quelle — abgesehen von Legendres Zahlentheorie und zwei noch zu nennenden Abhandlungen, welche eine geometrische Illustration der Iterationstheorie liefert. — Was Legendre betrifft, so teilt mir Herr Mehmke soeben gefälliger Weise mit, dass in dem Werke über Zahlentheorie (Anhang des zweiten Bandes) die Iterationsmethode auf numerische Gleichungen angewendet und der analytische Prozess an sich schneidenden Kurven verfolgt wird. Immerhin wird man finden, dass der geometrische Teil bei Legendre beträchtlich zurücktritt, feinere Unterscheidungen fehlen ganz, sind wahrscheinlich auch nicht beabsichtigt, und die Untersuchung kann keineswegs als abgeschlossen angesehen werden.

Zum Schlusse muss Referent, so ungern er es auch an dieser Stelle thut, auf die eigenen einschlägigen Arbeiten zu sprechen kommen, welche im Jahre 1894 erschienen sind. Die erste findet sich in dieser Zeitschrift, 39. Jahrg, und sie bringt auf Seite 321—354 eine umfängliche geometrische Theorie der Kettenfunktionen. Die andere wurde im Journal für Mathematik Bd. 113, S. 267—302 publiziert und führt den Titel „Theorie der An- und Umläufe und Auflösung der Gleichungen vom vierten, fünften und sechsten Grade mittelst goniometrischer und hyperbolischer Funktionen." In diesen Arbeiten wird man manche der Gesichtspunkte, die Herr Isenkrahe einnimmt, bereits vorfinden. Ich führte damals die Begriffe „Anlauf" und „Umlauf" ein und sprach von Anläufen, welche um den Schnittpunkt konvergent, divergent und indifferent (in sich zurückkehrend) verlaufen. Herr Isenkrahe benutzt für die gleichen Begriffe die bereits erwähnten Bezeichnungen „Brückenzickzack, Treppe, eckige Spirale". — Da der Herr Verfasser bei Ausarbeitung seiner schon vor ca. 10 Jahren angekündigten Schrift die neueste mathematische Litteratur nicht eingesehen oder wenigstens meine umfangreichen einschlägigen Arbeiten völlig ignoriert hat, so blieb mir nichts anderes übrig, als auf dieselben selbst hinzuweisen.

Dr. Heymann.

Poggendorffs Biographisch-litterarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften, enthaltend Nachweisungen über Lebensverhältnisse und Leistungen von Mathematikern, Astronomen, Physikern, Chemikern, Mineralogen, Geologen, Geographen u. s. w. aller Völker und Zeiten. III. Band (die Jahre 1858 bis 1883 umfassend). Herausgegeben von Dr. B. W. Feddersen und Prof. Dr. A. J v. Oettingen. Leipzig 1896—1898 bei Johann Ambrosius Barth. 15 Lieferungen. 1496 S.

Seit wir im 41. Bande dieser Zeitschrift, Hist.-litter. Abtlg. S. 181 bis 182, die erste Lieferung der Fortsetzung des längst klassisch gewordenen Poggendorffschen Wörterbuchs angezeigt haben, sind in ununterbrochener Reihenfolge weitere 14 Lieferungen erschienen, und hat mit der 15. Lieferung der Band abgeschlossen werden können. So ist das vorausgeschickte Programm nach jeder Richtung eingehalten worden, das deutlichste Zeichen,

wie umfassend die Vorbereitung des Bandes gewesen ist. Ein solches Werk liest man nicht, man benutzt es, und während des Benutzens kann man sich erst von der Zuverlässigkeit und Vollständigkeit überzeugen. Wir sind daher heute nur in der Lage, die Vollendung des Bandes zu melden und die Erklärung hinzuzufügen, dass mehrfache Stichproben uns mit grosser Befriedigung erfüllt haben.

CANTOR.

Das Delische Problem von Prof. AMBROS STURM (Schluss). Programm des K. K. Gymnasiums Seitenstetten 1897. 42 S.

Mit der dritten Programmabhandlung hat Herr Sturm seine Untersuchungen über die Geschichte des Delischen Problems abgeschlossen, welche bei fortlaufender Seitenzählung von 1 bis zu 140 sich leicht zu einem kleinen Bändchen vereinigen lassen. Mit freudiger Überraschung hatten wir unsere Leser auf manches Neue hinweisen können, welches der Verfasser auf dem Felde, welches für längst abgegrast galt, zu finden und in den beiden ersten Abhandlungen mitzuteilen wusste. Einige Nachträge sind auch in der dritten Abhandlung vorhanden, zu welchen ein den meisten, wenn nicht allen Mathematikern unbekannt gebliebener Aufsatz von U. von Wilamowitz-Moellendorff, ein Weihgeschenk des Eratosthenes (Nachrichten der königl. Gesellsch. der Wissenschaften zu Göttingen. Phil.-hist. Klasse 1894. Göttingen 1895) Veranlassung bot. Schade, dass Herr Sturm sein Programm erscheinen lassen musste, bevor im 4. Hefte 1897 dieser Zeitschrift Herons Kubikwurzelausziehung durch Maximilian Curtze bekannt gemacht worden ist. Sein Scharfsinn hätte sich an dem Rätsel des Heronischen Verfahrens erproben können. Den Hauptinhalt der dritten Abhandlung bildet die Geschichte des Delischen Problems in Indien und dem fernen Osten, bei den Arabern und in Europa seit der Zeit des Wiederaufblühens der Mathematik. Zu den Völkern des fernen Ostens, von deren erfolgreicher Beschäftigung mit mathematischen Aufgaben die allerletzten Jahre uns Kenntnis verschafft haben, gehören die Japaner, und Herr Sturm hat sich diese Vermehrung unseres Wissens nicht entgehen lassen. Von europäischen Arbeiten hat er solche des durch seine Beziehungen zu Galilei bekannten Paters Grienberger der Vergessenheit entrissen. Dieselben finden sich in einer Schrift über den Salomonischen Tempel von Js. B. Villalpandus, einem Ordensgenossen Grienbergers.

CANTOR.

Bibliographie

vom 14. April bis 9. Juni 1898.

Periodische Schriften.

Arbeiten, die astronomisch-geodätischen, des kaiserl. und königl. militär-geographischen Institutes in Wien. Publikation für die internationale Erdmessung. 7., 10. und 11. Bd. Wien, Lechner.

7. Das Präzisions-Nivellement in der österreichisch-ungarischen Monarchie. 1. Theoretische Grundlagen und Ausführungsbestimmungen. M. 10.

10. Dasselbe. 3. Nordöstlicher Teil. M. 10.

11. Astronomische Arbeiten. 3. Längenunterschiedmessungen. Polhöhen und Azimut-Bestimmungen. M. 16.

Berichte über die Verhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-physik. Klasse. 1897. V u. VI. Leipzig, B. G. Teubner. M. 3.

Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1892. 48. Jahrg. 2. Abtlg. Physik des Äthers. Redigiert von Rich. Börnstein. Braunschweig, Vieweg und Sohn. M. 30.

Fortschritte der Physik, herausgegeben von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. Namenregister n. einem Sach-Ergänzungsregister zu Bd. 21 bis 43 (1865—1887). Bearbeitet von B. Schwalbe. 2. Hälfte. Berlin, Reimer. M. 24.

Jahrbuch des königl. sächs. meteorologischen Institutes. 1896. Zugleich deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1896. Beobachtungssystem des Königreichs Sachsen. Herausgegeben vom Dir. Paul Schreiber. Chemnitz, Bülz. 14. Jahrg. 2. Abtlg. Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen an der Station erster Ordnung Chemnitz im Jahre 1896. M. 5.

Schriften der Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaften zu Marburg. XIII. Stein, Jos., Die Regenverhältnisse von Marburg auf Grund 30jähriger Beobachtungen an der meteorologischen Station daselbst. Marburg, Elwert. M. 2. 80.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-naturw. Klasse. Jahrgang 1897. 2 Bände. Prag, Řivnač. M. 12.

Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. 69. Versammlung zu Braunschweig 1897. 1. Naturwissenschaftliche Abteilungen. Leipzig, Vogel. M. 5.

Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorologischen Instituts. Ergebnisse der Gewitterbeobachtungen in den Jahren 1895 und 1896. Berlin, Asher & Co. M. 3.

—— Ergebnisse der meteorolog. Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1896. Ebenda. M. 9.

Zeitschrift für komprimierte und flüssige Gase. Herausgegeben von M. Altschul. 2. Jahrgang. April 1898 bis März 1899. 12 Hefte. Weimar, Steinert. Halbjährlich M. 8.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Cantor, Mor., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 3. (Schluss-)Bd. 3. Abtlg. Die Zeit von 1727 bis 1758. Leipzig, B. G. Teubner. M. 12.

Häbler, Thdr., Über zwei Stellen in Platons Timäus und im Hauptwerke von Coppernicus. Programm. Grimma, Gensel. M. 1.

Reine Mathematik.

Baer, Karl, Die Kugelfunktion als Lösung einer Differenzengleichung. Programm. Berlin, Meyer & Müller. M. 1.50.

Guthjahr, Wilh., Die Diakaustik des Kreises. Berlin, Gärtner. M. 1.

Kiepert, Ludw., Grundr. d. Differential- u. Integralrechn. 1. T. Differentialrechn. 8. Aufl. d. gleichn. Leitf. v. wl. Dr. M. Stegemann. Hannover, Hellwing. M. 12.

Klug, Leop., Die Konfiguration des Pascalschen Sechseckes im allgemeinen und in vier speziellen Fällen. Wien, Eisenstein. M. 3.

Salmon, George, Analyt. Geometrie d. Raumes. Deutsch v. Wilh. Fiedler. 1. T. Die Elem. u. d. Theorie d. Flächen 2. Grad. 4. Aufl. Leipz., B. G. Teubner. M. 8.

Schimpf, Ernst, Zur Definition der Konvergenz der unendlichen Reihen und der unendlichen Produkte. Programm. Berlin, Meyer & Müller. M. 1.

Thomae, J., Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. 2. Aufl. Halle, Nebert. M. 9.

Angewandte Mathematik.

Bach, C., Elastizität und Festigkeit. 3. Aufl. Berlin, Springer. geb. M. 16.

Diesterwegs populäre Himmelskunde u. Mathem. Geographie. Neu bearb. v. M. W. Meyer unt. Mitwirk. v. B. Schwalbe. 19. Aufl. Hamburg, Grand. M 7.

Fuhrmann, Arwed, Anwend. der Infinitesimalrechn. in d. Naturw., im Hochbau und in d. Technik. Lehrb. u. Aufgabensamml. 3. Teil. Bauwissenschaft. Anwendungen d. Differentialrechnung. 1. Hälfte. Berlin, Ernst & Sohn. M. 5.50.

Fulst, Otto, Azimuttafel. Tafel z. Bestimmung d. Azimuts aus Breite, Abweich. u. Stundenwinkel. Bremen, Heinsius Nachf. In Wachstuch kart. M. 2.20.

Glinzer, E., Grundriss d. Festigkeitslehre. 2. Aufl. Dresden, Kühtmann. M. 2. 80.

Heun, Karl, Die Vektoren der Geschwindigkeit und der Beschleunigung des Punktes und der geraden Linie. Programm. Berlin, Gärtner. M. 1.

Johnson, A. C., Zur Bestimmung der Breite und Länge bei bewölktem Himmel und zu anderen Zeiten. Eingeführt bei der königl. grossbrit. Marine. Übers. von Thdr. Lüning. Berlin, Mittler & Sohn. M. —.50.

Kants allgem. Naturgesch. u. Theorie des Himmels, oder Versuch von der Verfassung u. d. mechan. Ursprunge d. ganzen Weltgebäudes nach Newtonschen Grunds. abgeh. 1755. Herausg. von A. J. v. Oettingen. (Ostw. Klass. Nr. 12, neue Aufl.). Leipzig, Engelmann. M. 2. 40.

Landestriangulation, die königl. preuss. Abrisse, Koordinaten und Höhen sämtl. von d. trigonometrischen Abteilung d. Landesaufnahme bestimmten Punkte. 14. Tl. Regierungsbezirk Magdeburg. Berlin, Mittler & Sohn. kart. M. 10.

Nernst, W., u. Schönflies, A., Einführung in die mathem. Behandlung d. Naturwissensch. Kurzgefasstes Lehrbuch der Differential- und Integralrechn. m. bes. Berücksichtigung der Chemie. 2. Aufl. München, Wolff. M. 9.

Nivellementsergebnisse, die, d. trigonom. Abtlg. der königl. preuss. Landesaufn. 7. Prov. Brandenburg. 10. Prov. Westfalen. 11. Prov. Hessen-Nassau u. d. Grossherzogt. Hessen 12. Rheinprovinz. Berlin, Mittler & Sohn. à M. 1.

Riem, J., Nettorechnungen auf Grundl. d. v. Dr. Zillmer ausgeglichenen Sterbetafel der 23 deutschen Lebensversicherungs-Gesellschaften f. normal versicherte Männer und Frauen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung, zu 3% gerechnet und kontrolliert. Basel, Lendorff. geb. M. 3. 32.

Schubert, Herm., Mathem. Mußestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken u. Unterhaltungsaufg. math. Natur. Leipzig, Göschen. M. 5.

Weisstein, Jos., Die rationelle Mechanik. 1. Bd. Statik. Dynamik des Punktes. Wien, Braumüller. M. 10.

Physik und Meteorologie.

Bendt, Frz., Techn. Aufsätze II. Die Hertzschen Versuche. Teslas Versuche. Schwachstrom u. Starkstrom. Die Ozeantelegraph. Die Herstellung d. elektr. Glühlampe (Meyers Volksb. Nr. 1191). Leipzig, Bibliogr. Institut. M. —. 10.

Bott, Paul, Graph. Darstell. elektr. Wechselströme. Progr. Berlin, Gärtner. M. 1.

Blümel, Ant., Über elektr. Entladungsfiguren auf photogr. Platten. Progr. Berlin, Gärtner. M. 1.

Grätz, L., Die Elektrizität u. ihre Anwend. 7. Aufl. Stuttg., Engelhorn. geb. M. 8.

Hiller, Jul., Physikalische Übungen und Aufgaben im Anschluss an den Unterricht. Berlin, Gärtner. M. 1.

Kerber, Arth., Beiträge zur Dioptrik. 4. Heft. Leipzig, Fock. M. —. 50.

Kerntler, Frz., Die Möglichk. einer experim. Entscheidung zwischen den verschiedenen elektrodyn. Grundges. Nachtr. zu der Abhandlg.: Die elektrodyn. Grundgesetze u. d. eigentl. Elementargesetz. Budapest, Selbstverl. M. —. 50.

Neumann, Karl, Die elektr. Kräfte. Darlegung u. genauere Betrachtung d. von hervorragenden Physikern entwickelten math. Theorien. 2. (Schluss-) Tl. Leipzig, B. G. Teubner. M. 14.

Zenger, K. W., Die Meteorologie der Sonne u. das Wetter im Jahre 1888, zugl. Wetterprognose für das Jahr 1898. Prag, Řivnač. M. 2.

Zulkowski, Karl, Zur Erhärtungstheorie des natürlichen und künstlichen hydraulischen Kalkes. Berlin, Gärtner. M. 1. 20.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1897.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Abelsche Transcendenten.

1. Sur les fonctions abéliennes. H. Poincaré. Compt. Rend. XXIV, 1407.
2. Sur une classe de fonctions hyperabéliennes. H. Bourget. Compt. Rend. CXXIV, 1428.
3. Sur les fonctions uniformes quadruplement périodiques de deux variables. Ém. Picard. Compt. Rend. CXXIV, 1490.
4. Zur Reduktion Abelscher Integrale auf elliptische. O. Biermann. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 924.
5. Sulla ricerca del secondo termine dello sviluppo in serie delle funzioni sigma abeliane pari di genere tre. Ern. Pascal. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 193.

Absolute Geometrie.

6. Sur une méthode élémentaire d'exposition des principes de la géométrie non Euclidienne. P. Mansion. Mathesis, Sér. 2, VII, 112, 134, 158.
7. Identité des plans de Riemann et des sphères d'Euclide. G. Lechalas. Mathesis, Sér. 2, VII, Supplément.
8. Sur la non-identité du plan Riemannien et de la sphère Euclidienne. P. Mansion. Mathesis, Sér. 2, VII, Supplément.
9. Relations entre les distances de 5 et de 6 points en géométrie Euclidienne et en géométrie non-Euclidienne. P. Mansion. Mathesis, Sér. 2, VII, Supplément.
10. Théorèmes fondamentaux de la géométrie sphérique. V. Sikstel. Grun. Archiv 2. R. XV, 159, 403.
11. Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica. L. Bianchi. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 93.

Ärodynamik.

12. Über die Wirkung des Windes auf schwach gewölbte Flächen. A. v. Obermayer. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 963.
13. Contribution to the theory of the Robinson cup-anemometer. C. Chree. Phil. Mag. Ser. 5, XL, 63.
14. Sur une nouvelle mesure du coefficient de viscosité de l'air. Ch. Fabry et A. Perot. Compt. Rend. CXXIV, 281.
15. The viscosity of mixed guses. W. Sutherland. Phil. Mag. Sér. 5, XL, 421.

Akustik.

16. Akustische Untersuchungen über die Elastizität weicher Körper. M. v. Smoluchowski. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 739.
17. Über die Fortpflanzung des Schalles in bewegter Luft. G. Jäger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 1040.
18. On resultant tones. J. D. Everett. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 199.

Analytische Geometrie der Ebene.

19. Loci of the equations $p = \varphi^u e$ and $p = \varphi^u \psi^v e$. E. W. Hyde. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 122, 160.
20. Die Sekanten und Tangenten des Folium Cartesii. A. Himstedt. Grun. Archiv 2. R. XV, 129.

21. Kreuzcurve enveloppe d'une série d'hyperboles. Cristesco. Mathesis, Sér. 2, VII, 257.
22. Une courbe oubliée, la conchoïde de R. de Sluse. G. Loria. Mathesis, Sér 2, VII, 5.
23. Une courbe du quatrième degré. Cristesco, Petresco, Bastin, J. Jonesco. Mathesis, Sér. 2, VII, 145.
24. Sur une quartique se décomposant dans certains cas en deux ellipses. Déprez. Mathesis, Sér. 2, VII, 258.
25. Lieu d'un point dont les projections sur les côtés d'un quadrilatère donné remplissent certaines conditions. Gob, Colart, Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, VII, 206.
26. La tangente MA en un point M d'une courbe donnée rencontre une droite fixe en A. On porte sur cette droite fixe une longueur constante AN. Déterminer le point où la droite MN touche son enveloppe. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VII, 168.
27. Sur la recherche de certains lieux géométriques. A. C. Mathesis, Sér. 2, VII, 110.

Vergl. Determinanten 62, 63. Ellipse. Hyperbel. Kegelschnitte. Kreis. Normale. Parabel. Quadratur.

Analytische Geometrie des Raumes.

28. Elementare Bestimmung der Punkttransformationen des Raumes, welche alle Flächeninhalte invariant lassen. K. Carda. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. II a) CV, 787.
29. Zur Theorie der Kurven in analytischer Behandlungsweise. A. zur Kammer. Grun. Archiv 2. R. XV, 14.
30. Zur analytischen Kurventheorie. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XV, 124.
31. Über die charakteristische Differentialgleichung der Raumkurven. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XV, 244.
32. Die Krümmung der Raumkurven in singulären Punkten derselben. E. Wölffing. Grun. Archiv 2. R. XV, 146.
33. Erweiterung der Kurvenklasse von konstanter Krümmung. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XV, 447.
34. Sur les congruences associées. C. Guichard. Compt. Rend. CXXIV, 669.
35. Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe. A. Demoulin. Compt. Rend. CXXIV, 1077.
36. Sur quelques applications de la théorie des systèmes cycliques. C. Guichard. Compt. Rend. CXXIV, 1079.
37. Sur une cubique gauche. E. Duporcq. Mathesis, Sér. 2, VII, 97.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 19. Cubatur. Ellipsoid. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Tetraeder.

Astronomie.

38. Distances du système solaire. Delauney. Compt. Rend. CXXIV, 71. — E. Roger ibid. 219.
39. Remarque sur la méthode de Gauss pour la détermination des orbites des petites planètes. J. Perchot. Compt. Rend. CXXIV, 69.
40. Sur les quadratures mécaniques. B. Baillaud. Compt. Rend. XXIV, 737.
41. Sur la précision comparée de divers modes de repérage de la verticale dans les observations astronomiques, géodésiques ou topographiques. Ch. Lallemend. Compt. Rend. CXXIV, 941.
42. Sur les périodes des intégrales doubles et le développement de la fonction perturbatrice. H. Poincaré. Compt. Rend. CXXIV, 1259.
43 Sur le mouvement des péritélies de Mercure et de Mars et du noeud de Vénus. Simonin. Compt. Rend. CXXIV, 1423.
44. Zur Frage der Perihelsbewegung des Planeten Merkur. Ed. v. Haerdtl. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 713.
45. Notiz betreffend die Säkularacceleration des Mondes. Ed. v. Haerdtl. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 8.
46. Sur la désagrégation des comètes. Rôle de Jupiter à l'égard des comètes à courte période. O. Callandreau. Compt. Rend. CXXIV, 1193.

47. Über die Beziehung zwischen Helligkeit und Eigenbewegung der Fixsterne. G. Jäger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 145.
Vergl. Geschichte der Mathematik 156, 157.

B.

Bernoullische Zahlen.

48. Propriété des nombres de Bernoulli. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VII, 94.

Bestimmte Integrale.

49. Sur les résidus des intégrales doubles de fonctions rationnelles. Em. Picard. Compt. Rend. CXXIV, 433.
50. Ein Mittelwertsatz für ein System von n Integralen. G. Kowalewski. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 153.
Vergl. Elliptische Transcendenten 121. Reihen 353. Umkehrungsproblem.

C.

Combinatorik.

51. Sur les combinaisons. Barbette. Mathesis, Sér. 2, VII, 85. — Stuyvaert ibid. 227.
52. Une démonstration du théorème de Wilson. A. Cayley. Mathesis, Sér. 2, VII, 163.
53. Sur la marche d'un pion du jeu de dames. R. H. Van Dorsten. Mathesis, Sér. 2, VII, 117.
54. Nombre des manières de décomposition d'un polygone de $(p-2)n+2$ côtés en n polygones de p côtés. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VII, 164.
55. Über Nachbargebiete im Raum. P. Stäckel. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 276.

Cubatur.

56. Sur la formule des trois niveaux. Goulard. Mathesis, Sér. 2, VII, 105.

Cylinderfunktionen.

57. Sur quelques propriétés des fonctions Besséliennes, tirées de la théorie des fractions continues. L. Crelier. Annali mat. Sér. 2, XXIV, 131.

D.

Determinanten.

58. Über Beziehungen zwischen den Determinanten einer Matrix. W. Ahrens. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 65. [Vergl. Bd. XLI Nr. 30.]
59. Sulle varie forme che possono darsi alle relazioni fra i determinanti di una matrice rettangolare. Ern. Pascal. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 241.
60. Eine Determinantenformel. E. Schulze. Zeitschr. Math. Phys XLII, 313.
61. Démonstration de la propriété fondamentale des Wronskiens. A. Demoulin. Mathesis, Sér. 2, VII, 62.
62. Décomposition en facteurs rationnels d'un déterminant du troisième ordre. Hacken. J. Neuberg. Mathesis, Sér. 2, VII, 232.
63. On Lagrange's determinantal equation Thom. Muir. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 220.

Differentialgleichungen.

64. Sur la réduction du problème général de l'intégration. Riquier. Compt. Rend. CXXIV, 490.
65. Sur l'intégration de certaines équations différentielles par des séries. Em. Picard. Compt. Rend. CXXIV, 214.
66. Le equazioni differenziali lineari equivalenti alle rispettive equazioni differenziali aggiunte di Lagrange. Franc. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 339.
67. Sur les intégrales premières des systèmes différentiels. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXIV, 136.
68. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires du troisième ordre. A. Boulanger. Compt. Rend. CXXIV, 1011.
69. Sur les singularités des équations aux dérivées partielles. J. Beudon. Compt. Rend. CXXIV, 671.

70. Sur la méthode des approximations successives de M. Picard. S. Zaremba. Compt. Rend. CXXIV, 554.
71. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Eman. Czuber. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. II a) CIII, 295.
72. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables. Catton. Compt. Rend. CXXIV, 744.
73. Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre, dont les deux systèmes de caractéristiques sont confondus. E. v. Weber. Compt. Rend. CXXIV, 1215.
74. Remarques sur une note récente de *M.* E. v. Weber. E. Goursat. Compt. Rend. CXXIV, 1294.
75. Zur Theorie der Gleichung $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\Delta\varphi$ auf Grund der Kirchhoffschen Gleichung für das Huygens'sche Prinzip. J. Jung. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 278.
76. Sur l'intégration de l'équation $\Delta u = F(u, x, y)$. Em. Picard. Compt. Rend. CXXIV, 1488.
77. Sur l'équation des télégraphistes. Le Roux. Compt. Rend. CXXIV, 143.
78. Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires par leur valeur sur une surface fermée. E. Le Roy. Compt. Rend. CXXIV, 1508.

Vergl. Geschichte der Mathematik 173. Mechanik. Oberflächen.

Differentialquotient.

79. Sur les différentielles successives d'une fonction de plusieurs variable. Moutard. Compt. Rend. CXXIV, 603. — E. Goursat ibid. 676.

Dreiecksgeometrie.

80. Théorèmes sur le triangle. Franc. Ferrati. Mathesis, Sér. 2, VII, 241.
81. Sur la ligne d'Euler d'un triangle. Francq, Colette, Déprez, Seligmann. Mathesis, Sér. 2, VII, 71.
82. Sur la ligne d'Euler dans le cas qu'un des angles du triangle est de 60° ou de 120°. A. Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, VII, 77.
83. Sur le point de Tarry et le point de Steiner d'un triangle. A. Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, VII, 174.
84. Quatre cercles par rapport auxquels l'orthocentre d'un triangle est d'égale puissance. Déprez. Mathesis, Sér. 2, VII, 73.
85. Konstruktion der Trägheitsaxen eines Dreiecks. O. Richter. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 338.
86. Sur le centre des transversales angulaires égales. Déprez. Mathesis, Sér. 2, VII, 156. [Vergl. Bd. XLII Nr. 93.]
87. Théorème sur les triangles rectangles sur la même hypoténuse. Retali. Mathesis, Sér. 2, VII, 234.
88. Propriétés d'un triangle sur les côtés duquel on construit extérieurement des rectangles semblables. P. Bastin. Mathesis, Sér. 2, VII, 21.

E.

Elastizität.

89. Zum Gesetz der elastisch. Dehnungen. R. Mehmke. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 327.
90. Das Potential der inneren Kräfte und die inneren Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind. Jos. Finger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. II a) CIII, 163, 231.
91. Einige Bemerkungen zu Herrn Jos. Fingers Abhandlung „Das Potential der inneren Kräfte u. s. w.“ W. Voigt. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. II a) CIII, 1069.
92. Über die allgemeinsten Beziehungen zwischen endlichen Deformationen und dem zugehörigen Spannungen in aeolotropen und isotropen Substanzen. Jos. Finger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. II a) CIII, 1073.
93. Étude de variations d'énergie. Vaschy. Compt. Rend. CXXIV, 284.

Elektrizität.

94. Généralisation de formules d'électromagnetisme. Vaschy. Compt. Rend. CXXIV, 226. [Vergl. Bd. XLII Nr. 512.]
95. On the electro-magnetic theory of moving charges. W. B. Morton. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 488. — J. Larmor ibid. XLII, 201.
96. On the magnetic force acting on moving electrified spheres. Arth. Schuster. Phil. Mag Ser. 5, XLIII, 1.
97. Über eine neue Folgerung aus der Maxwellschen Theorie der elektrischen Erscheinungen. A. Scheye. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 157.
98. On the wave-surface and rotation of polarization plane in an aelotropic electromagnetic medium. A. McAulay. Phil. Mag. Ser. 5, XLII, 224.
99. Schwingungsvorgang in komplizierten Erregern Hertz'scher Wellen. Jos. v. Geitler. Wien. Akad. Ber (Abtlg. IIa) CIV, 169.
100. Strömung der Elektrizität in Rotationsflächen. Leonh. Fleischmann. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 227.
101. The relation between the atom and the charge of electricity carried by it. J. J. Thomsen. Phil. Mag. Ser. 5, XL, 511; XLI, 51.
102. Über die elektrolytische Leitfähigkeit von wässerigen Lösungen, insbesondere deren Abhängigkeit von der Temperatur. G. Jäger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIX, 408.
103. Über die wechselseitige Induktion zweier auf Kugelschalen gleichmässig gewickelter Windungslagen. Osc. Singer. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 165.
104. Zur Theorie der Dielektrica. Ant. Lampa. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 681.
105. Über die Bestimmung der Dielektrizitätskonstante eines anisotropen Stoffes nach einer beliebigen Richtung aus den Dielektrizitätskonstanten nach den Hauptrichtungen. Ant. Lampa. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 1179.
106. On the passage of electric waves through tubes, or the vibrations of dielectric cylinders. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 125.
107. A method of determining the angle of lag Arth. L. Clark. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 369.
108. On the measurement of alternate currents by means of an obliquely situated galvanometer needle, with a method of determining the angle of lag. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 343.
109. Sur les moteurs asynchrones. A. Potier. Compt. Rend. CXXIV, 538, 642.
110. A theory of the synchronous motor. W. G. Rhodes. Phil. Mag. Ser. 5, XL, 56, 195.
111. Admittance and impedance loci. Fred. Bedell. Phil. Mag. Ser. 5, XLII, 300.
112. Discussion of the currents in the branches of a Wheatstones bridge, where each branch contains resistance and inductance, and there is an harmonic impressed electromotive force. A. C. Crehore and G. O. Squier. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 161.
113. Sur la décharge des conducteurs à capacité, résistance et coefficient de self-induction variables. M. Pétrovitch. Compt. Rend. CXXIV, 452.
114. Zur Theorie der elektrischen Erscheinungen unserer Atmosphäre. W. Trabert. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 1023.

Ellipse.

115. Über die Ellipse vom kleinsten Umfange durch 3 gegebene Punkte. V. v. Dantscher. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 301. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 449.]
116. Résumé des propriétés concernant les triangles d'aire maximum inscrits dans l'ellipse. E. N. Barisien. Mathesis, Sér. 2, VII, 88. [Vergl. Bd. XLI Nr. 65.]
117. Sur une génération connue de l'ellipse. E. N. Barisien. Mathesis, Sér. 2, VII, 247.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 24. Normalen 284, 285.

Ellipsoid.

118. Relations entre trois demi-diamètres d'un ellipsoïde. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VII, 252.
119. Sur l'enveloppe d'un ellipsoide variable. Mandart. Mathesis, Sér. 2, VII, 198.

Elliptische Transcendenten.

120. La moltiplicazione complessa per $\sqrt{-23}$ delle funzioni ellittiche. Franc. Brioschi. Annali mat. Ser 2, XXIV, 335.
121. Sur une formule d'analyse relative à certaines intégrales de fonctions elliptiques par rapport à leur module. F. de Salvert. Compt. Rend. CXXIV, 1008.

Vergl. Abelsche Transcendenten 4.

F.

Faktorenfolge.

122. Sur un produit de n facteurs. A Boutin, G. Bergmans, Audibert. Mathesis, Sér. 2, VII, 236.

Formen.

123. Bemerkungen zu der ausnahmslosen Auflösung des Problems, eine quadratische Form durch eine lineare orthogonale Substitution in eine Summe von Quadraten zu verwandeln. Ad. Kneser. Grun. Archiv 2. R. XV, 225.
124. Über die Komposition der binären quadratischen Formen. F. Mertens. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 103.
125. Über die Laméschen Polynome 2. Ordnung einer Form 5. Ordnung. Em. Waelsch. Wien Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 741.

Funktionen.

126. Sur les opérations en général. C. Bourlet. Compt. Rend. CXXIV, 348.
127. Sur la convergence des substitutions uniformes. E. M. Lémeray. Compt. Rend. CXXIV, 1220.
128. Über einen Satz der Funktionentheorie und seine Anwendung auf isothermische Kurvensysteme und auf einige Theorien der mathematischen Physik. Holzmüller. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 217.
129. Sur les propriétés des fonctions entières. Desaint. Compt. Rend. CXXIV, 746.
130. Über Zahlenteiler ganzer Funktionen. K. Th. Vahlen. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 214.
131. Sur les zéros de certaines fonctions analytiques. Desaint. Compt. Rend. CXXIV, 276.
132. Über die Transcendenz der Zahlen e und π. F. Mertens. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 839.
133. Über die Differentiation empirischer Funktionen. C. Runge. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 205.
134. Remarks upon the analytical representation of the periodic system of the elements. A. Goldhammer. Phil. Mag. Ser. 5, XLII, 277.
135. Sur certaines équations analogues aux équations différentielles. C. Bourlet. Compt. Rend. CXXIV, 1431. — Appell ibid. 1433.
136. Sur les pôles des fonctions uniformes à plusieurs variables indépendantes. Autonne. Compt. Rend. CXXIV, 139.
137. Über eine von Abel untersuchte Funktionsgleichung. P. Stäckel. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 323.

Vergl. Abelsche Transcendenten. Bernoullische Zahlen. Bestimmte Integrale. Combinatorik. Cylinderfunktionen. Determinanten. Differentialgleichungen. Differentialquotient. Elliptische Transcendenten. Faktorenfolge. Formen. Gleichungen. Imaginäres. Kettenbrüche. Logarithmen. Maxima und Minima. Reihen. Substitution. Thetafunktionen. Transformationsgruppen. Umkehrungsproblem.

G.

Geodäsie.

138. Über das Einstellen der dreiteiligen Fluchtpunktschiene. R. Mehmke. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 99.

Geometrie (descriptive).

139. Eine Aufgabe aus der Schattenlehre. Chr. Beyel. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 111.
140. Darstellung der scheinbaren Beleuchtung krummer Flächen (durch Konstruktion der Isophengen). Jul. Mandl. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 807.

Vergl. Perspektive.

Geometrie (höhere).

141. Eine Methode, aus gegebenen Konfigurationen andere abzuleiten. Konr. Zindler. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 311.
142. Zur perspektivischen Lage kollinearer ebener Felder. Kilbinger. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 104.
143. Curve k-gonali di 1ª e di 2ª specie. F. Amodeo. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 1 [Vergl. Bd. XL Nr. 97.]
144. Über einen symbolischen Kalkul auf Trägern vom Geschlechte Eins und seine Anwendung. Em. Weyr. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 365.
145. Die homogenen Koordinaten als Wurfkoordinaten. G. Kohn. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 1166.
146. Zur synthetischen Theorie der Kreis- und Kugelsysteme. O. Rupp. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 623.
147. Zur Konstruktion von Krümmungskugeln an Raumkurven. J. Sobotka. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 144.
148. Über die kubischen Raumkurven, welche die Tangentenfläche einer vorgelegten kubischen Raumkurve in 4,5 oder 6 Punkten berühren. Gust. Kohn. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 1035.
149. Zu den Bemerkungen über doppeltcentrische Vierecke. Chr. Beyel. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 63. [Vergl. Bd. XLI Nr. 97.]
150. Der kubische Kreis mit Doppelpunkt. Chr. Beyel. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 281.
151. Théorèmes sur les triangles trihomologiques. H. Van Aubel. Mathesis, Sér. 2, VII, 53.
152. Sur un rapport anharmonique de valeur constante. R. Buysens et Sollertinsky. Mathesis, Sér. 2, VII, 101.
153. Sur la cubique $\frac{y^2}{a^2} = \frac{x}{ka - x}$. Retali. Mathesis, Sér. 2, VII, 74.
154. Über Kurven 5. Ordnung mit 4 Doppelpunkten. J. de Vries. Wien. Akad. Ber. (Abtlg IIa) CIV, 46.
155. Lieu des points d'inflexion des courbes $y = \cos\sqrt{a^2 - x^2}$ lorsque a varie. E. N. Barisien. Mathesis, Sér. 2, VII, 236.

Vergl. Absolute Geometrie. Mehrdimensionale Geometrie.

Geschichte der Mathematik.

156. Die Apisperiode der alten Ägypter. Ed. Mahler. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa). CIII, 832.
157. Über eine unter den Ausgrabungen auf Rhodos gefundene astronomische Inschrift. Norb. Herz. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 1135.
158. Die Schlussaufgabe in Diophant's Schrift über Polygonalzahlen. G. Wertheim. Zeitschr. Math. Phys. XLII, Hist. litter. Abtlg. 121.
159. Quadrat- und Kubikwurzeln bei den Griechen nach Herons neu aufgefundenen *Μετρικά*. M. Curtze. Zeitschr. Math. Phys. XLII, Hist. litter. Abtlg. 113; ebenda nicht paginiertes Blatt.
160. Die Quadratwurzelformel des Heron bei den Arabern und bei Regiomontan und damit Zusammenhängendes. M. Curtze. Zeitschr. Math. Phys. XLII, Hist. litter. Abtlg. 145.
161. Sur le sens exact du mot „al-djebr“ Carra de Vaux. Biblioth. math. 1897, 1.
162. Einige Beiträge zur Geschichte der arabischen Mathematiker und Astronomen. H. Suter. Biblioth. math. 1897, 83.
163. Die Mathematik bei den Juden. M. Steinschneider. Biblioth. math. 1897, 13, 35, 73, 103. [Vergl. Bd. XLII Nr. 170.]

164. Magister Robertus Anglicus in Montepessulano. P. Tannery. Biblioth. math. 1897, 3.
165. Sur le mot „theca“. G. Eneström. Biblioth. math. 1897, 95.
166. Sur les neuf „limites“ mentionnés dans l'Algorismus de Sacrobosco. G. Eneström. Biblioth. math. 1897, 97.
167. Sur le nom de la „regula coeci“. Carra de Vaux. Biblioth. math. 1897, 32.
168. Eppur si muove. G. Berthold. Zeitschr. Math. Phys. XLII Hist. litter. Abtlg. 5.
169. Über den angeblichen Ausspruch Galileis „Eppur si muove“. G. Berthold. Biblioth. math. 1897, 57.
170. Éditions de John Wilkins, The discovery of a world in the moon de 1638 et de 1640. G. Eneström. Biblioth. math. 1897, 95.
171. Versiera, Visiera e Pseudo-versiera. G. Loria. Biblioth. math 1897, 7, 33.
172. Sur les lettres de Léonard Euler à Jean I Bernoulli. G. Eneström. Biblioth. math. 1897, 51.
173. Sur la découverte de l'intégrale complète des équations différentielles linéaires à coeffecients constants. G. Eneström. Biblioth. math. 1897, 43.
174. Sur Jean Henry Bürmann. M. Cantor. Biblioth. math. 1897, 31.
175. Sur le séjour du général Poncelet à Saratow. G. Bapst. Compt Rend. CXXIV, 1135.
176. Sur Wolfgang et Jean Bolyai. P. Mansion. Mathesis, Sér. 2, VII, 194.
177. Inauguration du monument de N. Lobatschevsky à Kazan. G. Darboux. Compt. Rend. CXXIV, 936.
178. Cinquantième anniversaire de la nomination de Mr. Faye à l'Académie (25. I. 1897). A. Chatin. Compt. Rend. CXXIV, 165. — Faye ibid. 167
179. Wilhelm Schrentzel † 26. I. 1896. Ludwig Schlesinger. Zeitschr. Math. Phys. XLII. Hist. litter. Abtlg. 1.
180. Benj. Gould (27. XI. 1824 — 26. XI. 1896). Loewy. Compt. Rend. CXXIV, 57.
181. Mort de Weierstrass (31. X. 1815 — 19. II. 1897). Mathesis, Sér. 2, VII, 62.
182. Notice sur Weierstrass. Hermite. Compt. Rend. CXXIV, 430
183. Karl Weierstrass. M. d'Ocagne. Mathesis, Sér. 2, VII, Supplément.
184. J. J. Sylvester (3. IX. 1814 — 15. III 1897). P. Mansion. Mathesis, Sér. 2, VII, 245.
185. Mathematisch-historische Vorlesungen und Seminarübungen an der technischen Hochschule zu München. A. v. Braunmühl. Biblioth. math. 1897. 113.
186. Über die neuesten mathemat.-bibliograph. Unternehmungen. G. Eneström. Biblioth. math. 1897, 65.
187. Internationaler Mathematiker-Kongress in Zürich 1897. Zeitschr. Math. Phys. XLII. Hist. litter. Abtlg. 73. Vergl. Cubatur. Rechnen 347.

Gleichungen.

188. Über die Fundamentalgleichungen eines Gattungsbereiches algebraischer Zahlen. F. Mertens. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 5.
189. Sur la transformation des équations algébriques. F. Brioschi. Compt. Rend. CXXIV, 661.
190. Über das Problem der Winkelhalbierenden. A. Korselt. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 304.
191. Condition de réalité des racines de l'équation du 3e degré dont dépend la résolution d'un triangle connaissant le rayon du cercle circonscrit, la surface et celle du triangle formé par les centres des cercles ex-inscrits. Retali. Mathesis, Sér. 2, VII, 230.
192. Zerlegung der Gleichung 4. Grades. Heilermann. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 60, 112.
193. Die Transformation und Auflösung der Gleichung 5. Grades in elementarer Darstellung. W. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 81, 113.
194. Résolution d'un système de trois équations cubiques. V. Cristesco. Mathesis, Sér. 2, VII, 260.
195. Condition nécessaire pour qu'un système de 3 équations homogènes admette une solution autre que $x = y = z = 0$. Colart. Mathesis, Sér. 2, VII, 211. — Delahaye ibid. 212.

Graphisches Rechnen.

196. The radial cursor; a new addition to the slide-rule. F. W. Lanchester. Phil. Mag Ser. 5, XLI, 52.
197. Anwendung der Integralkurve zur Volumteilung. E. Brauer. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 272.
198. Sur un procédé d'intégration graphique des équations différentielles. M. Petrovitch. Compt. Rend. CXXIV, 1081.

H.

Hydrodynamik.

199. Expression des petites composantes transversales de la vitesse dans les écoulements graduellement variés des liquides. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXIV, 1411.
200. Parties tournantes des composantes transversales de la vitesse, dans un écoulement permanent graduellement varié. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXIV, 1492.
201. On an error in the method of determining the mean depth of the ocean from the velocity of seismic sea-waves. Ch. Davison. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 33.
202. Applications of physics and mathematics to seismology. C. Chree. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 173.
203. Über die innere Reibung der Lösungen. Gust. Jäger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 251. [Vergl. Bd. XLI Nr. 425.]
204. Sur le mouvement d'un solide dans un liquide indéfini. R. Liouville. Compt. Rend CXXIV, 72. [Vergl. Bd. XLII Nr. 599.]
205. High tensions in moving liquids. W. Sutherland. Phil. Mag. Sér. 5, XLII, 111.
206. Écoulement graduellement varié des liquides dans les lits à grande section; équations fondamentales. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXIV, 1196.
207. Vérification expérimentale de la théorie de l'écoulement graduellement varié dans les canauxdécouverts. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXIV, 1327.

Hyperbel.

208. On a method of drawing hyperbolas G. J. Burch. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 72. — F. L. O. Wadsworth ibid. 372.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 21. Dreiecksgeometrie 88. Parabel 324.

I.

Imaginäres.

209. Strecken- und Punktrechnung, insbesondere die Rechnung mit parallelen Strecken. Fr. Graefe. Grun. Archiv 2. R. XV, 34.
210. Sur les systèmes de nombres complexes. E. Cartan. Compt. Rend. CXXIV, 1217.
211. Sur les systèmes reels de nombres complexes. E. Cartan. Compt. Rend. XXIV, 1296.

Interpolation.

212. Sur l'interpolation. Em. Borel. Compt. Rend. CXXIV, 673.

K.

Kegelschnitte.

213. Équation focale des coniques. E. N. Barisien. Mathesis, Sér. 2, VII, 193.
214. Axes de symétrie des coniques. Équation du couple des asymptotes. H. Mandart. Mathesis, Sér. 2, VII, 38.
215. Über orthoaxiale Kegelschnitte. Alfr. Salomon. Grun. Archiv 2. R., XV, 1.
216. Sur les cordes de courbure concourantes dans les coniques. Cl. Servais. Mathesis, Sér. 2, VII, 222.
217. Propriété focale des coniques à centre. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VII, 195.
218. Sur une conique inscrite on circonscrite à un triangle. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VII, 63, 81.
219. Sur les coniques circonscrites à un triangle. A. Krahe. Mathesis, Sér. 2, VII, 33.

220. Relation entre les perpendiculaires qu'on abaisse de chaque point d'une conique sur les côtés d'un triangle rectangle. Déprez. Mathesis, Sér. 2, VII, 272.
221. Sur les triangles semiconjugués. J. Neuberg. Mathesis, Sér. 2, VII, 59. — Retali ibid. 142. — Lorent ibid. 142.
222. Une propriété des coniques. J. Wasteels. Mathesis, Sér. 2, VII, 13.
223. Propriété des coniques. E. Buisseret. Mathesis, Ser. 2, VII, 122.
224. Extension aux coniques d'une propriété de cercles remarquée par M. Mannheim. J. Neuberg. Mathesis, Sér. 2, VII, 16. — Droz-Farny ibid. 87.
225. Conique lieu du point de rencontre des côtés non parallèles d'un trapèze de base fixe en grandeur et position, de hauteur constante et dont les diagonales sont rectangulaires. Retali etc. Mathesis, Sér. 2, VII, 173.
226. Intersection d'une conique avec une ou deux circonférences. A. Gob. Mathesis, Sér. 2, VII, 202.
227. Cercle orthoptique mutuel de deux coniques homofocales. J. Neuberg. Mathesis, Sér. 2, VII, 227.

Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Parabel.

Kettenbrüche.

228. Sur les fractions continues. Mme. Prime. Mathesis, Ser. 2, VII, 108.
229. Développement de $\sqrt{x}$ en fraction continue. A. Boutin. Mathesis, Ser. 2, VII, 8.
230. Réduire $\sqrt{a^2-2}$ en fraction continue périodique. A. Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, VII, 101.

Vergl. Cylinderfunktionen.

Kinematik.

231. Ein Beitrag zur Kinematik der Ebene. Friedr. Procházka. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa), CIV, 605.
232. Die kinematische Theorie der Hyperboloidenreibungsräder. Fr. Schilling. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 37.

Kreis.

233. Sur les cercles radicaux et antiradicaux. J. J. Duran Loriga. Mathesis, Sér. 2, VII, 189. [Vergl. Bd. XLII, Nr. 235.]
234. Über Radikalkreise. J. Duran Loriga. Grun. Archiv 2. R. XV, 117, 232.
235. Tangentes communes à deux cercles. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VII, 194.
236. Cercle tangent à trois autres. L. Gérard. Mathesis, Sér. 2, VII, 248.
237. Sur quatre cercles tangents deux à deux. Mathot. Mathesis, Sér. 2, VII, 193.
238. Sur deux points d'un triangle décrivant conjointement des circonférences. Droz-Farny etc. Mathesis, Sér. 2, VII, 235.
239. Théorème sur deux circonférences. J. Jonesco etc. Mathesis, Sér. 2, VII, 147. Vergl. Dreiecksgeometrie 84.

Kristallographie.

240. Über die Symetrieverhältnisse der Kristalle. V. v. Lang. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa), CV, 362.
241. On the use of the globe in the study of crystallography. J. Y. Buchanan. Phil. Mag. Ser. 5, XL, 153.

L.

Logarithmen.

242. Druckfehler in S. Gundelfinger — A. M. Nells Tafeln zur Berechnung 9stelliger Logarithmen. Jos. Blater. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 64.

M.

Magnetismus.

243. On magnetic tractive force. E. Tayl. Jones. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 153.
244. On the effects of magnetic stress in magnetostriction. H. Nagaoka and E. Tayl. Jones. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 454.

245. Über die Gestalt der Kraftlinien eines magnetischen Drehfeldes. Max Jüllig. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 691.
246. The magnetic field of any cylindrical coil. W. H. Everett. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 367.
247. On the magnetic field due to an elliptical current at a point in its plane within it. J. Vir. Jones. Phil. Mag. Ser. 5, XLII, 107.
248. On the possibility of explaining the phenomena of magnetism by the hypothesis of participation of matter in the motion of the magnetic field. B. Rosing. Phil. Mag. Ser. 5, XLII, 314.

Maxima und Minima.

249. Maximum de $xy+yz+zx$ sachant que $x+y+z=2p$. Déprez. Mathesis, Sér. 2, VII, 271.
250. Sur certaines aires minima. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VII, 45.
Vergl. Ellipse 115, 116.

Mechanik.

251. On the laws of irreversible phenomena. Lad. Natanson. Phil. Mag. XLI, 385.
252. The hypotheses of abstract dynamics and the question of the number of the elastic constants. J. G. MacGregor. Phil. Mag. Ser. 5, XLII, 240.
253. Herleitung des Gesetzes vom Kräfteparallelogramm aus der Bewegung eines Körpers im widerstehenden Mittel und Aufstellung einer allgemeinen Gleichung für dynamische Kraftwirkung. Th. Schwartze. Grun. Archiv 2. R. XV, 421.
254. Über die Transformation des Zwanges in allgemeinen Koordinaten. A. Wassmuth. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 281.
255. Von der elliptischen Bewegung eines freibeweglichen Massenpunktes unter der Wirkung von Attraktionskräften. P. Kindel. Grun. Archiv 2. R. XV, 262.
256. Sugli integrali primi quadratici delle equazioni della meccanica. G. Di Pirro. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 315.
257. Über quadratische Integrale der Differentialgleichungen der Dynamik. P. Staeckel. Annali mat. Sér. 2, XXV, 55.
258. Sur les intégrales premières de la Dynamique et sur le problème des n corps. P. Painlevé. Compt. Rend., CXXIV, 173.
259. Sur les intégrales quadratiques des équations de la Dynamique. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXIV, 221.
260. Sur les intégrales quadratiques des équations de la Mécanique. T. Lévi-Civita. Compt. Rend. CXXIV, 392. — Appell ibid. 395.
261. Sulla trasformazioni della equazioni dinamiche. T. Lévi-Civita. Annali mat. Sér. 2, XXIV, 255.
262. Sur une classe de ds^2 à trois variables. T. Lévi-Civita. Compt. Rend. CXXIV, 1434.
263. Zur Theorie der Bewegung eines starren Systems. Ed. Weyr. Wien Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 292.
264. Les solutions périodiques et le principe de moindre action. H. Poincaré. Compt. Rend CXXIV, 713.
265. Sur les petits mouvements périodiques des systèmes. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXIV, 1222.
266. Sur les petits mouvements périodiques des systèmes à longue période. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXIV, 1340.
267. Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi policiclici. V. Volterra. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 29.
268. Ein mechanisches Polycykel als Analogon der Induktionswirkungen beliebig vieler Kreisströme. F. Hasenoehrl. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa), CV, 900.
269. Über einen Satz der Satik. K. Th. Vahlen. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 160.
270. Über ein Problem der Mechanik. A. Karl. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 105.
271. Beiträge zur Theorie der ebenen Gelenkvierecke. R. Müller. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 247.
272. Grundzüge einer Grapho-Ballistik auf Grund der Kruppschen Tabelle. C. Cranz. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 183.

273. Aufgabe über Druckverhältnisse im Innern eines durch einen gewölbten Boden abgeschlossenen Hohlcylinders. C. B. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 280.
274. Über Schraubengeschwindigkeiten eines festen Körpers bei verschiedener Zahl von Stützflächen. P. Somoff. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 133, 161.
275. Sur le rendement des engrenages. L. Lecornu. Compt. Rend. CXXIV, 1225.
276. Sur l'action locomotrice des membres antérieurs du cheval. P. Le Hello. Compt. Rend. CXXIV, 913.

Vergl. Aerodynamik. Akustik. Astronomie. Differentialgleichungen 75. Elastizität. Elektrizität. Funktionen 128. Hydrodynamik. Kinematik. Magnetismus. Molekularphysik. Optik. Potential. Schwerpunkt. Wärmelehre. Wellenbewegung. Winkelteilung 416.

Mehrdimensionale Geometrie.

277. Sur l'emploi de l'espace à quatre dimensions dans l'étude des surfaces algébriques admettant plusieurs séries de coniques. Eug. Cosserat. Compt. Rend. CXXIV, 1004.
278. Sulla equazione $\Delta_2 U + k^2 U = 0$ in uno spazio di n dimensioni. R. Marcolongo. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 301.

Molekularphysik.

279. Über die Unentbehrlichkeit der Atomistik in der Naturwissenschaft. L. Boltzmann. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa), CV, 907.
280. Molecular force and the surface-tension of solutions. W. Sutherland. Phil. Mag. Ser. 5, XL, 477.
281. On the variation of the dissociation coefficient with temperature. S. Roslington Milner. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 286.

N.

Normalen.

282. Lieu d'un point tel que les trois normales menées de ce point à une parabole donnée jouissent de certaines propriétés. Cristescu. Mathesis, Sér. 2, VII, 19. — Déprez ibid. 20.
283. Propriété des deux autres normales menées à une parabole d'un point quelconque d'une normale fixe. A. Gob et Colart. Mathesis, Sér. 2, VII, 124.
284. Construction d'une normale à une ellipse. P. Bastin et Cl. Servais. Mathesis, Sér. 2, VII, 120.
285. Lieu se rapportant au quatre normales menées d'un point variable à une ellipse donnée. A. Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, VII, 68, 109.

O.

Oberflächen.

286. Sur la théorie des surfaces. A. Pellet. Compt. Rend. CXXIV, 451.
287. Sur la théorie des surfaces algébriques au point de vue de la Géométrie de situation et sur les intégrales de différentielles totales. Em. Picard. Compt. Rend. CXXIV, 532.
288. Sur la théorie générale des surfaces. A. Pellet. Compt. Rend. CXXIV, 739.
289. Sur les systèmes de surfaces orthogonales et isothermes. A. Pellet. Compt. Rend. CXXIV, 552.
290. Sur les surfaces ayant même représentation sphérique. A. Pellet. Compt. Rend. CXXIV, 1291.
291. Sur les surfaces isométriques. A. Pellet. Compt. Rend. CXXIV, 1337.
292. Nuove ricerche sulle superficie pseudo-sferiche. L. Bianchi. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 347.
293. Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica. G. Castelnuovo. Annali mat. Ser. 2, XXV, 235.
294. Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche. C. Segre. Annali mat. Ser. 2, XXV, 1.
295. Sulla riduzione delle singolarità di una superficie algebrica per mezzo di trasformazioni birazionali dello spazio. M. Pannelli. Annali mat. Ser. 2, XXV, 67.
296. Die singulären Punkte der Flächen. E. Wölffing. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 14.

297. Regelfläche, deren Striktionslinie auch Krümmungslinie ist. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XV, 250.
298. Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposées. Hadamard. Compt. Rend. CXXIV, 1503.
299. Sulle varietà a tre dimensioni con una curvatura nulla e due eguali. Rem. Banal. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 213.
300. Das erweiterte Theorem von Bour. F. Ebner. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 215.
301. Die Invarianten der allgemeinen Fläche dritter Ordnung. K. Bobek. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 187.
302. Sur la déformation de certains paraboloïdes et sur le théorème de M. Weingarten. Eug. Cosserat. Compt. Rend. CXXIV, 741.
303. Sulle intersezioni di tre superficie algebriche. L. Berzolari. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 165.
304. Einige Konstruktionen bezüglich der Schnittkurven von Umdrehungsflächen mit Ebenen. J. Sobotka. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 371.
305. Sur les surfaces qui peuvent, dans plusieurs mouvements différents, engendrer une famille de Lamé. Eug. Cosserat. Compt. Rend. CXXIV, 1426. — Darboux ibid. 1428.
306. Sur les centres de gravité des surfaces parallèles à une surface fermée. Ern. Duporcq. Compt. Rend. CXXIV, 492.
307. Aufgabe über ein Kugelballon-Netz. S. Finsterwalder. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 63.
308. Una questione geometrica. Gem. Pirondini. Annali mat. Ser. 2, XXV, 61.
Vergl. Absolute Geometrie 7, 8, 11.

Oberflächen zweiter Ordnung.

309. Über das Kriterion der Koaxialität zweier Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung. Jos. Finger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 1061.
Vergl. Ellipsoid.

Optik.

310. On the longitudinal component in light. G. Fr. Fitz Gerald. Phil. Mag. Ser. 5, XLII, 260.
311. Longitudinales Licht. G. Jaumann. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 747.
312. Graphical method for finding the focal lengths of mirrors and lenses. Edw. H. Barton. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 59.
313. Graphical method for lenses. R. S. Cole. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 216.
314. On a simple geometrical construction for finding the intensity of illumination at any point of a plane due to a small source of light symmetrical about an axis perpendicular to that plane. Ch. H. Lees. Phil. Mag. Ser. 5, XL, 463.
315. On the relation between the brightness of an object and that of its image. W. T. A. Emtage. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 504.
316. Über die Helligkeit des verfinsterten Mondes und die scheinbare Vergrösserung des Erdschattens. J. v. Hepperger. Wien. Akad Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 189.
317. On the theory of optical images with special reference to the microscope. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XLII, 167. — G. Johnst. Stoney ibid. 332, 423, 499; XLIII, 139, 273, 368. [Vergl. Nr. 360.]
318. Die Laplacesche und die Salmonsche Schattentheorie und das Saturnring-Schattenproblem. H. Buchholz. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 863.
319. On the division of energy in the emission-spectrum of a black body. W. Wien. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 214.
320. On the resolving power of telescopes and spectroscopes for lines of finite width. F. L. O. Wadsworth. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 317.
321. Über den Einfluss der selektiven Absorption auf die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre. J. v. Hepperger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 173.
Vergl. Elektrizität 98.

P.

Parabel.

322. Propriétés de la parabole. E. Colart. Mathesis, Sér. 2, VII, 25.
323. Théorèmes sur la parabole. E. N. Barisien. Mathesis, Sér. 2, VII, 272.

324. On considère les paraboles dont l'axe passe par un point donné P et qui touchent une droite donnée AB au même point A. Le foyer décrit une hyperbole équilatère, la tangente au sommet enveloppe une parabole. Droz-Farny. Libert. Mathesis, Sér. 2, VII, 276.
325. Parabole enveloppe de la hauteur d'un triangle variable. A. Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, VII, 142. — Barisien ibid. 144.
326. Parabole enveloppe d'une droite. Retali. Mathesis, Sér. 2, VII, 212.
327. Lieu des sommets de paraboles tangentes à deux normales rectangulaires d'une parabole donnée et ayant le même foyer que cette conique. R. Buysens. Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, VII, 255.
328. Cardioïde lieu des foyers des paraboles tangentes à une hypocycloïde. Gob. Mathesis, Sér. 2, VII, 256.

Vergl. Dreiecksgeometrie 88. Normalen 282, 283.

Perspektive.

329. Zur Perspektive des Kreises. Rud. Schüssler. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 107. [Vergl. Bd. XLI Nr. 207 und 208.]

Planimetrie.

330. Résumé de la théorie de l'équivalence. L. Gérard. Mathesis, Sér. 2, VII, 265.
331. Une nouvelle démonstration du postulatum d'Euclide. J. M. Joubin. Mathesis, Sér. 2, VII, 225. — P. Barbarin, Sollertinsky ibid. 266.
332. Trois droites concourent en un même point. Collette, Gob, Kompers. Mathesis, Sér. 2, VII, 69. — J. Jonesco, Mandart, Déprez ibid. 70.
333. Théorème sur les bissectrices d'un angle et de son supplément. Déprez. Mathesis, Sér. 2, VII, 271.
334. Sur 5 droites qui concourent dans un même point chaque fois qu'un angle est arc tg 2. E. Colart. Mathesis, Sér. 2, VII, 77.
335. Sur le théorème relatif au carré de l'hypoténuse et le cinquième postulat d'Euclide. V. Reyes. Mathesis, Sér. 2, VII, 86.
336. Construire un triangle ABC, connaissant AB, AC et sachant que l'angle $C=2B$ ou $C=3B$. Colart. Droz-Farny etc. Mathesis, Ser. 2, VII, 171.
337. Sur un triangle tirant son origine d'un triangle équilatéral ABC en prenant sur ces côtés des segments $AM=x$, $BN=2x$, $CP=3x$ et réunissant M, N, P. H. Mandart. Mathesis, Sér. 2, VII, 98.
338. Sur les pseudocarrés. J. Jonesco. Mathesis, Sér. 2, VII, 48.
339. Construction d'un pseudocarré connaissant un côté et les angles adjacents. Droz-Farny etc. Mathesis, Sér. 2, VII, 209.
340. Sur trois quadrilatères dont deux dérivent du troisième. Bastin. Mathesis, Sér. 2, VII, 119.
341. Construction du pentagone régulier. A. Cayley. Mathesis, Sér. 2, VII, 194.
342. Théorème sur l'hexagone inscrit à un cercle et tel que trois diagonales qui joignent des sommets opposés concourent en un même point. E. Mathot. Mathesis, Sér. 2, VII, 139.

Vergl. Dreiecksgeometrie. Gleichungen 190, 191.

Potential.

343. Über eine Eigenschaft des Potentials unter Annahme eines Greenschen Wirkungsgesetzes. W. Wirtinger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 575.
344. Sur le problème de Dirichlet. S. Zaremba. Compt. Rend. CXXIV, 940.

Vergl. Elastizität. Elektrizität. Magnetismus. Wärmelehre.

Q.

Quadratur.

345. Aire d'une courbe fermée engendrée à l'aide d'une cissoide. Mandart. Mathesis, Sér. 2, VII, 199. — J. Neuberg ibid. 201.

R.

Rechnen.

346. Sur la définition de la multiplication. A. Listray. Mathesis, Sér. 2, VII, 17. [Vergl. Bd. XLII Nr. 343.]
347. La multiplication egyptienne et russe. Plakhovo. Mathesis, Sér. 2, VII, 86.

348. Sur les calculs approchés. L. Gérard. Mathesis, Sér. 2, VII, 248.
Vergl. Wurzelausziehung. Zinseszins.

Reihen.

349. Über den Konvergenzkreis der umgekehrten Reihe. O. Stolz. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 485.
350. Théorème sur les séries entières. Hadamart. Compt. Rend. CXXIV, 492.
351. Remarques utiles dans les calculs de limites. E. Cesaro. Mathesis, Sér. 2, VII, 177.
352. Sur les séries de Taylor. Eug. Fabry. Compt. Rend. CXXIV, 142. [Vergl. Bd. XLII Nr. 687.]
353. Studie zu Raabes Monographie über die Jacob-Bernoullische Funktion. L. Saalschütz. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 1.
354. Si $Q_{n,p}$ désigne la somme des produits p à p des fractions $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \frac{1}{n}$ on a la formule $\sum_{p=1}^{p=n} 2^p Q_{n,p} = \frac{1}{2}(n^2 + 3n)$. Audibert. Mathesis, Sér. 2, VII, 276.
355. Sur deux séries convergentes. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VII, 42.
356. Über Dirichlets Reihen. F. Mertens. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 1093, 1158.
357. Die Summierung einer Gattung trigonometrischer Reihen. Fr. Rogel. Grun. Archiv 2. R. XV, 255.
358. The development of arbitrary functions. J. Perry and H. F. Hunt. Phil. Mag. Ser. 5, XL, 506.
359. On the convergency of Fourier's series. W. Williams. Phil. Mag. Ser 5, XLII, 125.
360. On the general extension of Fourier's theorem. Thom. Preston. Phil. Mag. Sér. 5, XLIII, 281, 458. [Vergl. Nr. 316.)
361. Systeme von arithmetischen Reihen n^{ter} Ordnung. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XV, 332.
362. Sur quelques progressions arithmétiques. Mathesis, Sér. 2, VII, 14.
363. Sur une formule de Newton. E. Lampe. Mathesis, Sér. 2, VII, 109.
364. Sur quelques formules qui représentent par approximation l'arc dont on connait les sinus et le cosinus. E. Lampe. Mathesis, Sér. 2, VII, 129, 153, 183.
365. Eine besondere Gattung goniometrischer Nulldarstellungen. Fr. Rogel. Grun. Archiv 2. R. XV, 431.
Vergl. Abelsche Transcendenten 5. Interpolation.

S.

Schwerpunkt.

366. Sur le centre de gravité de l'aire limitée par une courbe fermée donnée et une certaine autre courbe fermée variable. Gob. Mathesis, Sér. 2, VII, 229.
Vergl. Oberflächen 306.

Stereometrie.

367. Démonstration nouvelle relative à la perpendiculaire à un plan. Dubonis. Mathesis, Sér. 2, VII, 248.

Substitutionen.

368. The substitution group whose order is four. G. A. Miller. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 431.
369. The operation groups of order $8p$, p being any prime number. G. A. Miller. Phil. Mag. Sér. 5, XLII, 195.
370. The transitive substitution groups of order $8p$, p being any prime number. G. A. Miller. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 117.
371. Sur l'énumération des groupes primitifs dont le degré est inférieur à 17. J. A. Miller. Compt. Rend. CXXIV, 1505.
372. Sur une série de groupes primitifs holoédriquement isomorphes à des groupes plusieurs fois transitifs. Ed. Maillet. Compt. Rend. CXXIV, 351.

T.

Tetraeder.

373. Conditions auxquelles doivent satisfaire les arêtes d'un tétraèdre afin que certaines droites partant de quatre de ses angles soient les génératrices d'un hyperboloïde. R. B. Mathesis, Sér. 2, VII, 23.

Thetafunktionen.

374. Sopra due relazioni rimarchevoli fra i valori delle derivate delle funzioni ϑ ellittiche per argomento zero. Ern. Pascal. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 23.

Transformationsgruppen.

375. Sur la détermination du groupe de transformation d'une équation différentielle linéaire. F. Marotte. Compt. Rend. CXXIV, 608.
376. Sulla teoria dei gruppi infiniti continui. P. Medolaghi. Annali mat. Ser. 2, XXV, 179.
377. Des groupes transitifs de classe ef (e et f étant premiers avec $5 \overline{<} e \overline{<} f$) et de degré $ef+k$ (k étant $< e$). Ed. Maillet. Annali mat. Sér. 2, XXV, 219.

Trigonometrie.

378. Relation entre les angles α, β, γ, δ se déduisant d'une équation entre les sinus et les cosinus de ces mêmes angles. A. Droz-Farny. Audibert. Mathesis, Sér. 2, VII, 260.
379. Über die pythagoreischen Dreiecke und ihre Anwendung auf die Teilung des Kreisumfangs: Graeber. Grun. Archiv 2. R. XV, 337, 439.
380. Relationen bei regulären, dem Kreise ein- und umbeschriebenen Polygonen. E. Dolezal. Grun. Archiv 2. R. XV, 172.
381. Sur une relation dans le triangle. E. Colart etc. Mathesis, Sér. 2, VII, 26.
382. Si du pied D de la hauteur AD d'un triangle ABC on abaisse des perpendiculaires DE, DF sur les côtés AB, AC la distance EF est moitié du perimètre du triangle formé en joignant les pieds des hauteurs de ABC. Déprez. Mathesis, Sér. 2, VII, 271.
383. Calculer le côté d'un triangle équilatéral, connaissant les distances d'un point de son plan à ses sommets. Problème analogue pour un tétraèdre régulier. Retali. Mathesis, Sér. 2, VII, 207.
384. Relation ayant lieu dans un triangle sphérique. Cristesco. Mathesis, Sér. 2, VII, 43. — J. Neuberg ibid. 44.
385. Théorème de trigonometrie sphérique. J. Neuberg. Mathesis, Sér. 2, VII, 61.

Vergl. Reihen 363, 364.

U.

Umkehrungsproblem.

386. Sur un mode d'inversion des intégrales multiples. P. Appell. Compt. Rend. CXXIV, 213.
387. Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti. V. Volterra. Annali mat. Ser. 2, XXV, 139.

W.

Wärmelehre.

388. Über die mechanische Analogie des Wärmegleichgewichtes zweier sich berührender Körper. G. H. Bryan und L. Boltzmann. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 1125.
389. Über die Temperaturverteilung längs eines dünnen Drahtes, der von einem konstanten Strome durchflossen wird. P. Czermak. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 1107.
390. Sul problema della temperatura nell' ellissoide. C. Somigliana. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 59.
391. Of the kinetic theory of gas regarded as illustrating nature. G. J. Stoney. Phil. Mag. Ser. 5, XL, 362.
392. Weiterführung der Annäherungsrechnung in der Maxwellschen Gastheorie. H. Benndorf. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 646.

393. Sur les relations exprimant que les divers coëfficients considérés en Thermodynamique satisfont à la loi des états correspondents. E. H. Amagat. Compt. Rend. CXXIV, 547.
394. Folgerungen aus Amagats Versuchen. C. Puschl. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 343.
395. Aktinische Wärmetheorie und chemische Äquivalenz. C. Puschl. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 809.
396. Bemerkungen über Wärmeleitung. C. Puschl. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 989.
397. Zur Theorie der Dissociation der Gase. G. Jäger Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 671.
398. Die Gasdruckformel mit Berücksichtigung des Molekularvolums. G. Jäger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 15.
399. Über den Einfluss des Molekularvolumens auf die mittlere Weglänge der Gasmolekule. G. Jäger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 97.
400. Zur Theorie der Zustandsgleichung der Gase. G. Jäger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 791.
401. Die Erstarrungswärme in Lösungen. O. Tumlirz. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 245.
402. Über die Verdampfungswärme von Lösungen. O. Tumlirz. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 827.
403. Thermal transpiration and radiometer motion. W. Sutherland. Phil. Mag. Ser. 5, XLII, 373, 476.
404. Thermal transpiration and radiometer motion. Osb. Reynolds. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 142.
405. Boyle's law at very low pressures. W. Sutherland. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 11.
406. Über die Berechnung der Abweichungen der Gase vom Boyle-Charlesschen Gesetz und der Dissociation derselben. L. Boltzmann. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 695.
407. On the continuity of isothermal transformation from the liquid to the gaseous state. Th. Preston. Phil. Mag. Ser. 5, XLII, 231.
408. On the straining of the earth resulting from secular cooling. Ch. Davison. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 133.
409. Über die Zusammensetzung der gesättigten Dämpfe von Mischungen. M. Margules. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 1243.
410. On the properties of a mixture of liquids. R A. Lehfeldt. Phil. Mag. Ser 5, XL, 397.
411. Theoretical considerations respecting the separation of gases by diffusion and similar processes. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XLII, 493.
412. Sur la dynamique des réactions chimiques homogènes avec dégagement ou absorption de chaleur. M. Petrovitch. Compt. Rend. CXXIV, 1344.

Vergl. Elektrizität 102.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

413. The asymmetrical probability-curve. F. Y. Edgeworth. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 90.
414. The compound law of error. F. Y. Edgeworth Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 207.

Wellenbewegung.

415. On the passage of waves through apertures in plane screens and allied problems. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 259.

Winkelteilung.

416. Über einen Mechanismus, durch den ein beliebiger Winkel in eine beliebige ungerade Anzahl gleicher Teile geteilt werden kann. A. Korselt. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 276.
417. Eine approximative Winkeldreiteilung. C. F. E. Björling. Grun. Archiv 2. R. XV, 223.

Wurzelausziehung.

418. Sur l'extraction de la racine carrée des nombres. E. Barbette. Mathesis, Sér. 2, VII, 59.

419. Extraction de la racine carrée d'un nombre entier. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VII, 161. [Vergl. Bd. XLII, Nr. 418.]

Vergl. Geschichte der Mathematik 159, 160. Kettenbrüche 229, 230.

Z.

Zahlentheorie.

420. Zum Beweise des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Reihe, in welcher das Anfangsglied zur Differenz relativ prim ist, unendlich viele Primzahlen enthält. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XV, 326. [Vergl. Bd. XL, Nr. 276.]

421. Lineare Relationen zwischen Mengen relativer Primzahlen. Fr. Rogel. Grun. Archiv 2. R. XV, 315.

422. Dyadische Koordination der bis 100000 vorkommenden Primzahlen zur Reihe der ungeraden Zahlen E. Suchanek. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 443.

423. Zur additiven Erzeugung der ganzen Zahlen. R. Daublebsky v. Sterneck. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa), CV, 875.

424. Über die Zerlegung der Zahlen in Quadrate. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XV, 328.

425. Über die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch gewisse Formen. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa), CIII, 115.

426. Über die Äquivalenz der reduzierten binären quadratischen Formen von positiver Determinante. F. Mertens. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 995.

427. Einige Bemerkungen zum quadratischen Reziprozitätsgesetze. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa), CIII, 285.

428. Über den quadratischen Reziprozitätssatz und die Summen von Gauss. F. Mertens. Wien. Akad. Ber (Abtlg. IIa) CIII, 1005.

429. Über die Anzahl derjenigen ganzen ganzzahligen Funktionen $n$ten Grades von x, welche in Bezug auf einen gegebenen Primzahlmodul eine vorgeschriebene Anzahl von Wurzeln besitzen. K. Zsigmondy. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa), CIII, 135.

430. Über die Auflösung der Kongruenz $x^2 \equiv a \pmod{p}$. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XV, 335.

431. Über Potenzreihen. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XV, 334.

432. Sur certains points de la théorie des résidus des puissances. Caractères distinctifs des nombres, ou racines, d'où proviement les residus générateurs. De Jonquières. Compt. Rend. CXXIV, 334.

433. Théorème sur les fractions décimales périodiques. Mathesis, Sér. 2, VII, 228. — Stuyvaert ibid. 249. — L. Meurice ibid. 268.

434. Le quotient de $(2m-1)!$ par $m!\,(m-1)!$ est un nombre pair excepté quand m est une puissance de 2. Brien, Colart, Soons. Mathesis, Sér. 2, VII, 231.

435. Questions d'arithmologie. De Rocquigny. Mathesis, Sér. 2, VII, 217.

436. Über rationale Richtungscosinus. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XV, 323.

437. Forme des nombres qui, divisés par $a, b, c\ldots$ laissent respectivement les restes $a', b', c'\ldots$ E. Colart. Mathesis, Sér. 2, VII, 149.

438. Sur certains carrés parfaits. Van Deuren etc. Mathesis, Sér. 2, VII, 196.

439 Sur les nombres triangulaires carrés parfaits. L. Collette. Mathesis, Sér. 2, VII, 40.

440. Décomposition de $(a^2+b^2)^6$ en trois, quatre ou cinq carrés. G. de Rocquigny-Adanson. Mathesis, Sér. 2, VII, 18.

441. Sur l'équation $\frac{n(n+1)}{2}+\frac{x(x+1)}{2}=y^2$, x et y étant des fonctions de n. A. Boutin. Mathesis, Sér. 2, VII, 269.

442. Tout cube est la différence de deux carrés, dont l'un au moins est divisible par 9. E. Fauquembergue. Mathesis, Sér. 2, VII, 50.

443. Solutions entières de l'équation $z_1{}^3+z_2{}^3+z_3{}^3+\cdots+z_n{}^3=(5n+z)z^3$. E. Fauquembergue. Mathesis, Sér. 2, VII, 27.

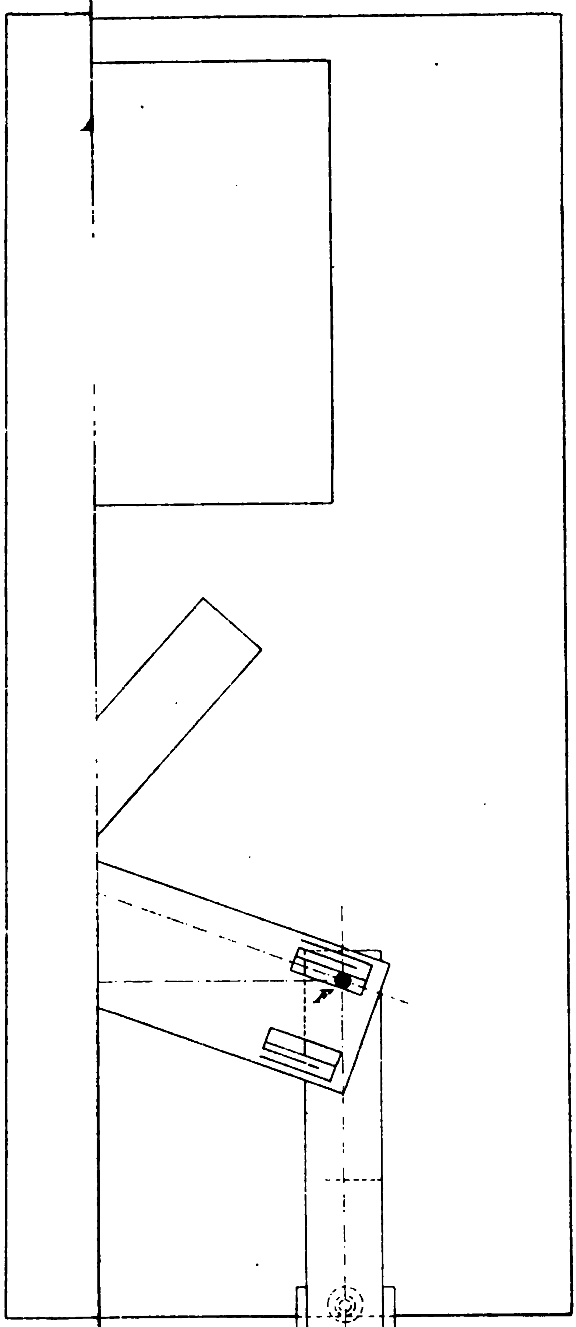
Vergl. Combinatorik 52. Formen. Funktionen 130. Geschichte der Mathematik 158. Gleichungen 188. Reihen 355, 356.

Zinseszins.

444. Sur les lois de l'intérêt. Enr. de Montel. Compt. Rend. CXXIV, 224.

Zum

Tafel V

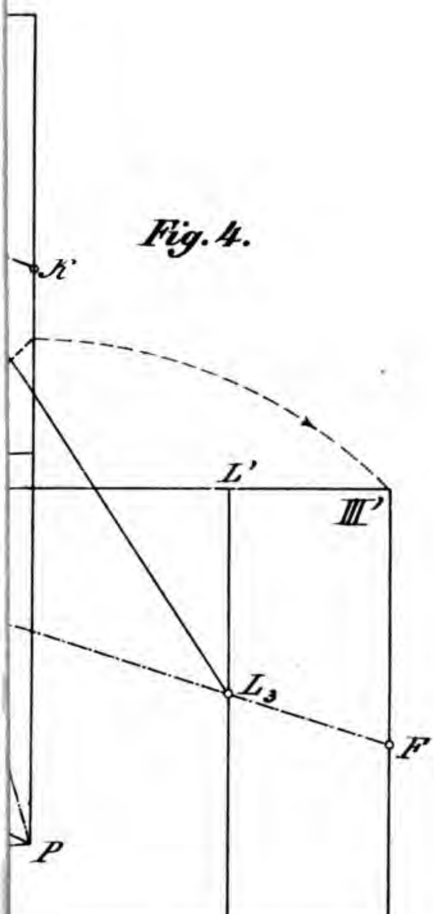


Ztschr

Eschebach & Schaefer, Leipzig.

…gsfiguren zum
…ctiv-Reißer

Fig. 4.



Eschebach & Schaefer Leipzig

Historisch-litterarische Abteilung.

Prix Lobatchefsky

(Premier Concours 1897).

La Société Physico-mathématique de Kasan a l'honneur d'informer qu'elle a décerné dans sa séance solennelle de 3 Novembre (22 Octobre) 1897 le prix de N. I. Lobatchefsky à M. Sophus Lie, professeur ordinaire à l'Université de Leipzig, pour son ouvrage: „Theorie der Transformationsgruppen. Band. III. Leipzig 1893."

Les mentions honorables sont décernées

à M. L. Gérard, professeur au Lycée Ampère (Lyon), pour son ouvrage: „Thèse sur la géométrie non Euclidienne. Paris 1892",

à M. E. Cesaro, professeur ordinaire à l'Université Royale de Naples, pour son ouvrage: „Lezioni di Geometria intrinseca. Napoli 1896",

et à M. G. Fontené, professeur au collège Rollin, pour son ouvrage: „L'hyperespace à $n-1$ dimensions. Paris 1892".

La medaille d'or de N. I. Lobatchefsky, destinée selon le § 16 du réglement du prix Lobatchefsky à recompenser le travail des personnes qui aident à la Société physico-mathématique de Kasan à examiner les ouvrages, présentés au concours à été décernée dans la même séance solennelle de 3 Novembre 1897 à M. Felix Klein, professeur ordinaire à l'Université de Gottingue, pour son rapport sur l'ouvrage de M. Lie. Le rapport de M. Klein vient d'être imprimé à Kasan sous le titre: „Zur ersten Verteilung des Lobatschewsky-Preises (Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie)."

Les rapports sur les ouvrages de M. Gérard, Cesaro et Fontené ont été donnés par M-rs prof. T. Souvorof, D. Seiliger et P. Nasimof, membres de la commission. En outre ont pris part aux travaux de la commisson M-rs prof. D. Doubiago, A. Kotelnikof, D. Sintzof (secrétaire de la commission).

Le nombre total des ouvrages présentés au concours à été égal à neuf.

Extrait du Réglement du Prix Lobatchefsky.

Le prix Lobatchefsky est décerné tous les trois ans. Il est d'une valeur de 500 roubles papiers. Il reste à la volonté de la Société d'en augmenter avec le temps la valeur, si l'état du capital le lui permet (§ 4).

Le prix Lobatchefsky est destiné aux ouvrages relatifs à la géométrie, et de préférence à la géométrie non — Euclidienne (§ 5).

Sont admis à concourir à ce prix les ouvrages imprimés en russe, français, allemand, anglais, italien et latin, adressés à la Société Physico-mathématique par leurs auteurs et publiés dans le cours des six années qui auront précédé le jugement de la Société concernant le prix (§ 6).

Dans aucun cas le prix ne peut être partagé entre deux ou plusieurs auteurs concurrents. Dans le cas où se présenteront plusieurs ouvrages d'égale valeur, c'est le tirage au sort qui en décidera (§ 7).

Le prix sera décerné pour la seconde fois le 3 Novembre 1900. Selon le § 11 du réglement, les ouvrages destinés au concours doivent être adressés à la Société Physico-mathématique de Kasan jusqu'à 3 Novembre 1899.

Président de la Société Physico-mathématique

20 Decembre 1897. A. Vassilief.

Ein „Tractatus de Abaco" aus der Wende des XII. und XIII. Jahrhunderts.

Nach Codex Vindobonensis Palatinus 901, f. 87—96

herausgegeben von

MAXIMILIAN CURTZE

in Thorn.

Der nachfolgend abgedruckte Tractatus de Abaco ist in mehrfacher Hinsicht von Interesse. Er stammt aus jener Zeit, wo das Abacusrechnen mit dem Algorismus im Streite lag, und wo, das zeigt unsere Abhandlung deutlich, beide noch nebeneinander geübt und gelehrt wurden. Er zeigt ferner, dass der Verfasser wenigstens das Abacusrechnen auf die Römer zurückführt und dasselbe im Gegensatz zu dem arabischen Rechnen stellt. Er ist sich der Verschiedenheit beider Methoden ebenso bewusst als des Gemeinsamen derselben, und

erläutert das Verfahren der Araber durch das des Lateinischen Abacus. Bei dem arabischen Dividieren der Brüche benutzt er, so wenigstens glaube ich kann man seine Darlegung nur auffassen, Dezimalbrüche, während er auch das System der römischen Minutien genau auseinandersetzt. Die Zeichen des Abacus unterscheidet er von denen des Algorismus, und aus seinen Zeichen kann man sehen, wie die beiden Formen ȝ, ⊦ für 3 sich entwickelt haben. Dass die Form ⊦ statt ȝ der leichteren Schreibart halber in der spätern flüchtigeren Schrift das alleinige Recht behielt, ist nicht zu verwundern, aber gerade die Verwendung beider Zeichen nebeneinander spricht dafür, dass die Niederschrift dem Ende des XII. oder dem Anfange des XIII. Jahrhunderts angehört, da die Benutzung der Form ⊦ mit dem XIII. Jahrhundert absolut aufhört. Das Charakteristische des Abacusrechnens, dass nur Multiplikation und Division gelehrt werden, nirgends aber Addition und Subtraktion, findet sich auch hier, und zwar für beide Rechnungsarten. Von der komplementären Division ist keine Spur mehr vorhanden, wohl aber in dem arabischen Teile von der komplementären Multiplikation. Möge nun die Abhandlung für sich selber sprechen.

Tractatus de abaco.

| Quia de quantitate, que numerus est, acturi sumus, primo viden- 87
dum est, quid sit numerus, et que eius species. Est autem numerus, per quem numeramus; sic diffinitur, sic autem dividitur. Numerus autem alius digitus, alius articulus. Digitus appellatur omnis numerus ille, qui continetur infra limitem[a], scilicet unus, duo, III, IIII, et ita usque ad X. Ipsum autem X, primum scilicet limitem, appellamus articulum. Et sciendum est, quod ultra predictum articulum[b] nullus est novus numerus, sed predictos digitos cum predicto articulo iungimus[c], et numerando dicimus: undecim, duodecim tredecim, et sic usque ad viginti, qui est secundus articulus. Item sciendum est, quod ultra primum articulum[d] non est novus articulus usque ad centum; scilicet ipsum primum diverso modo multiplicantes[e] articulum facimus istos articulos viginti, triginta, quadraginta et ceteros usque ad centum. Unde etiam dicitur viginti quasi bis geniti, quia a bis X generatur, et triginta a ter decem. Item
supra C non est novus articulus usque ad miriadem, id est ad mille, | sed 87′
diversitates[f] multiplicationis centenarii faciunt istos articulos: ducenti, trecenti et sic usque ad miriadem[g], super quam nec est aliquis novus digitus, nec articulus, sed per adiunctionem miriadis tam cum digitis quam cum articulis ascendimus numerando et facimus duo milia et trecenta etc. Hic de numero, et quisquis pro suo ingenio plura concipiet.

Nunc videndum est, quid sint arcus tabule cum nominibus et figuris ipsos representantes.[h] Appellantur autem sic: singularis, decenus, centenus, millenus. Nunc videndum est, quid arcus, ex quibus numeris, et qualiter ex illis formantur. Et nota, quod solus singu-

laris formatur tantum a digitis et non ab articulis, reliqui vero omnes ab articulis tantum et non a digitis. Unde etiam evenit, caracteres in singulari arcu positos nichil nisi tantum digitos representare,[i] in reliquis vero omnibus arcubus semper articulos et nunquam digitos signi-
88 ficare, si nullum super se habent arcuum caracterem. | Nam, si super se habeat caracterem, digitum et non articulum significat collatus superiori; si collatus ex latere, articulum et non digitum. Porro sciendum est forma, proprietates et continentie arcuum, que intellecte et diligenter annotate, formas etiam arcuum nos videre facient, scilicet[k] qualiter ipsi arcus inter se et a se ipsis formentur, scilicet qualiter proximus[l] formetur a proximo, et tercius a tercio, et quartus a quarto, et sic de ceteris. Est igitur proprietas quedam communis omnibus, hec scilicet, quod proximus ad proximum est decenus, quia decies continet eum; et hinc est, quod proximus a proximo nascitur, quia quilibet et inferiorum decuplatus facit suum superiorem, id est proximum. Item alia proprietas, quod quilibet tercius ad tercium est centenus, quartus ad quartum millenus; et sic proprietates assignando formas etiam quorumlibet invenies.

Dehinc sciendum est nomina caracterum cum figuris et nominibus, et quod quilibet caracter in quolibet arcu positus tociens significat
88′ superscriptum numerum, quotus ipse est. | Verbi gratia. Unitas in singulari arcu unum tantum, in deceno positus decem, in centeno C, in milleno M significat, et sic de ceteris.

Porro his omnibus visis sciendum est, si quid multiplicare volueris, primo rem multiplicandam in suprema tabule linea, scilicet sub figuris arcuum, colloca, et id, per quod rem multiplicandam multiplicare volueris, scilicet multiplicatores, in infima tabule linea colloca. Deinde per inferiores numeros, quos multiplicatores constat esse, adverbialiter prolatos multiplica superiores, et numerum vel numeros, qui ex illa multiplicatione surgunt, in mediam lineam tabule compone secundum regulas arcuum, quarum prima de singulari talis est:

Si[m] singularis arcus quemcumque arcuum multiplicat, in eundem, quem multiplicat, pone digitum, in ulteriori articulum.

Item regula deceni:

Si[n] decenus arcus quemcumque arcum multiplicat, in secundum ab eo, quem multiplicat, pone digitum, in ulteriori articulum.

89 Item regula centeni | et milleni. Hoc tamen diligenter observans, quod quilibet arcus, quoto loco distat a singulari, in talem ab eo, quem multiplicat, ponit digitum, in ulteriori articulum.

Ita dico, si[o] fiunt articuli, quia quandoque ex multiplicatione premissorum numerorum surgit digitus tantum, quandoque articulus tantum, quandoque digitus et articulus. Hec retenta et diligenter considerata sufficiant de multiplicatione dicta. Hec tamen adicimus, quod in collectione[p] facta multiplicatione[q] articuli sunt transferendi, digiti

relinquendi, unde sepe evenit, quod in medio arcus unus vel duo vel tres relinquitur vacuus.

Cum vero multiplicandi scientiam habeamus, conveniens est, ut
etiam dividendi scientiam non ammittamus, cuius fit talis divisio.
Divisio alia simplex, alia multiplex. Simplex, in qua tantum unus
caracter est divisor; multiplex in qua plures divisores ponuntur. Item
mul|tiplex alia continua, alia interrupta. Continua, in qua divisores, 89'
in quibuscunque arcubus positi fuerunt, invicem continuantur; interrupta,
in qua non continuantur divisores, sed interrupti ponuntur, ita scilicet,
quod quandoque unus arcus, qui interiacet, vacuus est, quandoque
plures. Et notandum, quod continuatio sive interruptio dividendorum
non det nomen continue vel interrupte divisioni, sed continuatio vel
interruptio divisorum, sicut etiam simplex divisio accipit nomen a
simplici divisore, id est ab uno caractere divisoris, id est divisorem[r]
representante, et non a caractere rem dividendam representante, quia[s]
in simplici divisione quandoque dividitur unus caracter, quandoque
plures, et possunt illi etiam esse continui vel interrupti, et tamen
simplex erit pro simplici divisore.

Porro divisurus aliquid divisores pone in superiore linea tabule,
res dividendas in medio, denomina|tiones autem, que ab his surgunt, 90
in extrema et infima linea compone. Cuius rei conversa observasti in
multiplicatione: ibi enim multiplicatores, id est, per quos multiplicatur,
in infimo; res multiplicandas, id est numerum, qui multiplicatur, in
supremo; et quod inde surrexit, in medio collocasti.

Ad dividenda igitur hec est generalis et communis regula: Divisor,
si minor vel equalis fuerit rei dividende, superponatur, si maior trans-
feratur in proximum. Collocato itaque divisore, ita scilicet, ut dili-
genter annotes, unde transferatur divisor, scilicet a deceno vel a
centeno aut a milleno, et quod sequentes divisores etiam secum trans-
ferantur servata continuatione eorum priori, si fuerint continui, vel
interruptione eorum priori, si fuerint interrupti, sicut et ubi hec regula
precipit, querere debes, quotiens divisor continebitur in dividendo;
et quotiens continebitur in eo, numerum illum appellabis denomina|- 90'
tionem, quam collocabis in diversis locis secundum diversas quarum-
libet arcuum regulas, quarum diversitatem subscriptam diligenter animum
adverte.

Singularis divisor, quocumque translatus fuerit, subponet sibi denominationem, et qui remanet, sub eo ponetur; ita dico, si aliquid remanet, quia quandoque nichil remanet. Verbi gratia: quotiens est binarius in senario? Ter. Ecce nichil remanet.

Decenus divisor, quocumque translatus fuerit, secundabit a se denominationem, et quod remanet, sub ipso ponetur; centenus terciabit; millenus quartabit, et sic de ceteris: quoto loco distabit a singulari, in totum arcum a se denominationem collocabit, post se tamen. Quia, sicut in multiplicatione[t] numerando ascenditur ab inferioribus

et minoribus numeris ad superiores et maiores, ita converso in divisionibus de superioribus descenditur ad inferiores. In simplici autem, posita ita, sicut regula precipit, denominatione[u], si aliquid superest,
91 quod dividi potest | per integros, iterum dicas generalem regulam: Divisor, si minor vel equalis fuerit rei dividende, superponatur, si maior transferatur in proximum; et dividendum[v] sicut prius dividebis, usque dum nichil remaneat, vel dum non possit dividi. Et nota, divisores ante se vel sub se tantum dividere et in suum locum, si transferuntur, redire. Hec de simplici sufficiant.

In continua vero et interrupta aliter operabis. Posita enim denominatione primi divisioris[w] per eandem multiplica sequentes omnes, et numerum, qui[x] inde surgit, non pones, sicut in simplici solet fieri, sed auferes a re dividenda, que in medio locata est, et nota, quod[y] quandoque aufertur a re locata ante divisorem, qui multiplicatur per denominationem, quandoque sub ipso divisore, et digitus est transferendus, articulus relinquendus; ita dico, si erit ibi digitus et articulus. Hoc facto, si id, quod remanet, adhuc dividi potest, iterum dic generalem illam regulam: Divisor, si minor etc., et de nominatione posita per eandem multiplicabis divisores, qui sequuntur primum. Et sic
91′ comple | ta divisione si scire volueris, si vera vel falsa fuerit, multiplica divisorem vel divisores superpositos per denominationes inferiores, et nota, quod unam pro pluribus ponas, que eundem representet numerum, et si res divisa redierit ad summam, vera erat divisio, sin autem, falsa. Hic notandum est, quod generalis illa regula, quam premisimus, necessitatis causa quandoque infringitur. Tunc videlicet, quando divisor par erit rei dividende, et quando per positam denominationem multiplicatis divisoribus nichil in medio remanet, unde multiplicatio illa auferri possit. Tunc demum divisor, qui par est rei dividende, contra regulam transfertur in proximum, si potest transferri. Nam infra proprium arcum non transfertur, ita ut centenus fiat decenus, vel decenus fiat singularis. Et si adhuc non habes, unde in medio auferatur multiplicatio, divisor, qui fit per denominationem, minuetur.
92 Videlicet si divisor sexies contineatur in re dividenda et nichil | aut par remansit, tu dic, eum quater vel quinquies contineri, ut remaneat, unde sequens multiplicatio auferri possit. Item notandum, si quandoque ipsa denominatio in articulum incidit, tunc minui debet, vel si excesserit articulum, videlicet si duodecies vel amplius divisor in re dividenda, tunc iterum minuetur denominatio infra articulum, et quod remanet, sub eo ponetur. (Siehe die Figur auf folgender Seite.)

92′ Quando vidimus multiplicationem atque[z] divisio | nem latini abaci, nunc pulchrum est, atque utile videtur esse, multiplicationem atque divisionem cognoscere arabici abaci.[aa]

Multiplicaturus aliquid hunc ordinem debes observare. Numerum multiplicandum, cuius summam volueris scire per multiplicationem, pone quandoque in suo arcu pro libito, nam, quamvis non scribuntur,

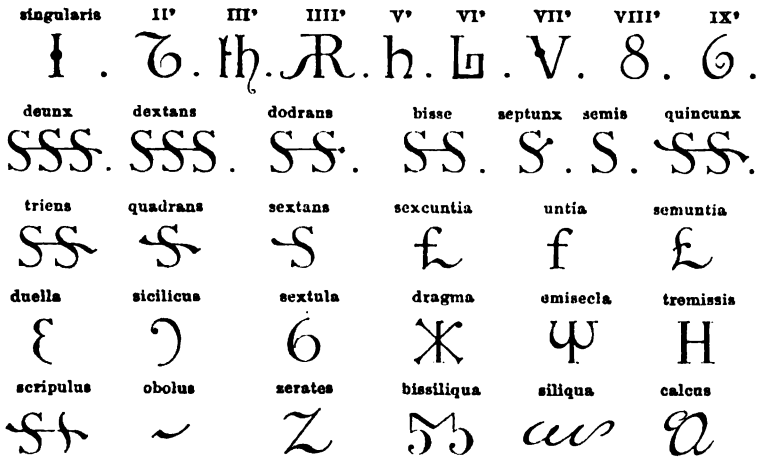
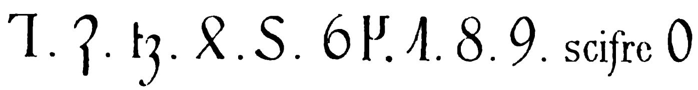


Figure et nomina caracterum latini abaci.

tamen intelliguntur. Quorum si aliquem eorum vacuum volueris relinquere, in loco eiusdem scifre debes ponere, ut notet arcum ibi esse. Quo si post ex multiplicatione aliqua erit numerus ponendus, scifre deletur et numerus inscribitur. Porro multiplicatores sub numerum multiplicandum ponere debes tali ordine conservato, ut primus multiplicatorum, id est caracterum, ponatur sub ultimo caractere multiplicandorum. Verbi gratia. Si singularis et decenus et centenus ponerentur multiplicatores deceni, centeni, milleni, singularis, qui est primus, sub[bb] decenum, et decenus sub centenum et[cc] centenus sub millenum, qui
est ultimus | deceni et centeni, ponatur[dd], et unusquisque superior 93
cum omnibus inferioribus conferatur hoc ordine servato, ut ultimus multiplicandorum primo cum unoquoque multiplicatorum conferatur, et si[ee] numerus, qui surgit de multiplicatione uniuscuiusque figure, numerus est[ff] prime speciei, quod idem est, quasi diceret digitus, super ipsum, qui est collatus, ponitur. Si vero numerus secunde speciei, quod idem est, qui dicitur articulus, in secundo ab eo ponatur loco, id est arcu. Ultimo multiplicandorum sic collato cum unoquoque multiplicatorum deleatur, et in locum eius scifre ponatur, si nullus ibi positus est numerus, et iterum multiplicatores apponunter multiplicandis secundum regulam, et ultimus superiorum conferatur omnibus inferioribus. Et hic ordo erit observandus in[gg] multiplicatione abaci arabici inter quantosvis multiplicandos et multiplicatores, ut semper primus multiplicatorum sub ultimo multiplicandorum ponatur, et unus-
quisque superiorum cum omnibus inferio | ribus primo conferatur. Hec 93′
dicta et diligenter considerata sufficiant de multiplicatione arabica. Est tamen sciendum, hec omnia cum certis regulis esse ponenda, quarum hec est una. Inferiorum differentiarum, id est numerorum[hh],

prima sub superioris numeri dispositionis ultima ponitur, et unaqueque superior cum omnibus inferioribus confertur. In qua collatione cum quis prime speciei creverit, super presentialiter collatam locetur, si vero secunde, ad secundam transferatur conveniat.



Si quis prime speciei aliquem eiusdem multiplicaverit, differentiam minoris de maiori demere, et de reliquo denominationem facere, et iterum differentias eorum ad denarium inter se ductas eidem addere oportet.

Visa multiplicatione restat de divisione pauca adiungere. Divisurus quemlibet numerum inter quantoscunque volueris, hoc ordine disponendi sunt caracteres dividendorum et dividentium. Verbi gratia. Divisurus quingentos sexaginta inter centum viginti, ultimus divisorum sub[ii] ultimo dividendorum ponitur, ita scilicet, ut centenus, qui est ultimus divisorum, locetur sub quingentis, qui ultimus est dividen-
94 dorum. Deinde restat querendum[kk], quotiens divisor sit in | dividendo. Inde denominatione facta super primam divisoris ponitur, et sequentes omnes per denominationem positam multiplicantur, et numerus consurgens inde non ponitur, sed aufertur, ut solet fieri in latino abaco et si adhuc restat, quod dividendum, fit dispositio divisorum et dividendorum secundum regulam dividendorum, que est talis: quotiens ultima divisoris in ultima vel ultimis dividendi fuerit, denominatione super primam divisoris posita tociens de reliquo sequentes auferuntur.[ll] Notandum est, quod in hoc abaco ut in latino divisores vel divisor transferendi sunt de suis arcubus ad superiores. Ut si sit aliquis centenarius et alter decenus, transfertur centenarius ad millenum, decenus ad centenum, et facta divisione redeunt, unde translati sunt. Nec hoc est negligendum, sed diligenter considerandum, in quo arcu ponatur denominatio, scilicet in centeno vel in deceno aut in singulari.

94′ | Hoc[mm] superioribus adiciendum est, quod si divisor maior est dividendo, non ultima divisoris sub[nn] ultima dividendi ponitur, sed regula latini abaci servatur, que est: Divisor, si minor vel equalis fuerit rei dividende, superponatur, si maior transferatur in proximum. Notandum est in divisione, quod si divisor multiplicatus per denominationem non habuerit ex priori multiplicatione sufficientem quem[oo] possit auferre numerum, licet sibi numerum per denominationem multiplicatum subplere ex numero sub se posito, et tunc auferre; ita dico, si posteriori relinquitur, unde eius multiplicatio auferatur, si est posterior.

95 *De divisione | minutiarum.*

As quando dividendus est, vel etiam si plures sint asses dividendi, diligenter debes attendere, que partes eorum sint, quia semper per

decem partes suas transferendi erunt, et per pauciores nullo modo transferetur, quidquid per minutias dividendum erit. Sed quidquid illud erit, quod tali modo transtuleris, per superiores sursum multiplicatum in insequentem transponetur, et illud denominationem esse dicimus. Denominationem vero illam iterum cum suo superiori confer, et secundum consuetum modum multiplicationis, que fit per denominationem, quidquid inde surrexerit, auferes. Et nota, quod in minutiis a maiori ad minus semper quodammodo descendendo pervenimus; sed si in tantum descendimus, quod decem partes ex eo efficere non possumus, indivisibile remanet.

De continentiis minutiarum.

Uncia continet II semuncias; III duellas; IIII sicilicos; VI sextulas; VIII dracmas; XII emiseclas; XVI tremisses; XXIIII scripulos.

Semuncia duellam et dimidiam, | quod est sextula una; II sicilicos; 95′
III sextulas; IIII dracmas; VI emiseclas; VIII tremisses; XII scripulos.

Duella continet sicilicum et terciam eius partem, quod est emisecla; II sextulas; V dracmas et II scripulos, quod est una emisecla; IIII emiseclas; V tremisses et tertiam partem tremissis, quod est obolus; VIII scripulos.

Porro *sicilicus* continet unam sextulam et dimidiam, quod est una emisecla; II dracmas; III emiseclas; IIII tremisses; VI scripulos.

Sextula continet unam dracmam et sextam partem duarum, scilicet scripulum, quia due dracme continent VI scripulos; et continet II emiseclass; II tremisses et sextam partem IIII tremissium, scilicet scripulum tantum, quia valent due dracme quantum IIII tremisses; continet etiam IIII scripulos.

Porro *dracma* continet unam emiseclam et dimidiam, quod est scripulus; II tremisses; et III scripulos.

Porro *emi secla* continet tremissem et duodecimam partem IIII 96
tremissium, quod est unus obolus; et II scripulos.

Porro *tremissis* continet scripulum et obolum.

Scripulus continet duos obolos; III bissiliquas; IIII zerates; VI siliquas; VIII calcos.

Obolus continet bissiliquam et dimidiam, quod est siliqua; II zerates; III siliquas; IIII calcos.

Bissiliqua continet zeratem et eius terciam partem, cuius figuram et nomen non habemus; II siliquas; II caleos et duas tercias partes calci, cuius item figuram et nomen non habemus.

Zerates continet siliquam et dimidiam; et duos calcos.

---

a) *id est X* über der Zeile. — b) *id est X* über der Zeile. — c) *iunigimus* Mscpt. — d) *id est X* über der Zeile. — e) *multiplicans* Mscpt. — f) *diversitas* Mscpt. — g) *id est M* über der Zeile. — h) *presentantes* Mscpt. — i) *presentare* Mscpt. — k) *sed* Mscpt. — l) *proximum* Mscpt. — m) *Si* fehlt im Mscpt. — n) *Si*

fehlt im Mscpt. — o) *si* fehlt im Mscpt. — p) *Collutionem* Mscpt — q) *multiplicationem* Mscpt. — r) *divisores* Mscpt. — s) *presentante, qui* Mscpt. — t) *sicut multiplicationem* Mscpt. — u) *denominationem* Mscpt. — v) *dividendus* Mscpt. — w) *divisores* Mscpt. — x) *quod* Mscpt. — y) *qui* Mscpt. — z) *adque* Mscpt. — aa) *abici* Mscpt. — bb) *in* Mscpt. — cc) *et decenus sub centenum* fehlt im Mscpt. — dd) *ponatur* fehlt im Mscpt. — ee) *si* fehlt im Mscpt. — ff) *est* fehlt im Mscpt. — gg) *in* fehlt im Mscpt. — hh) *id est numerorum* über der Zeile. — ii) *in* Mscpt. — kk) *querendus* Mscpt. — ll) *sequentis aufertur* Mscpt. — mm) *Hec* Mscpt. — nn) *in* Mscpt. — oo) *quod* Mscpt.

Dénis Papin.

Von

Prof. Dr. E. Heydenreich

in Marburg i. H.

Eine Säkularerinnerung.

1698 studierte Dénis Papin eifrig an der Vervollkommnung seiner grossen Erfindung, der Dampfmaschine. Hatte er bis jetzt, seit 1690, das Wasser im Cylinder selbst zu Dampf verwandelt, so projektierte er nun einen besonderen Dampfkessel. Diese Erfindung hielt er, wie er sich 1698 brieflich äussert, für nützlich „pour produire les grands effets que j'attens de la force du feu“; „je suis persuadé que cette invention, si on la pousse comme il faut, pourra produire des utilitez tres considérables“. Diese Prophezeiung fand ihre Erfüllung besonders seitdem J. Watt an Papin anknüpfte und den Dampf nicht bloss, wie das von Papin geschah, zur teilweise bewegenden, sondern zur alleinig treibenden Kraft machte.*

Dénis Papin wurde am 22. August 1647 zu Blois von reformierten Eltern geboren. Sein Vater war „conseiller de roi et receveur général des domaines du comté de Blois“ und zugleich Ältester der reformierten

* Stegmann: Über den ersten Erfinder der vortrefflichen Feuermaschine. Kassel 1780 Progr. — B(annister): Dénis Papin. Blois 1847. — De la Saussaye et A. Péau: La vie et les ouvrages de Dénis Papin. Paris et Blois 1869. 2. Aufl. von Belenet. Blois 1894; bis jetzt erschienen Band I, III, IV, VII, VIII. — Ernouf: Dénis Papin. Sa vie et ses œuvres. Paris 1874. — De Félice: Dénis Papin de Blois. Blois 1879. — Gerland: Leibnizens und Huygens Briefwechsel mit Papin nebst einer Biographie Papins, bearbeitet auf Kosten der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Berlin 1881. — Wintzer: Dénis Papins Erlebnisse in Marburg. Marburg, Elwert 1898. — Die umfangreiche Litteratur über Papin in Zeitschriften oder gelegentliche Notizen über ihn in Monographien über andere Gegenstände verzeichnet Gerland S. 140 flg.

Kirche. Über seine Jugend und wissenschaftliche Vorbildung ist fast nichts bekannt. 1661 oder 1662 bezog er die Universität Angers und promovierte 1669 daselbst zum Doktor der Medizin. 1671—74 lebte er in Paris mit Huygens zusammen. Dieser war seit der Gründung der Akademie der Wissenschaften ihr Mitglied und hatte seine Wohnung in den für die königliche Bibliothek bestimmten Räumlichkeiten. Dort, so erzählt Papin selbst, „je travaillay beaucoup à faire cette machine (gemeint ist eine Pulvermaschine) et ce fut moy qui en fis l'experience en presence de M. Colbert." Die ersten wichtigen Entdeckungen Papins betrafen Verbesserungen an der neuen Erfindung der Luftpumpe. 1674 veröffentlichte er eine Beschreibung der Huygenschen und der ersten von ihm selbst angegebenen Luftpumpe und Versuche mit denselben in dem jetzt äusserst selten gewordenen Werke „Experiences du vuide avec la description des machines qui servent à les faire." Paris 1674. 4. Hubin legte dieselbe der académie des sciences vor und das journal des savants erwähnte sie zweimal mit grossen Lobeserhebungen. Kurz darauf ging Papin nach England „spe quadam inductus ut conditionem hîc loci genio suo accomodam nancisceretur", wie Boyle (Experimentorum novorum physico-mechanicorum continuatio IX Genevae 1682 praef.) hörte. Mit Freude begrüsste ihn dieser und nahm den geschickten Experimentator um so lieber als Hilfsarbeiter an, als er von schmerzhaftesten Steinbeschwerden befallen war. Ferner half Papin Boyle bei dessen Publikationen; doch arbeitete er auch selbständig und erfand eine neue Luftpumpe und eine Windbüchse. 1680 wurde Papin Mitglied der Royal Society. Er dankte, indem er ihr 1681 sein neues Werk „A new Digester" etc. widmete. Die hier bekannt gemachte Erfindung des Digestors oder Kochtopfes hat seinen Namen ganz besonders bekannt gemacht. Dieser Topf ist jetzt in Familien und Laboratorien längst bekannt und geschätzt. Ernouf nannte Papin um dieser Erfindung willen einen bienfaiteur de l'humanité und schon zu Lebzeiten Papins diente sein Digestor zur Erleichterung der Lage der Armen. Die französische Ausgabe des Jahres 1688 bezeichnete mit Recht als das Wesentliche der neuen Erfindung la manière d'amolir les os et de faire cuire toutes sortes de viandes en fort peu de temps et à peu de frais. Der Kochtopf machte schon damals Sensation. König Karl II. von England verlangte sofort einen für sein Laboratorium in Whitehall. Leibniz machte sich zum Echo der allgemeinen Bewunderung mit den Worten: „un de mes amis me mande avoir mangé un pâté de pigeonneaux, préparé de la sorte par le Digesteur et qui s'est trouvé excellent". Seitdem hat mit wechselnder Gunst aber immer wieder aufs neue diese Erfindung sich bewährt. Die Wissenschaftliche Gesellschaft zu Clermont-Ferrand veröffentlichte 1761 eine besondere Schrift Sur l'usage œconomique du digesteur de Papin, und die berühmte Erfindung Watts schloss sich auch an den Digestor an. „In 1761 or 1762", so erzählt Watt selbst, „i made some experiments

on the force of steam in a Papin's digester, and formed a species of the steam engine, by fixing upon it a syringe one third of an inch in diameter."

Der Sekretär Sarotti des Senates der Republik Venedig gründete damals eine „accademia publica di scienzo filosofiche e matematiche" und veranlasste Papin zu einem zweijährigen Aufenthalte in Venedig. Die Neuheit und das glückliche Ergebnis seiner Experimente schufen ihm auch in Italien einen grossen Namen. Ein Florentiner Physiker z. B. stützte sich auf seinen Digestor, um die Ursachen der Vulkane und Erdbeben zu ergründen.

Nach London zurückgekehrt, nahm er nicht wieder die frühere Stellung zu Boyle ein, sondern wurde am 2. April 1684 „temporary curator of experiments" und bezog dafür, dass er für jede Sitzung Experimente bereit hielt und im Bedarfsfall dem Sekretär behilflich war, 30 Pfund Sterling. Wie sehr ihm diese Stellung zusagte, ist aus der grossen Menge Experimente zu sehen, die in dieser Zeit in den Protokollen der Royal Society niedergelegt sind.

Die Aufhebung des Ediktes von Nantes, 18. Oktober 1685, beraubte ihn der Möglichkeit, in seine Heimat zurückzukehren. Wie der grosse Kurfürst von Brandenburg nahm sich auch Landgraf Karl von Hessen der vertriebenen Hugenotten an. Es bildeten sich aus ihnen daselbst reformierte Gemeinden mit der französischen Kirchenverfassung. Professor Maliverné, seit 1686 als Professor der Heraldik in Marburg angestellt, war es vermutlich, der zuerst die Aufmerksamkeit seines Beschützers, des Landgrafen, auf die bedeutenden Leistungen seines Cousin Papin gelenkt hat. Das Projekt einer Centrifugal-Saugpumpe, an dem Papin schon vorher in London gearbeitet hatte, interessierte den Landgrafen mächtig zum Zwecke der Entwässerung der neuangelegten Karlsau. 1688, 14. Februar, ernannte dieser Papin zum „professore matheseos" und verordnete „ihme auch zu jährlicher Besoldung Einhundert und fünffzig Gülden und was darbeneben an früchten die übrige professores philosophiae gegen bezahlung etwas an geld geniessen". Papin hielt seine Antrittsrede über den Nutzen der Mathematik namentlich für die Mechanik und die Hydraulik. Es heisst darin, die Hydraulik sei jetzt für ihn und seine patriotischen Zuhörer die wichtigste Wissenschaft, da es darauf ankomme, mit ihrer Hilfe die Anlage der Karlsaue durch Entwässerung durchführen zu helfen. Auch in den folgenden Semestern beschränkte er sich in seinen Vorlesungen nicht auf reine Mathematik, sondern zog auch die angewandte vielfach heran. So erbot er sich zu Vorträgen über Kriegsbaukunst, Astronomie, über das Werfen von mit Pulver gefüllten Kugeln, Chronologie, Geographie, Optik, Feldmesskunst u. a.

Der von Papin konstruierte Centrifugal-Ventilator, „hessischer Blasebalg" genannt, der sich drehte, „avec une fort grande facilité en sorte que avec le bout de doigt on luy donne un mouvement tres

rapide“, that in einem Kohlenbergwerk in Allendorf treffliche Dienste, indem er den Aufenthalt daselbst durch Zuführung frischer Luft wieder ermöglichte. War Papin bereits durch die Anerkennung eines Huygens, Boyle, Leibniz bestens empfohlen, so wurde er 1689 durch die Ernennung zum korrespondierenden Mitgliede der französischen Akademie der Wissenschaften in Paris ausgezeichnet.

Papin war mit seiner Stellung in Marburg nicht zufrieden. Les princes ont tant de sortes d'occupations qu'ils ne pensent gueres aux sciences et deplus la cour n'est presque jamais icy. Er kann also von dieser Seite wenig hoffen und ebensowenig von der Akademie. Der Professor der Mathematik findet, so klagt er weiter an Huygens, wenig Geltung hier, weil nur eine kleine Anzahl von Studenten herkommt und ihr Brotstudium der Theologie, Rechtswissenschaft und Medizin hier betreibt et de la manière, que ces sciences se traittent jusques à présent, les mathematiques n'ÿ sont point necessaires: ainsi cette jeunesse ne veut pas s'en embarrasser. Ferner sind die Einkünfte der Universität sehr mittelmässig und der Krieg macht ihre Zusammenbringung noch schwieriger, so dass er glaubt, es werde den Herren ein Vergnügen machen, ihnen ein Mittel zu zeigen, wie sie sich seiner ganz entledigen und sein Fach mit dem eines der anderen Professoren verbinden könnten, der dadurch eine nur geringe Vermehrung seines Gehaltes erhalten würde. Auch er würde sehr froh sein, an einem Orte zu leben, wo er an neuen Versuchen arbeiten könne, was in Marburg nicht zu hoffen sei, wo er kaum genug zu leben habe und wo man die meisten Annehmlichkeiten entbehren müsse, die sich mit Leichtigkeit in grossen Handelsstädten finden. So bat er Huygens, ihm in Holland eine Anstellung zu verschaffen. Die Bitte hatte keinen Erfolg. Aber der Kampf ums Dasein hatte zugleich Papins höchste Leistungsfähigkeit angespannt. Denn in demselben Jahre, in dem er sich verstimmt an Huygens wandte, hat er auch die Dampfmaschine erfunden, wodurch sein Name unsterblich geworden ist.

Papin war der erste, der auf Grund der Entdeckungen von Torricelli, Pascal, Otto von Guerike, Huygens und Boyle über den Luftdruck erkannte, dass der Wasserdampf ein einfaches und vorzügliches Mittel sei, um grosse luftleere Räume durch Kondensation herbeizuführen und vermittelst derselben die gewaltige Kraft der darüber befindlichen atmosphärischen Luft nutzbar zu machen. Er kam auf die Erfindung einer Maschine mit Dampf dadurch, dass er eine Pulvermaschine verbessern und namentlich den Übelstand beseitigen wollte, dass man damit nur einen sehr unvollkommen luftleeren Raum erhalten konnte. Er brachte also statt des Schiesspulvers etwas Wasser in den Cylinder und war sich der weittragenden Folgen dessen, was er nunmehr beobachtete, voll bewusst. Als er in den Acta Eruditorum von 1690 seine „nova methodus ad vires motrices validissimas levi pretio comparandas“ veröffentlichte, gab er als Zweck einen

mannigfaltigen an: z. B. Wasser aus den Bergwerken auszupumpen, Bomben zu werfen, gegen den Wind zu rudern. Insbesondere bespricht er den Vorteil der Anwendung seiner Maschine bei Schiffen gegenüber der Verwendung von Galeerensklaven. Dieser ersten Maschine folgte die bereits 1693 ausgearbeitete, aber erst 1695 veröffentlichte Maschine zu dem besonderen Zweck, die Grubenwasser aus einem Bergwerk des Grafen von Sintzendorf zu entfernen. Diese Maschine wurde durch einen besonders konstruierten Sparofen und durch den Papinschen Blasebalg wirksamst unterstützt. Wohl gelungen war auch der Versuch mit einem Taucherschiff. Das Herabsinken und Emporsteigen mit Hilfe der in ledernen Ärmeln steckenden Ruder gelang vorzüglich. Ein von Papin mit herabgenommenes angezündetes Licht brachte er noch brennend wieder mit empor. Durchaus richtige Beobachtungen führten Papin fast 100 Jahre vor Entdeckung des Sauerstoffes auf Ofenkonstruktionen, welche noch gegenwärtig hochgeschätzt sind. Eine Reihe der wichtigsten Abhandlungen dieser Jahre vereinigte Papin 1695 in dem Buch: „Recueil de diverses Pieces touchant quelques nouvelles Machines“. Papins Maschinenerfindung beruht darauf, dass er vermittelst der Dampfkraft die Kräfte der atmosphärischen und der komprimierten Luft in Wirksamkeit setzt; Watt aber erfand die erste Dampfmaschine, an welcher die Dampfkraft zur alleinigen vollen Geltung gelangt.

Der Zweifel an allem und das Leugnen der Gewissheit der äusseren Sinne waren der Ausgangspunkt für die Angriffe der Theologen gegen den Cartesianismus, da dadurch auch die Wahrheit und Gewissheit der christlichen Religion in Gefahr gesetzt schien. Wie anderwärts, so trat auch in Marburg die theologische Fakultät unter ihrem Dekan Gautier gegen einige Professoren der philosophischen auf, deren Dekan damals Papin war, Klage führend, weil gewisse neophilosophie (darunter Papin selbst) gewisse neuerliche, der christlichen Religion zuwiderlaufende Grundsätze zu behaupten und zu lehren sich unterständen. Ein Erlass des Landgrafen an der Universität verfügte, dass den Philosophen nicht zu gestatten sei, dergleichen Ärgernis gebende Lehren vorzutragen und sich in theologische Dinge einzumischen, doch solle sich die theologische Fakultät mit der philosophischen vertragen. Es kamen persönliche Reibereien zwischen Gautier und Papin und namentlich zwischen den beiderseitigen Frauen hinzu und ein Streit zwischen Papins Frau und der eines französischen Perückenmachers. Papin liess für seine Familie eigenmächtig die Stühle in der Kirche höher hinaufrücken, es kam schliesslich so weit, dass Papin von seinem Ältestenamt in der französischen Gemeinde enthoben und von den Sakramenten ausgeschlossen wurde. Verschiedene Friedensversuche schlugen fehl. Der Vizekanzler beantragte aber die Ernennung einer Kommission zur Entscheidung der Sache und eine Entschliessung darüber, ob überhaupt von der französischen Gemeinde

nach Maßgabe der früher in Frankreich geltenden Kirchenordnung durch Presbyterien oder selbstgesetzte synodale Veranstaltungen bindende Beschlüsse gefasst werden dürften oder ob nach der hessischen Landeskirchenordnung verfahren werden müsse. Indem aber der Vizekanzler diese prinzipielle Frage zur Entscheidung stellte, erhielt die an sich unbedeutende persönliche Sache eine Bedeutung für die ganze Zukunft der französisch-reformierten Kirche in Hessen. Alle Instanzen der französischen Kirche Hessens schlossen sich, um diese Verfassung zu behaupten, fest zusammen, unterlagen aber dem monarchischen Staatskirchenregiment. Dieses erzwang die Wiederzulassung Papins zu den Sakramenten.

Der Landgraf Karl war damals voller Pläne. Ein neuer Hafen, ein Kanal, Wasserkünste und andere zahlreiche Projekte machten ihm die Anwesenheit Papins in Kassel erwünscht. Dieser blieb seit 1695 trotz wiederholten Einspruchs der Universität daselbst mit Gehalt und Titel des Universitäts-Professors, zu dem 1699 noch der eines Hessischen Rates hinzukam. Papin besprach alle seine wissenschaftlichen Pläne, insbesondere auch seine Versuche, die Dampfmaschine zu verbessern, mit Leibniz. Der Briefwechsel zwischen beiden gewährt einen Einblick auch in die technischen Leistungen dieses grossen Philosophen. Dieser überliess freilich die Ausführung der Experimente jenem, eignete sich aber die Resultate der Experimente sofort an und schlug neue vor, so dass bis zu einem gewissen Grade beide zusammenarbeiteten. Mit Staunen erkennen wir den Anteil, den der Mann, welchem die Naturwissenschaft die Erfindung der Infinitesimalrechnung verdankt, auch an der Erfindung der Dampfmaschine genommen hat. — Eine Reihe der verschiedenartigsten Versuche Papins lösten sich ab, so solche, Glas und andere Körper zu schmelzen, Schwefel zu verbrennen, Fleisch und Früchte zu konservieren. Auch Fische wollte er konservieren. „Si cela reussit, schrieb er 1697, il nous sera facile d'avoir en tout temps de la marée fraische à Cassell." Diese Versuche mussten auf Befehl des Landgrafen solchen weichen, die den Zweck verfolgten „tacher de penetrer les causes des effets surprenants de la poudre à canon." Dann wünschte der Landgraf zu wissen d'où vient la salure des fontaines salées. Zur Beantwortung dieser Frage waren grössere Wassermassen auf eine beträchtliche Höhe zu heben und dazu schien am geeignetsten la force du feu. Damit eröffneten sich für Papin die Aussichten zur Erfüllung längst gehegter Wünsche. Mit um so grösserem Eifer ging er ans Werk, als er wohl erkannte „les difficultez qui se rencontrent tousjours dans de telles entreprises et qui ne se peuvent surmonter que par une assiduité extraordinaire." Zunächst baute er einen Ofen zur Herstellung eiserner Retorten. Diese aber benötigte er für die Form, die er der Dampfmaschine nunmehr zu geben gedachte. Nicht allein der Saugkraft des sich niederschlagenden Dampfes wollte er sich bei derselben bedienen,

sondern er wollte nunmehr auch „la force de la pression que l'eau exerce sur les autres corps en se dilatant dont les effets ne sont pas borné comme sont ceux de la suction" benutzen. Damit sprach er den Gedanken, der der Hochdruckmaschine zu Grunde liegt, zuerst aus. Mitten in diesem Schaffen und Planen erhielt Papin von den Mitgliedern der Londoner Royal Society die Berufung zum Kurator ihrer Experimente. Papin liess sich durch die Versprechungen des Landgrafen und dadurch, dass ihn dieser zu seinem Rate ernannte, in Kassel halten. Allein die günstigen Verhältnisse liessen für Papin bald nach. Zuerst trat eine Reise des Landgrafen nach Italien, dann eine Papins selbst nach Holland hindernd dazwischen. Dazu brachten Papins Versuche nach einer neuen Wurfmaschine diesen in den unverdienten Geruch des Schwindlers. Ferner wurde der Fürst nur allzusehr durch die äussere Politik von den Künsten des Friedens abgehalten. Schliesslich stellte Papin mit einer neuen Maschine im Treppenhause des vom Landgrafen Karl 1695 erbauten Kunsthauses Versuche an. Aber es war gegen seine ausdrückliche Vorhersage schlechter Kitt verwendet und es drang Wasser ein, dann liessen die Arbeiter das Rohr verstopfen. Abwesenheit des Landgrafen trat hindernd dazwischen, ein neugefertigtes Rohr wurde Papin wieder weggenommen — da riss ihm die mühsam bewahrte Geduld. Sein Entlassungsgesuch hatte diesmal Erfolg.

Mit Eifer begann er nun sofort die Vorbereitungen zu seiner Abreise. Doch hatte er noch mancherlei abzuwickeln. Glücksgüter hatte er ja nicht gesammelt. Aber sein wertvollstes Besitztum, ein kleines Schiff, auf welches er für sein Fortkommen in England die grössten Hoffnungen baute, musste er mitnehmen. Es ist dies ein Apparat, mit welchem Papin die letzten grösseren Versuche anstellte und der zu der ganz unbegründeten Annahme Veranlassung gegeben hat, Papin sei bereits im Besitz eines Dampfschiffes gewesen. Das Schiff war 1703—1704 für eine Belastung von 4000 Pfund erbaut. „Je n'ay point", berichtet er 13. März 1704 ganz ausdrücklich, „préparé celuy ci pour ŷ emploier la force du feu parce que ce n'est pas à moy d'entreprendre trop de choses à la fois". Um das Schiff nach England zu schaffen, wusste er keinen anderen Rat als mit ihm das Wasser herunter bis Bremen zu fahren, es dort auf ein Seeschiff laden und so über die Nordsee bringen zu lassen. Dazu waren aber einige weitere Vorbereitungen nötig. Zunächst war es auf der Fulda zu prüfen und dies auch schon deshalb, weil der Landgraf noch die Versuche damit zu sehen wünschte. Diese fielen höchst befriedigend aus. Die Ruderräder bewährten sich vortrefflich. Das Schiff fuhr mit gleicher Geschwindigkeit gegen den Strom wie mit demselben, und das Gelingen dieser Versuche war die letzte Freude, die Papin erlebte. Der misslichste Punkt der Vorbereitungen waren die Verhandlungen mit Münden. Die dortige Schiffergilde hatte vermöge ihres ausgedehnten Stapel-

rechtes die Befugnis, jedem fremden Schiff die Vorüberfahrt an ihrer Stadt zu verweigern. Der Versuch, einen Passierschein für Münden zu erlangen, schlug fehl. Auf die Erlaubnis des Drosten von Zeuner in Münden allein wagte Papin die Reise nicht; aber aus Münden selbst erhielt er die widersprechendsten Nachrichten: ein Mündener Schiffer Namens Lodwig erbot sich Papins Schiff ins Schlepptau zu nehmen. Die Akten des Amtes Münden bringen über das Weitere folgenden Bericht von Zeuners vom 27. September 1707: „Nachdem ein hiesiger Schiffer, nahmens Lodwig, vor etwa 3 Jahren bey mir angemeldet, dass ein gewißer Frantzoß zu Cassel eine kleine Maschine gemachet und inventirt, wornach große Schiffe ohne Mast und Segel könnten gebauet und mit bloßen Rädern regiret werden, dannenher sich bey mir erkundiget, ob er eß mit seinem Schiffe herunter bringen dürffte, hinzusetzend, daß es ein Werk von keiner Importanz und ein rein Kinderwerk wäre; habe ich es erlaubet. Ich habe auch als es vorgestern über der Schlacht angekommen und gedachter Schiffer es bei mir angezeiget, es selbst in Augenschein genommen, den Mann, welcher es inventirt und bisher Medicus zu Cassel gewesen, nahmens Papin gesprochen, seine Päße und einen Brieff von Hrn. Geheimen Hofrath Leibniz gesehen und wahrgenommen, daß es ein bloßes Model zu obgedachten Schiffbau und gar kein Schiff sey, mit welchen man ohne Gefahr nur bis Gimbte fahren können, auch daß sein Vorhaben, es danägst auf ein großes Schiff laden zu lassen und seine Kunst und Invention der Königin von Engelland dadurch sehen zu lassen und sich zu recommendiren. Ich habe darauf keine Gedanken mir machen können, dass diese Machine dem Privilegio so hiesige Schiffer-Gilde hat, praeiudiciren könne. Dehm ohngeachtet sind die von der Schiffer-Gilde ohnbefugt und ohne sich deßwegen beim Ambt anzumelden zugefahren, haben die Machine arrestiret und ist auch dem Medico Papin so wenig recht wiederfahren, dass er selbige zurücklassen und davon reisen müßen". Es blieb auch nicht bei blosser Konfiskation des Fahrzeuges, es wurde auch „vorheert"; die Schiffer liessen sich wohl zu diesem Vorgehen, zu dem sie schwerlich berechtigt waren, durch den von Papin geleisteten Widerstand verleiten. Mit dem Verlust des Schiffes hat Papins Leben Schiffbruch gelitten.

Papin reiste nun zu Fuss weiter und kam schliesslich glücklich nach England. In London machte er die grössten Anstrengungen, durch neue Vorschläge oder durch Zurückgehen auf bereits früher bearbeitete Ideen nicht etwa seine Lage zu verbessern, sondern seine Existenz zu fristen. Es ist der härteste Kampf ums Dasein, den zu führen er gezwungen ist und in welchem er unterliegt. Einen sicheren Untergang sah er vor sich, wenn ihm die Royal Society nicht half, und diese verweigerte ihre Hilfe und bereitete ihm allerhand Demütigungen. So erfand Papin ein unaufschliessbares Schloss; nachdem aber die Handwerker aus Zorn die Kassette zerstört hatten, kam er um

seinen Lohn. Und ähnlich erging es ihm auch sonst. Papin scheint 1711 in London gestorben zu sein. In seinem letzten uns erhaltenen Brief sagt er: „Je suis dans une triste position puisque, même en faisant bien, je soulève des ennemis contre moi; cependant malgré tout cela je ne crains rien, parce que je me confie au Dieu tout-puissant.“

Wenn wir bedenken, welcher Mut, welche enorme Ausdauer dazu gehörten, mit den Hilfsmitteln der damaligen Zeit, die ihm überdies meist nur unvollkommen zu Gebote standen, seine Experimente anzustellen, wenn wir weiter im Auge behalten, unter welchen schwierigen äusseren Verhältnissen dies geschehen musste, wie den Experimentator oft genug Nahrungssorgen, immer unverständiger Widerstand hemmte, dann werden wir wohl dem Urteil Gerlands beipflichten, dass es wenig Männer gegeben hat, die es ihm gleichzuthun im stande gewesen wären. Dabei ist keines seiner Resultate durch Zufall erhalten, alle sind Früchte angestrengter geistiger Arbeit. Es zog ihn nicht wie einen Abenteurer von einer Aufgabe beliebig zur anderen, in konsequenter Folge schloss sich die folgende Arbeit an die früheren an; wurde er dadurch auf theoretische Erörterungen geführt, so wich er ihnen nicht aus, kehrte aber sobald als möglich auf seinen eigentlichen Platz im Laboratorium zurück. In der Gesamtheit aller dieser Umstände lag gleichzeitig das tragische Moment seines Lebens. Der Standpunkt der Technik des 17. Jahrhunderts sowie die Unmöglichkeit der Verwirklichung seiner Ideen, für die sich erst unser Jahrhundert reif gezeigt hat, hätten ihm nie erlaubt sie so auszuführen, wie er sie im Geiste sah.

Rezensionen.

Über eine neue graphische Methode der Zusammensetzung von Kräften und ihre Anwendung zur graphischen Bestimmung von Inhalten, Schwerpunkten, Statischen Momenten und Trägheitsmomenten ebener Gebilde von Herm. Jos. Hollender. Mit vier lithographierten Tafeln. Leipzig 1896, Verlag von B. G. Teubner. 44 S.

Vielfach wird zur Bestimmung statischer Momente beliebig in der Ebene zerstreut liegender Kräfte eine Methode angewendet, wobei die Kräfte in Komponenten zerlegt werden, von denen die einen durch den Punkt der Ebene gehen, für welchen das Moment bestimmt werden soll, und von denen die anderen entweder in eine Gerade oder einen um jenen Momentenpunkt mit beliebig gewähltem Radius gezogenen Kreis berühren. Da nun die Summe der statischen Momente der durch den Momentenpunkt gehenden Kom-

ponenten Null ist, so ist die Summe der statischen Momente der gegebenen Kräfte gleich dem Produkte aus der Summe der übrigen Komponenten in die Entfernung des Momentenpunktes von der Geraden, oder von der Peripherie des Kreises. Diese Methode, allgemein angewendet auf beliebig in der Ebene zerstreut liegende Kräfte, liefert nun ein Kräfte- und ein sogenanntes „Komponentenpolygon", welche an Stelle des Kräfte- und Seilpolygons der graphischen Statik treten. Da die Polygonseiten den gegebenen Kräftekomponenten entsprechen, so wurde dafür der Name „Komponentenpolygon" gewählt. Das Übergewicht der neuen Methode gegenüber der graphischen Statik liegt in der konstanten Polentfernung auch für beliebig in der Ebene gerichtete Kräfte, was bei dem Seilpolygon nur bei parallel gerichteten Kräften stattfindet.

Im ersten Abschnitt werden die Hilfsmittel vorausgeschickt, die auch die graphische Statik bedarf. Statt aber auf diese einzugehen, setzt der Verfasser das Zustandekommen des Komponentenpolygons auseinander, und zwar unter Annahme verschiedener Bedingungen. In dem letzten Abschnitt wird die Nützlichkeit der neuen Methode an der Hand praktischer Beispiele dargethan. Wie gross der Wert solcher graphischer Methoden, das empfindet derjenige am besten, welcher sich lange damit beschäftigt hat.

B. Nebel.

Alessandro Sandrucci. **Le teorie su l'efflusso dei gas e gli esperimenti** di G. A. Hirn. Firenze 1895. Tipografia minori corrigendi. 60 S.

In dem kleinen Schriftchen wird die Theorie zu dem Hirnschen Experiment gegeben und sodann die Übereinstimmung der Theorie mit der Praxis geprüft.

B. Nebel.

Energie. — Arbeit. — Schnelles Arbeiten ist teurer als langsames Arbeiten. — Die Kräftediagramme. — Die spezifische Wärme der Luft (der Gase). — Der Vorgang, wenn Luft infolge von Erwärmung sich auf grösseres Volumen ausdehnt. — „Energie" im allgemeinen. Von Paul Käuffer. Mainz 1896, Verlag von Viktor von Zabern. 50 S.

Es handelt sich um eine populäre Darstellung der im Titel angegebenen Arbeitsvorgänge, insbesondere bei der Wärme, unter Ausschluss jedweder Mathematik.

B. Nebel.

Streiflichter auf eine neue Weltanschauung in Bezug auf die Beleuchtung, Erwärmung und Bewohnbarkeit der Himmelskörper, eine astrophysisch-metaphysische Hypothese über das innere Walten der Natur und die sich daraus ergebenden Konsequenzen auf die Ethik und Religion nebst einer Plauderei über die Möglichkeit eines „Weltunterganges". Von Wilhelm Zenker. Siebente (1000) erweiterte Auflage mit

einer Reihe offiziell wissenschaftlicher Zustimmungen. Braunschweig 1895, C. A. Schwetschke und Sohn. 88 S. Preis M. 1.

Bei dem grossen Titel kann sich die Rezension beschränken auf das Wesen der Theorie, welches in einer Annahme von positivem (Sonnen-) Magnetismus und negativem (Erd-)Magnetismus besteht.

B. Nebel.

Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications. Par P. Appell et E. Lacour. Paris 1897, Gauthier-Villars. IX und 421 S.

Das Bedürfnis, ein in die Theorie der elliptischen Funktionen einführendes Buch zu besitzen, ist seit längerem oft wiederholt geäussert. Das seinerzeit vorzügliche Buch von Durège, welches dem Zwecke der elementaren Einführung in die genannte Theorie entsprach, ist heute nicht mehr recht brauchbar, nachdem sich jetzt Weierstrass' Theorie der elliptischen Funktionen allgemeiner eingebürgert hat. Eben deshalb sind neuerdings von verschiedenen Seiten Bücher geplant, welche einen den modernen Ansprüchen entsprechenden Ersatz des Durègeschen Werkes zum Ziele haben.

Diesseits gab vor wenigen Wochen Herr Burkhardt einen ersten Band seiner funktionentheoretischen Vorlesungen heraus, welcher eine Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen liefert, und zwar unter direktem Hinblick auf eine im zweiten Bande zu entwickelnde Einführung in die Theorie der elliptischen Funktionen. Ungefähr zu gleicher Zeit mit Burkhardts erstem Bande liessen die Herren Appell und Lacour in einem Bande ihre „Prinzipien der Theorie der elliptischen Funktionen“ erscheinen. Die beiderseitigen Werke können aber sehr wohl neben einander bestehen; denn sie weichen in ihren Grundauffassungen und Methoden stark von einander ab.

Die Herren Appell und Lacour haben sich betreffs der allgemeinen funktionentheoretischen Sätze, welche sie beim Leser voraussetzen, auf das allernotwendigste beschränkt. Sie entwickeln diese Grundsätze im Kapitel I und grenzen dadurch die Mittel ab, mit denen die späteren Untersuchungen zu arbeiten haben. Das Charakteristische ist gänzliche Vermeidung der „konformen Abbildung“ und alleiniger Aufbau der funktionentheoretischen Begriffe auf Grund der Potenzreihenentwickelungen. Es darf dieser Standpunkt in einem französischen Lehrbuche nicht Wunder nehmen, und er ist überdies bei dem didaktischen Zwecke des Buches (von dem gleich noch die Rede sein wird) gewiss zu verteidigen. Gleichwohl hat die Ausschaltung der konformen Abbildung (oder, wenn wir noch deutlicher sein sollen, der Riemannschen Anschauungsweisen) auch ihre fatalen Folgen; vornehmlich werden letztere fühlbar bei den Realitätsbetrachtungen, von denen noch berichtet werden wird. Als wichtiges funktionentheoretisches Werkzeug werden im Kapitel I die Sätze über Definition der Funktionen aus hinreichenden und notwendigen Bedingungen (z. B. Eindeutigkeit, singulären Punkten etc.) unabhängig vom analytischen Ausdruck entwickelt. Eben auf dieser Grundlage erwächst der später so häufig angewandte Schluss

auf die Identität zweier in verschiedenen Gestalten vorgelegten Funktionen. Beim Beweise der fraglichen Grundsätze benützen die Verfasser den Satz von der Existenz des wahren Konvergenzkreises einer Potenzreihe als wichtigstes Fundament. Aber diesen letzteren Satz geben sie einfach ohne Beweis an. Ich glaube nicht, dass die Mehrzahl der Leser diesem Verfahren an einer so wichtigen Stelle des Buches beistimmen werden. Es hätten doch, wenn die Darstellung des Kapitels I an dieser Stelle nicht unterbrochen werden sollte, dem späteren Brauche entsprechend in einer Note am Schlusse des Buches weitere Aufklärungen gegeben werden können.

Übrigens soll diese letztere Bemerkung die allgemeine Anerkennung nicht hindern, dass die Verfasser den didaktischen Zweck ihres Buches als vor allem maßgeblich angesehen haben. In dieser Hinsicht ist zu bemerken, dass das Buch nicht ausschliesslich, ja nicht einmal vornehmlich für die Studierenden der Mathematik im engeren Sinne bestimmt ist. Für solche kann das Buch nur eine Vorübung geben zum Studium ausführlicher Werke. Die Theorie der Teilung und Transformation mit allen ihren interessanten algebraischen und zahlentheoretischen Anwendungen bleibt hier fast ganz ausserhalb; denn was über die Landensche Transformation sowie über die lineare Transformation im zehnten und dreizehnten Kapitel ausgeführt wird, ist nur als Beigabe anzusehen und gehört nicht mehr dem inneren Wesen des Buches an. Auf der anderen Seite aber ist das Buch vornehmlich für solche Studierende bestimmt, welche die Kenntnis der elliptischen Funktionen bei Problemen der Geometrie, Physik, Mechanik etc. zu verwerten wünschen. Von hier rührt die starke Beschränkung in den theoretischen Grundlagen; und vor allem soll dem gedachten Zwecke auch die Beigabe zahlreicher und interessanter Beispiele aus den genannten Gebieten dienen. Auch ausführliche Berücksichtigung von Realitätsbetrachtungen entspricht den Zwecken der Anwendungen. Die Verfasser sprechen die Hoffnung aus, dass sich der Leser nach Studium des Buches der elliptischen Funktionen mit der gleichen Leichtigkeit bedienen könne, wie der trigonometrischen Funktionen. An Reichhaltigkeit der Beispiele wird unser Buch übrigens noch von Greenhills „Applications of elliptic functions“ übertroffen, wo sich Theorie und Praxis fast vollständig durchdringen. Endlich sei noch erwähnt, dass durch Übungsaufgaben, welche den grundlegenden Kapiteln jedesmal am Schlusse angefügt sind, Gewandtheit im Rechnen mit den elliptischen Funktionen erzielt werden soll.

Was den Entwickelungsgang des vorliegenden Buches im einzelnen angeht, so erwächst die Theorie der elliptischen Funktionen hier auf Grundlage des „Begriffs der doppelten Periodizität.“ Die Funktionen $\sigma(u)$, $p(u)$ und $p'(u)$ werden eben dieserhalb durch ihre Produkt- bez. Partialbruchentwickelungen definiert; und die im einleitenden Kapitel gesammelten funktionentheoretischen Hilfsmittel gestatten, weiter in die Natur dieser Funktionen, sowie allgemeiner der doppeltperiodischen Funktionen einzudringen. Dieser Eingang in die Theorie der elliptischen Funktionen hat etwas besonders Elegantes (obschon er die algebraische Seite und die Um-

kehrtheoreme stark zurückdrängt). Besonders zu bemerken ist noch, dass die Verfasser die Analogie zwischen den rationalen, trigonometrischen und elliptischen Funktionen in Ansehung ihrer Zerlegungen in Faktoren einerseits und Partialbrüche anderseits überall hervortreten lassen. Hierdurch wird für das einführende Studium die Auffassung sehr erleichtert.

Realitätsbetrachtungen werden erstlich für den Fall ausgeführt, dass das Periodenparallelogramm ein Rechteck ist, sodann aber auch (in einem sehr weit hinausgeschobenen Kapitel) für den Fall eines rhombischen Periodenparallelogramms. Die Werte von u, für welche $p(u)$ und $p'(u)$ reell ausfallen, werden der Grundanlage des Buches entsprechend, nicht ohne mühsame Betrachtungen, aus den Partialbruchentwickelungen der Funktionen entnommen. Hierbei wird überdies noch nicht einmal die Vollständigkeit der gemachten Angaben recht ersichtlich. Hier hätte sich die konforme Abbildung des Periodenparallelogramms auf eine symmetrische zweiblättrige Riemannsche Fläche als ein weit zugkräftigeres Hilfsmittel der Untersuchung erwiesen.

Ein besonderes Kapitel ist dem Studium der Jacobischen „Bezeichnungen" gewidmet. Man darf hier aber nicht ein tieferes Eingehen auf die wesentlichen Beziehungen der Theorien von Jacobi und Weierstrass erwarten. Dieser übrigens besonders interessante Gegenstand hätte sich nur durch ausführliche Heranziehung algebraischer Betrachtungen, sowie der Transformationstheorie durchführen lassen. Der erste Teil des in Rede stehenden Kapitels ist dadurch sehr beschwerlich geworden, dass Jacobis ursprüngliche in den „Fundamenta nova" gebrauchte Bezeichnungsweise und nicht (wie es Jacobi in den Vorlesungen that) die vier ϑ-Reihen an die Spitze gestellt werden.

Die Realitätsbetrachtungen der Jacobischen Funktionen beziehen sich auf den Fall eines rechtwinkligen Periodenparallelogramms.

An die bisher besprochenen Kapitel schliessen sich in der ganzen Anlage und Methode am engsten die Kapitel XI und XII an, welche die doppeltperiodischen Funktionen zweiter und dritter Art behandeln, d. h. diejenigen, welche bei Vermehrungen des Argumentes um Perioden sich um konstante Faktoren bez. Exponentialfaktoren ändern. Diese Funktionen werden ganz nach dem Vorbild der doppeltperiodischen Funktionen im engeren Sinne näher untersucht, in Produkte entwickelt, in Partialbruchreihen zerlegt u. s. w. Von den Funktionen zweiter Art wird eine sehr interessante Anwendung entwickelt auf die Integration der nach Lamé und Picard benannten Differentialgleichungen. Es sind dies homogene lineare Differentialgleichungen der zweiten bez. der n^{ten} Ordnung zwischen x und y, wo die von x abhängenden Koeffizienten der Differentialgleichungen doppeltperiodische Funktionen gewisser Bauart sind.

Etwas mehr für sich stehen die Kapitel VII und VIII, welche den elliptischen Integralen und speziell der Weierstrassschen Normalform (Kapitel VIII) gewidmet sind.

Endlich sollen hier noch die zum Teil sehr elegant entwickelten Anwendungen charakterisiert werden, welche die Herren Verfasser in ihrem Buche (und zwar jedesmal in unmittelbarem Anschluss an die zugehörigen theoretischen Entwickelungen) behandeln.

Um etwa die Anwendungen auf die analytische Geometrie voranzustellen, so ist die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung, der Raumkurven vierter Ordnung erster Spezies, sowie eine sehr interessante Theorie der Wellenfläche entwickelt. Die kurventheoretischen Untersuchungen schliessen sich jedesmal an die Realitätsdiskussionen, so dass den reellen Zügen der Kurven spezielle Beachtung geschenkt wird. Auch ist ein besonderer Abschnitt den konfokalen Flächen zweiten Grades und den elliptischen Koordinaten gewidmet.

Eine reichhaltige und sehr geschickte Auswahl ist aus den Problemen der analytischen Mechanik getroffen.

Neben den natürlich stets wiederkehrenden Beispielen des einfachen und des sphärischen Pendels finden wir hier eine Reihe von Aufgaben aus der Elastizitätstheorie behandelt; so wird vor allem die Theorie der elastischen Kurve sowie Fläche entwickelt.

Die elliptischen Koordinaten werden zu Betrachtungen aus der Theorie der Wärmeleitung in Anwendung gebracht.

Die vorstehenden kurzen Andeutungen werden genügen, um die Vielseitigkeit des hiermit angezeigten Werkes zu bezeugen. R. Fricke.

Differenzenrechnung. Von A. A. Markoff, autorisierte deutsche Übersetzung von T. Friesendorf und E. Prümm, mit einem Vorwort von R. Mehmke. Leipzig 1896, B. G. Teubner. VI und 194 S.

Durch sinnreiche Kunstgriffe numerische Rechnungen zu kürzen, ist jedenfalls einer der ursprünglichsten Antriebe zum mathematischen Denken gewesen. Und wenn auch die Rechnung im Verfolg der Entwickelung weder die einzige noch die vornehmste Grundlage mathematischer Forschung blieb, so wird doch ein Werk, welches mit interessanten mathematischen Grundsätzen an die Technik des Zahlenrechnens herangeht, allgemeine Beachtung zumal in der gegenwärtigen Zeit gewinnen, in welcher die Mathematik ohnehin bestrebt ist, im Gebiete ihrer praktischen Verwendung an Wirksamkeit und Bedeutung zu steigen.

Die „Rechnung mit endlichen Differenzen" des bekannten Petersburger Mathematikers wurde auf Anregung der Leiter des Göttinger Mathematischen Seminars durch die Herren Friesendorf und Prümm, welche diesem Seminar im Vorjahr angehörten, ins Deutsche übertragen. Und Herr Mehmke, welcher die Übersetzung mit dem Original verglichen hat, rühmt in einem dem Buche mitgegebenen Begleitwort die Güte und Korrektheit der Übersetzung.

Es ist der Begriff der „endlichen Differenzen der verschiedenen Ordnungen" einer Funktion $f(z)$, welcher die Grundlage des vorliegenden

Werkes bildet. Diese Differenzen werden symbolisch durch $\Delta f(z)$, $\Delta^2 f(z), \ldots$ bezeichnet, und sie sind bekanntlich definiert durch

$$\Delta f(z) = f(z+h) - f(z),$$
$$\Delta^2 f(z) = \Delta f(z+h) - \Delta f(z), \ldots,$$

wo h ein endlicher Zuwachs des Argumentes ist. Die Verwendbarkeit dieses Begriffs der endlichen Differenz wird nach den verschiedensten Richtungen hin dargelegt. Dabei wird der ganze Stoff in zwei charakteristisch verschiedene Abschnitte zerlegt. Der erste Abschnitt enthält die Mehrzahl der Anwendungen auf die Technik des numerischen Rechnens, auf Interpolation, angenäherte Berechnung bestimmter Integrale, Herstellung und Benutzung mathematischer Tafeln etc. Der zweite Abschnitt wird dem grösseren Teile nach mehr den Theoretiker interessieren. Es wird hier von der „Summation der Differenzengleichungen" gehandelt, wobei die elementare Theorie der „Integration der Differentialgleichungen" bis in die Einzelheiten hinein vorbildlich gewesen ist.

Äusserlich wird nicht der Begriff der Differenzen $\Delta f(z)$, $\Delta^2 f(z), \ldots$ der Funktionen vorangestellt, sondern den Eingang bildet ein Kapitel über Interpolation.

Das Problem ist: Gegeben sind von einer Funktion $f(z)$ die Werte für m reelle Argumente $a_1, a_2, \ldots a_m$, sowie überdies die Werte der zugehörigen Ableitungen bis zu den Ordnungen

$$(\alpha_1 - 1), \quad (\alpha_2 - 1), \ldots (\alpha_m - 1);$$

hieraus ist die Funktion für ein neues reelles Argument x zu berechnen. Die Lösung wird in der Art vollzogen, dass man $f(z)$ durch eine ganze rationale Funktion $F(z)$ möglichst niederen Grades approximiert und alsdann $F(x)$ als Näherungswert von $f(x)$ angiebt. Die Taylorsche Reihe, die Lagrangesche Interpolationsformel und die Newtonsche Formel für die „Interpolation durch äquidistante Intervalle" ordnen sich dem allgemeinen Ansatze unter. Die letztere Formel giebt den Anlass ab zur Einführung der Differenzen $\Delta f(z)$, $\Delta^2 f(z), \ldots$, welche demnächst insbesondere für ganze und rationale Funktionen spezieller Bauart, sowie allgemein in ihrem Zusammenhange mit den Differentialquotienten der näheren Diskussion unterzogen werden.

Eine erste und besonders wichtige Anwendung der Differenzenrechnung, nämlich die auf Herstellung und Benutzung mathematischer Tabellen, entwickelt das vierte Kapitel. Eine ganze Funktion $f(z)$ vom n^{ten} Grade hat die Eigenschaft, dass für sie die Differenzen

$$\Delta^{n+1} f(z), \quad \Delta^{n+2} f(z), \ldots$$

sämtlich verschwinden. Gilt es eine Tabelle der Werte

$$f(a), \quad f(a \pm h), \quad f(a \pm 2h), \ldots$$

anzulegen, so braucht man nur die $(n+1)$ Werte $f(a)$, $\Delta f(a), \ldots \Delta^n f(a)$ zu kennen, um leicht ersichtlich durch einfache Additionen und Subtraktionen alle unbegrenzt vielen Werte $f(a)$, $f(a \pm h), \ldots$ zu berechnen. Hat man

eine Funktion, für welche $\Delta^{n+1}f, \ldots$ nicht verschwinden, so gelangt man durch die eben gekennzeichnete Methode nur erst zu Näherungswerten. Aber die Stärke der Differenzenrechnung besteht darin, dass sie in einem solchen Fall immer gleich durch einige wenige, und zwar ganz elementare algebraische Schlüsse eine Formel zur Kontrolle des Fehlers entwickelt, wobei im vorliegenden Falle Newtons Formel für die Interpolation durch äquidistante Intervalle die Grundlage abgiebt. Die gegebenen Entwickelungen, bei denen übrigens zugleich solche Fehler berücksichtigt werden, welche möglicherweise den primär gegebenen Werten

$$f(a),\ \Delta f(a), \ldots, \Delta^n f(a)$$

anhaften, dienen zugleich zur Kontrolle von Tabellen, welche auf anderem Wege berechnet sind, sowie anderseits zur Angabe von Funktionswerten für solche Argumente, welche nicht direkt in der Tabelle vertreten sind. Es sind dem Kapitel mehrere Beispiele angefügt, unter denen die Funktion:

$$f(x) = \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

die Hauptrolle spielt. Eine Tabelle der Werte dieses Integrals hat Herr Markoff bereits früher veröffentlicht. Das fünfte Kapitel handelt von der angenäherten Berechnung bestimmter Integrale $\int_c^d f(x)\,dx$. Der Grundgedanke ist, dass $f(x)$ nach den am Anfang des Werkes erörterten Methoden der Interpolation näherungsweise durch eine ganze rationale Funktion $F(x)$ dargestellt wird, welche letztere leicht integriert werden kann.

Das „Restglied" der Interpolationsformel ermöglicht auch hier die Angabe einer Fehlergrenze. Diese Methode der angenäherten Quadratur wird als „Methode der Parabeln" benannt; an die Stelle der Kurve $y = f(x)$ tritt nämlich $y = F(x)$, welche eine „Parabel n^{ten} Grades" darstellt, falls $F(x)$ eine ganze Funktion dieses Grades ist.

Benutzt man insbesondere die Lagrangesche Interpolationsformel:

$$F(x) = \frac{\omega(x)}{(x-a_1)\,\omega'(a_1)} f(a_1) + \frac{\omega(x)}{(x-a_2)\,\omega'(a_2)} f(a_2) + \cdots + \frac{\omega(x)}{(x-a_m)\,\omega'(a_m)} f(a_m),$$

unter $\omega(x)$ die ganze Funktion $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)$ verstanden, so ergiebt sich die Formel:

$$1) \qquad \int_c^d f(x)\,dx = A_1 f(a_1) + A_2 f(a_2) + \cdots + A_m f(a_m),$$

wo die von $f(x)$ unabhängigen „Quadraturkoeffizienten" A_k gegeben sind durch:

$$A_k = \int_c^d \frac{\omega(x)\,dx}{(x-a_k)\,\omega'(a_k)}.$$

Um die Genauigkeit zu erhöhen, kann man eine Unterteilung des Integrationsintervalls vornehmen, und zwar liegt es hier am nächsten, die Teilintervalle einander gleich zu wählen. Durch Kombination dieser Maßnahme mit den eben skizzierten Ansätzen finden sich die wohlbekannten Formeln ein, welche die „Methode der Trapeze" und die „Simpsonsche Regel" darstellen. Bezieht man anderseits die eben unter 1) angegebene Formel auf äquidistante Teilpunkte:

$$a_1 = c,\quad a_2 = c + \frac{d-c}{m-1},\quad a_3 = c + 2\frac{d-c}{m-1}, \cdots, a_m = d,$$

so gelangt man zur „Methode von Cotes", welche diesen Namen trägt, weil Cotes die sich hier einstellenden Quadraturkoeffizienten für $m = 2$ bis 11 berechnet hat.

Gauss Methode der angenäherten Quadratur beruht nicht auf der Auswahl äquidistanter Teilpunkte $a_1, a_2, \cdots, a_m$; vielmehr erhöht man die Genauigkeit durch eine andere Auswahl der $a_1, \ldots, a_m$, und zwar ergiebt sich die Möglichkeit einer derartigen Auswahl der a_k, dass die Formel 1) für jede den Grad $(2m-1)$ nicht übersteigende ganze Funktion exakt giltig ist. Man hat zu diesem Zwecke die a_k mit den Nullpunkten der ganzen Funktion m^{ten} Grades:

$$\omega(z) = \frac{1}{2m(2m-1)\cdots(m+1)}\;\frac{d^m(z-c)^m(z-d)^m}{dz^m}$$

zu identifizieren, welche letztere bis auf einen numerischen Faktor und eine lineare Substitution des Argumentes die Kugelfunktion $P_m(x)$ vorstellt. Das interessante Eingreifen der Kugelfunktionen in die Lehre von den angenäherten Quadraturen giebt Gelegenheit, auf einige hier in Betracht kommende Eigenschaften der Funktionen $P_m(x)$ noch besonders zurückzukommen.

Übrigens werden die zuletzt skizzierten Entwickelungen noch verallgemeinert, indem an Stelle von $\int_c^d f(x)\,dx$ das Integral $\int_c^d g(x)\,f(x)\,dx$ untersucht wird, wobei $g(x)$ irgend eine Funktion von x ist und die Interpolationsformeln auf $f(x)$ in Anwendung gebracht werden.

Nach diesen ausführlicheren Darlegungen sei es erlaubt, über den Inhalt des zweiten Teiles des Markoffschen Werkes nur einige kurze Andeutungen zu geben.

Das Problem der Berechnung einer Funktion $F(x)$ bei gegebener Differenz $\Delta F(x)$ führt zur „Summation", dem Gegenstück der „Integration" der Differentiale; und es bestehen hier, wie die nächsten Ausführungen (achtes Kapitel) zeigen, mannigfache Analogien zwischen den beiderseitigen

Operationen. Eine Menge interessanter Reihensummationen bilden die nächsten Beispiele. Des weiteren tritt die Eulersche Formel:

$$f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(b)=\frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx$$
$$+A_1[f(b)-f(a)]+A_2h[f'(b)-f'(a)]+\cdots$$
$$+A_{m-1}h^{m-2}[f^{(m-2)}(b)-f^{(m-2)}(a)]+R_m$$

in den Mittelpunkt der Betrachtung; hierbei ist $h=\frac{b-a}{n}$ und R_m bedeutet ein Restglied, welches zunächst in Integralgestalt erscheint; die Koeffizienten A sind numerisch, und zwar ist

$$A_{2k}=\frac{(-1)^{k-1}B_k}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2k-1)2k},$$

wo B_k die k^{te} Bernoullische Zahl ist; die A mit ungeradem Index sind indes gleich Null bis auf A_1, welches gleich $-\frac{1}{2}$ ist. Die Eulersche Formel gestattet eine Reihe interessanter Anwendungen und zwar sowohl nach Seiten der Reihensummierung als zur Berechnung von Näherungswerten bestimmter Integrale.

Des weiteren folgen allgemeine Erörterungen über „Differenzengleichungen“, sowie spezielle Ausführungen über „lineare“ Differenzengleichungen mit oder ohne rechte Seite. Hier ist überall die Analogie zu den Differentialgleichungen leitend, wie schon oben angedeutet wurde.

Im letzten Kapitel wird von der Anwendung der Doppelsummen auf Umformung von Reihen gehandelt.

R. Fricke.

E. Pascal, **Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finite.** Milano, U. Hoepli, XII und 330 S.

In dem neusten Doppelbändchen der Hoeplischen Sammlung behandelt Herr Pascal erstlich die Variationsrechnung und im zweiten Teile die Differenzenrechnung. Der erste Teil, die Darstellung der Variationsrechnung, dürfte als besonders wertvoll gelten. Es sind nämlich hier nicht nur die Grundprobleme und die Anwendungen der Variationsrechnung behandelt, sondern vor allem kommt die geschichtliche Entwickelung derselben des ausführlichen zur Geltung, wobei jedoch zu erwähnen ist, dass Weierstrass' Vorlesungen einigermassen ohne Wirkung bleiben. Auch hat Herr Pascal mit grosser Sorgfalt die Litteratur jedes einzelnen Gegenstandes nachgewiesen. Weniger wichtig (für das deutsche Bedürfnis) ist der zweite, die Differenzenrechnung betreffende Teil, nachdem erst vor kurzem das grundlegende Werk Markoffs über diesen Gegenstand in deutscher Übersetzung herausgegeben wurde. Mit letzterem Werke bleibt Herr Pascal im wesentlichen in Übereinstimmung. Zu erwähnen bleibt jedoch, dass die Litteraturnachweise etwas ausführlicher sind, als in dem genannten Markoffschen Werke.

R. Fricke.

Theorie der doppeltperiodischen Funktionen einer veränderlichen Grösse. Von Dr. MARTIN KRAUSE, Professor der Mathematik an der technischen Hochschule in Dresden. Zweiter Band. Leipzig 1897, B. G. Teubner. XII und 306 S.

Der Stoff, welchen Herr Krause im zweiten Bande seines in der Überschrift genannten Werkes behandelt, gruppiert sich um vier Hauptgesichtspunkte.

Erstlich gilt es, die bereits im 1. Bande entworfene Transformationstheorie weiter auszubauen. In der That bleibt noch übrig, die mannigfachen nur von den Perioden abhängenden Koeffizienten in den Transformationsgleichungen auf ihre gegenseitigen Beziehungen zu untersuchen. Die auf Grund des Hermiteschen Transformationsprinzips zu gewinnenden allgemeinen Additionstheoreme der ϑ-Funktionen sind die Quellen, aus denen der Herr Verfasser die gemeinten Beziehungen ableitet.

Die eleganten analytischen Entwickelungen des zweiten Abschnitts dürften, wie entsprechend im Referat über den ersten Band bereits angedeutet wurde, eine Hauptstärke des Buches ausmachen. Das Problem ist, die doppeltperiodischen Funktionen aller drei Arten in trigonometrische Reihen zu entwickeln. Neben eigenen Untersuchungen des Herrn Verfassers kommen hier Arbeiten von Appell und Halphen zur Geltung.

Um seine Untersuchungen über die Picardschen Differentialgleichungen im Zusammenhange vortragen zu können, entwickelt Herr Krause an dritter Stelle die Grundsätze der Theorie der linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung. Es handelt sich um die grundlegenden Untersuchungen von Herrn Fuchs, betreffend die Existenz und Anzahl der Integrale, die singulären Punkte, die determinierende Fundamentalgleichung u. s. w.

Endlich kehrt viertens der Herr Verfasser zu seinen eigenen Untersuchungen der letzten Jahre zurück, indem er die allgemeinen Ansätze der Fuchsschen Theorie am Spezialfalle der Picardschen Differentialgleichungen, deren Koeffizienten eindeutige doppeltperiodische Funktionen sind, zur Durchführung bringt. Diese Differentialgleichungen werden zumal für die niedersten Ordnungen und für kleine Anzahlen der singulären Punkte nach allen Richtungen hin in interessanten Einzeluntersuchungen durchforscht.

In der Vorrede benutzt Herr Krause die Gelegenheit, gegenüber meiner Besprechung des ersten Bandes in gewissen drei Punkten seine Anschauungen nochmals zur Geltung zu bringen; und es ist diese Vorrede auszugsweise auch in dem 4. Hefte des 42. Bandes der Zeitschrift für Mathematik und Physik veröffentlicht worden. Die Ausführungen des Herrn Verfassers betreffen:

1. die Beziehung der Weierstrassschen zur Jacobischen Theorie;
2. den Gebrauch anschaulicher Hilfsmittel bei funktionentheoretischen Deduktionen;
3. die Methoden zur Ableitung von Transformationsgleichungen und ϑ-Relationen.

Der Gebrauch geometrischer Methoden für wissenschaftliche oder unterrichtliche Zwecke ist neuerdings so oft zum Gegenstand der Diskussion gemacht, dass sich nachgerade ein Jeder seine feste Meinung in dieser Hinsicht gebildet haben wird. Während ich demnach den zweiten Fragepunkt hier übergehe, glaube ich beim ersten und dritten noch durch ein paar Zeilen zur Klärung der Diskussion beitragen zu können.

Die Beziehung von Weierstrass zu Jacobi möchte ich weniger von der historischen als sachlichen Seite fassen. Die Funktionen der Weierstrassschen Theorie sind gegenüber allen linearen Transformationen invariant, diejenigen der Jacobischen nur gegenüber einem Teile aller linearen Transformationen, während sie sich bei Ausführung anderer ändern. Diese Änderungen sind hinderlich bei der Exposition der Transformationen höherer Ordnung, welche sich demnach im Anschluss an Weierstrass weit durchsichtiger gestaltet. Durch gewisse rationale Verbindungen der Grössen der Jacobischen Theorie entspringen diejenigen der Weierstrassschen (man denke z. B an die Herstellung der Modulformen erster Stufe aus den drei ϑ-Nullwerten ϑ_0, ϑ_2, ϑ_3). Bei dergleichen rationalen Rechnungen werden die numerischen Koeffizienten in den Potenzreihen nach q für die Grössen der Weierstrassschen Theorie vergleichsweise komplizierter als für diejenigen der Jacobischen. Bei der bekannten Rolle, welche diese Potenzreihen für die Aufstellung der Transformationsgleichungen spielen, tritt die gleiche Erscheinung für die numerischen Koeffizienten dieser letzteren Gleichungen in Kraft. Aus dieser Sachlage entspringt grössere Durchsichtigkeit des prinzipiellen Einblicks bei Weierstrass, grössere formale Einfachheit der Transformationsgleichungen bei Jacobi.

Im dritten Fragepunkte glaube ich durch Ausführung eines Beispiels helfen zu können. Durch die Transformation dritter Ordnung $\omega' = 3\omega$ mögen die drei ϑ-Nullwerte ϑ_0, ϑ_2, ϑ_3 in Θ_0, Θ_2, Θ_3 übergehen. Die Quotienten dieser sechs Grössen mögen alsdann als Funktionen des Periodenquotienten ω in ihrem Verhalten gegenüber linearen Transformationen der Perioden untersucht werden. Sie bleiben bis auf das Zeichen oder bis auf einen Faktor $\pm i$ unverändert bei solchen Transformationen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta},$$

in welchen $\alpha \equiv \delta \equiv 1$, $\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod 6$ ist. Nun lehrt die Theorie der Modulfunktionen, dass die bei jenen Transformationen invarianten Funktionen von ω sämtlich als algebraische Funktionen eines Gebildes vom Geschlechte $p = 1$ aufgefasst werden können, welches äquianharmonisch und demnach durch eine Gleichung $y^2 = x^3 + 1$ darstellbar ist. In diesen x und y würden dann alle jene Funktionen rational darstellbar sein. Speziell lehrt das Periodenverhalten einer ganzen Reihe von ϑ-Quotienten, dass dieselben bereits rational in y allein sind; hierher gehören Formeln wie:

$$\frac{\vartheta_2\Theta_2}{\vartheta_3\Theta_3} = -\frac{4y}{(y+3)(y-1)}, \qquad \left(\frac{\vartheta_3\Theta_2}{\vartheta_2\Theta_3}\right)^2 = -\frac{y+3}{y(y-1)},$$

$$\sqrt{\frac{\vartheta_3\Theta_2{}^3}{\vartheta_2\Theta_3{}^3}} = \frac{2}{y-1}, \qquad \left(\frac{\vartheta_2}{\Theta_2}\right)^2 = y, \cdots$$

Die zwischen ϑ_0, ϑ_2, ϑ_3 Θ_0, Θ_2, Θ_3 bestehenden Relationen werden nun identische Gleichungen in y; und die allgemeinste solche Gleichung (wenn anders man diesen Begriff zulässig finden will) liefert die allgemeinste ϑ-Relation unserer Art, deren Gesamtmannigfaltigkeit hier begrifflich übersehen wird. Eine entsprechende Theorie besteht für alle übrigen Transformationsgrade, wobei das Interesse weiterhin durch Eingreifen der Korrespondenztheorie sich noch erheblich steigert. Über den Wert dieser Auffassung habe ich mich nicht nur beim Referat über den ersten Band des Krauseschen Werkes, sondern auch bereits bei verschiedenen früheren Gelegenheiten geäussert; ich möchte mich demnach in dieser Hinsicht keiner Wiederholungen schuldig machen.

R. Fricke.

Grundzüge der Geschichte der Naturwissenschaften. Von Otto Jaeger, Rektor der Königl. Realanstalt in Cannstatt. Stuttgart 1897, Paul Neff Verlag, VIII u. 120 S.

Wir können es nicht anders denn als kühn bezeichnen, wenn ein Schriftsteller es wagt, auf $7^1/_2$ Druckbogen Grundzüge der Geschichte der Naturwissenschaften zu veröffentlichen. Es gehört dazu entweder ein von der Geschichte der Mathematik bis zur Geschichte der Medizin sich ausdehnendes mehr als unheimliches eigenes Wissen, oder ein unbedingter Glaube an die Unfehlbarkeit der benutzten Geschichtswerke für einzelne Gebiete. Ähnliche Anforderungen wären an einen Berichterstatter zu stellen, welcher sich erlauben wollte, alle Kapitel der kleinen Schrift zu beurteilen, und da wir persönlich diesen Anforderungen nicht zu genügen vermögen, so verwahren wir uns dagegen, als ob diesen Zeilen auch Giltigkeit für die nichtmathematischen Kapitel beigelegt werden wollte. Über die Geschichte der Mathematik handeln aber fünf Kapitel S. 2—6, 20—21, 28—32, 49—50, 74—76, im ganzen etwa 13 Seiten, wovon die letzten $2^1/_2$ der Geschichte der Mathematik im XIX. Jahrhunderte gewidmet sind. Wir müssen zugestehen, dass uns in dem ersten Kapitel nur eine, allerdings ziemlich kräftige Unrichtigkeit aufgefallen ist: der Mathematiker Hippokrates von Chios wird mit dem Arzte Hippokrates von Kos für eine und dieselbe Person gehalten. Eine Unrichtigkeit gleicher Bedeutung ist es, wenn im vierten mathematischen Kapitel von der Taylorschen Reihe gesagt wird, sie gehe auf Johann Bernoulli zurück. Taylor hat allerdings in seinem Buche auch Bernoullis Reihe benutzt, ohne deren Urheber zu nennen, aber die sogenannte Taylorsche Reihe ist eine ganz andere. Über das fünfte mathematische Kapitel mag die Bemerkung genügen, dass in ihm das Wort Funktionentheorie nicht vorkommt, es sei denn, man wolle als genügenden Ersatz den Ausspruch betrachten: „Charakteristisch für die Fortschritte der Analysis in unserem Jahrhundert ist die von Legendre, Jacobi und Abel gegründete Theorie der elliptischen Funktionen und der Thetafunktionen, welche durch Georg Riemann (1826 bis 1866, aus Breselenz, Lüneburger Heide) und andere zum Teil jetzt noch lebende Mathematiker nach verschiedenen Richtungen hin weiter ausgebildet

wurde.“ Was soll der Professor der Mathematik oder gar der der Geschichte an einer Mittelschule mit solchen Grundzügen machen?

Cantor.

Geschichte der darstellenden und projektiven Geometrie mit besonderer Berücksichtigung ihrer Begründung in Frankreich und Deutschland und ihrer wissenschaftlichen Pflege in Österreich. Von Prof. Ferdinand Josef Obenrauch. Brünn 1897, Carl Winiker, 442 S.

In Gestalt von drei aufeinanderfolgenden Programmabhandlungen von 1893, 1894, 1895, welche in der Histor.-litter. Abteilung dieser Zeitschrift Band 39 (S. 187—188), Band 40 (S. 106), Band 41 (S. 77—78) angezeigt worden sind, hat Herr Obenrauch nach einer weit ausgreifenden Einleitung Monges *Géométrie déscriptive* und dessen *Applications de l'Analyse à la Géométrie* geschildert und eine besondere Abhandlung über die wissenschaftliche Pflege der darstellenden und der projektiven Geometrie in Aussicht gestellt. Jene drei Programme, von 97 S. auf 164 S. angewachsen, bilden ein starkes Drittel des uns vorliegenden Bandes. Man erkennt aus dieser stattlichen Vermehrung, dass Herr Obenrauch, weit entfernt davon sich unserer Meinung anzuschliessen, ein Weniger wäre mehr gewesen und hätte Monges Grösse deutlicher hervortreten lassen, nur noch ausführlicher auf die Bücher und Abhandlungen, welche Monges Gedanken bis in unseren Tagen erweitert, vervollkommnet, zum entfernten Ausgangspunkte genommen haben, eingegangen ist. Der Leser findet hier eine mit erstaunlichem Fleisse, welchem Lorias bekanntes Buch über die Entwickelung der geometrischen Lehren einigermaßen vorgearbeitet hat, zusammengetragene Bibliographie. Wir sagen absichtlich er findet sie, denn die Bibliographie eines bestimmten geometrischen Gegenstandes hier unmittelbar aufzusuchen dürfte sich als sehr schwierig erweisen. Nach den fünf ersten Abschnitten: 1. Einleitung, 2. Die Gründung der École normale, 3. Die Gründung der École polytechnique, 4. Monge als Begründer der Infinitesimalgeometrie, 5. Monges soziale Stellung und sein Lebensende, welche wir im Vorstehenden kurz gekennzeichnet haben, beginnt auf S. 165 ein letzter und längster Abschnitt: 6. Die wissenschaftliche Pflege der darstellenden und projektiven Geometrie in Österreich. Es ist die 1895 zum voraus angekündigte besondere Abhandlung, jetzt den Hauptteil des Bandes bildend. Was wir den früheren Abschnitten zum Lobe nachsagen durften, aber auch was wir an ihnen aussetzten, das zeigt sich aufs Neue in diesem sechsten Abschnitte. Herr Obenrauch legt in demselben eine erstaunliche Belesenheit an den Tag. Es ist ihm gelungen, eine Fülle von Stoff aus den verschiedensten Gebieten zusammenzubringen, der uns persönlich und vermutlich gleich uns den meisten Mathematikern fremd war, so z. B. eine eingehende Schilderung des mittelalterlichen Bauwesens, eine Übersicht über die Gründung technischer Hochschulen, eine österreichische Bibliographie der darstellenden Geometrie, wenn wir dieser Wortverbindung uns bedienen dürfen. Wir haben sehr vieles aus dem Buche gelernt, wovon wir in unseren eigenen

Schriften Gebrauch machen können und gern Gebrauch machen werden. Aber nun kommt die Kehrseite. Wir vermissen bei Herrn Obenrauch die Übersichtlichkeit, die zweckbewusste und zweckerfüllende Anordnung. Herüber und hinüber werden wir durch die Jahrhunderte geschleift, ohne dass ein Grund dieses Zickzackweges deutlich hervorträte, und wir fürchten, der Verfasser könnte dadurch die Lesbarkeit seines Buches etwas beeinträchtigt haben. Auf einzelne unbedeutende Unrichtigkeiten hinzuweisen unterlassen wir. Es wäre kleinlich herumnörgeln zu wollen, wo etwa ein unzutreffender Ausdruck sich einschlich, aber jene allgemeine Bemerkung über die Darstellungsweise glaubten wir nicht unterdrücken zu dürfen.

Cantor.

G. Darboux. **Leçon sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitesimal.** Troisième partie. Lignes géodésiques et courbure géodésique. Paramètres differentiels. Déformation des surfaces. Paris 1894, Gauthier-Villars et fils. 512 S. 15 Frcs.

Entgegen der ursprünglichen Absicht des Herrn Verfassers, das Werk in drei Bänden abzuschliessen, erscheint die Theorie der unendlich kleinen Deformation in einem besonderen vierten Bande, und es schliesst der dritte Band, dessen grösster Teil (S. 1—444) in dieser Zeitschrift Bd. 39 (1894) S. 74 flg. besprochen ist, mit zwei im Jahre 1894 herausgegebenen Kapiteln (S. 445—512).

In dem ersten derselben werden die Studien über die Flächen konstanter Krümmung abgeschlossen, „indem die Mittel angegeben werden, einige von ihnen zu bestimmen, d. h. indem die Anwendung der vorhergehenden Transformationsmethoden auf die einfachsten Fälle gemacht wird“. Es werden diejenigen Flächen konstanter Krümmung gesucht, deren Krümmungslinien eben oder sphärisch sind, also diejenigen, mit denen sich wohl Enneper zuerst eingehender beschäftigt hat. Auch hier wird von der Voraussetzung ausgegangen, dass zunächst nur die Krümmungslinien der einen Schar sphärisch sind. Anstatt dass aber, wie von Herrn Dobriner, der die Aufgabe in den Acta mathematica IX, 73—104 vollständig gelöst hat, die Koordinaten der Flächen bestimmt werden, wird nur gezeigt, dass man dieselben durch einfache Quadraturen finden kann. Um aus diesen Flächen neue zu erhalten, werden auf dieselben die Transformationsmethoden der Herren Lie und Bianchi angewendet. Es werden zunächst zwei Differentialgleichungen aufgestellt, von denen gezeigt wird, dass, wenn eine derselben sich allgemein lösen lässt, die Anwendung der Bianchischen Transformationsmethode nur noch algebraische Rechnungen ohne Quadraturen erfordert, so z. B. bei der Pseudosphäre. Ausserdem findet sich das bemerkenswerte Resultat: Wenn man durch einfache Quadraturen eine Fläche konstanter Krümmung nebst ihren Derivierten nach der Lieschen Transformationsmethode finden kann, so fordert die successive Anwendung

der Transformationen der Herren Bianchi, Bäcklund und Lie keine neue Quadratur.

Im letzten Kapitel des dritten Bandes werden gewisse Analogien und Beziehungen zwischen den Flächen konstanter Krümmung und den Minimalflächen aufgestellt, indem daran angeknüpft wird, dass die Minimalflächen diejenigen Flächen sind, bei welchen die Tangenten von der Länge Null in jedem Punkte der Fläche konjugierte Tangenten sein müssen. Verallgemeinert man dies und sucht diejenigen Flächen M, bei welchen von jedem Punkte aus die Tangenten, die zugleich eine gegebene Fläche zweiten Grades berühren, konjugierte Tangenten sind, so erhält man im allgemeinen Flächen, die durch dieselbe Differentialgleichung bestimmt sind wie die Flächen konstanter Krümmung. Reduziert sich die Fläche zweiten Grades auf den unendlich fernen Kreis, so erhält man die Minimalflächen. Die allgemeinen Flächen M haben in der nicht-euclidischen Geometrie Cayleys, auf welche genauer eingegangen wird, gleiche Krümmungsradien mit entgegengesetzten Vorzeichen und haben ferner mit den Minimalflächen der euclidischen Geometrie gemeinsam, dass sie innerhalb einer gegebenen Umgrenzung den Flächeninhalt, in Cayleyscher Geometrie gemessen, zu einem Minimum machen.

G. Darboux. **Quatrième partie.** Deformation infiniment petite et représentation sphérique. (Premier fascicule, 1895, p. 1—352.)

Der letzte Band des Werkes beschäftigt sich mit der Theorie der unendlich kleinen Deformation und dem sphärischen Bilde der Flächen. — Vielleicht dürfte es angebracht sein, zunächst den Begriff der unendlich kleinen Deformation klarzulegen. Denken wir uns aus der Gesamtheit der Flächen, die durch Biegung einer Fläche S entstehen, eine Schar herausgenommen, deren einzelne Flächen in einander stetig übergehen, so können wir dieselben durch die Gleichung

$$1)\qquad \varphi(X, Y, Z, t) = 0$$

darstellen. Sind für $t = 0$ die Koordinaten der Fläche x, y, z, so ist

$$2)\qquad dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dx^2 + dy^2 + dz,$$

und da wir weiter annehmen können, dass X, Y, Z sich nach Potenzen von t entwickeln lassen, so können wir, weil für $t = 0$ X, Y, Z bez. in x, y, z übergehen, setzen:

$$3)\qquad \begin{cases} X = x + tx_1 + t^2x_2 + \cdots \\ Y = y + ty_1 + t^2y_2 + \cdots \\ Z = z + tz_1 + t^2z_2 + \cdots \end{cases}$$

wo $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$ Funktionen sind, die von t unabhängig sind und die von den beiden Variabeln abhängen, durch welche die Fläche bestimmt ist. Beschränken wir uns auf die erste Potenz von t, so ist nach 2):

$$4)\qquad dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0$$

und die vollständige Lösung dieser Differentialgleichung giebt uns die Lösung dessen, was wir das Problem der unendlich kleinen Deformation nennen. Es ist nun

$$X' = x + tx_1;\ Y' = y + ty_1;\ Z' = z + tz_1$$

und daraus $dX'^2 + dY'^2 + dZ'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + t^2 (dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2)$, so dass, wenn der Parameter t unendlich klein ist, sich die beiden Flächen S und S' in der Weise Punkt für Punkt entsprechen, dass die Längen entsprechender Kurven sich nur um unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung in Bezug auf t unterscheiden.

Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte M und M_1 der beiden Flächen bilden eine Kongruenz von Geraden, welche man die Leitlinien der unendlich kleinen Deformation nennt. Eine Grösse proportional MM' nennen wir den Modul der Deformation

$$M = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

so dass durch Modul und Direktrix eine unendlich kleine Deformation gegeben ist. Ist übrigens die Frage der unendlich kleinen Deformation für eine Fläche vollständig gelöst, so ist durch einfache Quadraturen die Deformation desselben mit einer Annäherung beliebig hohen Grades zu finden.

Aus Gleichung 4) ist ersichtlich, dass das Problem der unendlich kleinen Deformation gleichkommt der Bestimmung von Flächen, die sich so entsprechen, dass ihre entsprechenden Linienelemente aufeinander normal sind. Daraus ergiebt sich, dass, wenn man eine unendlich kleine Deformation der Fläche S kennt und von jedem Punkte von S auf der Leitlinie der Deformation zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Längen abträgt, die dem Modul der Deformation proportional sind, man ein Paar aufeinander abwickelbarer Flächen erhält. Die Gleichung 4) wird nun dadurch transformiert, dass man $z = pdx + qdy$ setzt, und man erhält dann durch die Integrabilitätsbedingung zur Bestimmung von z_1 die Gleichung

$$rt_1 + tr_1 = 2ss_1 = 0,$$

wo r, s, t die zweiten Differentialquotienten von z sind. Danach sind dann auch x_1 und y_1 zu bestimmen. Diese Methode wird auf das Paraboloid und die Kugel angewendet.

Im allgemeinen zeigt sich, dass die Charakteristiken der linearen Differentialgleichung, von welcher die Lösung abhängt, die Asymptotenlinien der gegebenen Fläche sind. Besonders einfach wird daher die Gleichung 4), wenn man die Parameter der Asymptotenlinien als unabhängige Variabele einführt. Kann man in dem erhaltenen Systeme

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = -\lambda \frac{\partial v}{\partial \alpha}$$
$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = \lambda \frac{\partial v}{\partial \beta}$$

wo λ, wie sich später herausstellt, das negative Produkt der Hauptkrümmungsradien ist und α, β die Parameter der Asymptotenlinien sind,

λ so bestimmen, dass sich das vollständige Integral angeben lässt, so erhalten wir unendlich viele Flächen, deren Asymptotenlinien wir bestimmen und für welche wir das Problem der unendlich kleinen Deformation lösen können. Bringt man die Gleichung der Fläche S auf die Form

$$x = \int\left(\Theta_2 \cdot \frac{\partial \Theta_3}{\partial \alpha} - \Theta_3 \frac{\partial \Theta_2}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\Theta_2 \frac{\partial \Theta_3}{\partial \beta} - \Theta_3 \frac{\partial \Theta_2}{\partial \beta}\right) d\beta,$$

$$y = \int\left(\Theta_3 \cdot \frac{\partial \Theta_1}{\partial \alpha} - \Theta_1 \cdot \frac{\partial \Theta_3}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\Theta_3 \cdot \frac{\partial \Theta_1}{\partial \beta} - \Theta_1 \frac{\partial \Theta_3}{\partial \beta}\right) d\beta,$$

$$z = \int\left(\Theta_1 \cdot \frac{\partial \Theta_2}{\partial \alpha} - \Theta_2 \cdot \frac{\partial \Theta_1}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\Theta_1 \cdot \frac{\partial \Theta_2}{\partial \beta} - \Theta_2 \frac{\partial \Theta_1}{\partial \beta}\right) d\beta,$$

wo Θ_1, Θ_2, Θ_3 Lösungen derselben partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \alpha \partial \beta} = k\Theta$$

und proportional den Richtungskosinus der Normalen zur Fläche S sind, so sind die Koordinaten der allgemeinsten Fläche S_1, die der gegebenen durch Orthogonalität der Linienelemente entspricht, durch die zuerst von Herrn Lelieuvre aufgestellten Formeln bestimmt:

$$x_1 = \int\left(\Theta_1 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \omega \frac{\partial \Theta_1}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\Theta_1 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \omega \frac{\partial \Theta_1}{\partial \beta}\right) d\beta,$$

$$y_1 = \int\left(\Theta_2 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \omega \frac{\partial \Theta_2}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\Theta_2 \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \omega \frac{\partial \Theta_2}{\partial \beta}\right) d\beta,$$

$$z_1 = \int\left(\Theta_3 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \omega \frac{\partial \Theta_3}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\Theta_3 \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \omega \frac{\partial \Theta_3}{\partial \beta}\right) d\beta,$$

wo ω die allgemeinste Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = k\omega$$

ist. Auch diesen Formeln entsprechende andere für beliebig gewählte unabhängige Variabele werden von Herrn Verfasser abgeleitet.

Aus der vorigen Lösung des Problems ergiebt sich eine Reihe geometrischer Eigenschaften, unter denen hervorzuheben ist, dass den beiden Scharen der Asymptotenlinien auf jeder der beiden sich entsprechenden Flächen auf der anderen ein konjugiertes System entspricht, und dass die Punktgleichung in Beziehung auf dieses konjugierte System gleiche Invarianten hat. Jedem konjugierten System auf einer Fläche mit gleichen Invarianten entspricht sonach eine völlig bestimmte unendlich kleine Deformation der Fläche. Legt man durch alle Punkte von S Ebenen, welche zu den Leitlinien der Deformation senkrecht sind, so umhüllen diese eine Fläche Σ für welche man das Problem lösen kann, wenn es sich für S lösen lässt. Da sich die Asymptoten von S und Σ entsprechen, so entspricht auch jedem konjugierten System auf der einen ein konjugiertes System auf der anderen Fläche. Die der Fläche Σ durch Orthogonalität der Linienelemente entsprechende Fläche A ist mit der Fläche S_1 durch die Eigenschaften verbunden, dass die Tangentialebenen in entsprechenden

Punkten parallel sind und das gemeinsame konjugierte System auf beiden Flächen gleiche Invarianten hat. Wie die Fläche Σ aus S entstanden ist, so kann man aus S_1 eine neue Fläche Σ_1 entstehen lassen, der eine Fläche A_1 mit Orthogonalität entsprechender Linienelemente entspricht. Es stellt sich dann heraus, dass A und A_1 polarreziprok sind in Bezug auf eine Kugel vom Radius $\sqrt{-1}$ mit dem Anfangspunkt der Koordinaten als Mittelpunkt. Zu diesen 6 Flächen erhält man durch gleiche Methoden noch 6 andere Flächen, so dass man im ganzen 12 Flächen hat, die sich in verschiedener Weise paarig entsprechen: 1) mit Orthogonalität der Linienelemente, 2) mit parallelen Tangentialebenen, 3) durch reziproke Polare und 4) als Brennflächen einer und derselben geradlinigen Kongruenz. Aus diesen Zusammenhängen ergeben sich verschiedene Eigenschaften und Beziehungen.

Als Beispiel wird zunächst der Fall untersucht, dass S_1 eine Ebene ist, wobei sich 4 Flächen auf Punkte reduzieren und 4 Ebenen sind. Da hierbei die Fläche Σ die Polarreziproke von S ist in Beziehung auf einen linearen Komplex, so wird anschliessend die Aufgabe behandelt: Alle geradlinigen Kongruenzen zu bestimmen, für welche die Mittelfläche eine Ebene ist. Dieselbe wird dahin specialisiert, dass die Kongruenz von den Normalen einer Fläche gebildet wird. Stellt man eine Beziehung durch Orthogonalität der Linienelemente zwischen einer beliebigen Minimalfläche und einer Ebene her und führt durch jeden Punkt der Ebene eine Parallele zur Normale des entsprechenden Punktes der Minimalfläche, so erhält man die verlangte Kongruenz. Allgemeiner ist die Aufgabe: Alle Flächen zu bestimmen, für welche die Abwickelbaren, die von den Normalen gebildet werden, auf der Evolutenmittenfläche ein konjugiertes System bilden. Die Evolutenmittenfläche wird diejenige genannt, welche der Mittelpunkt des Normalenstückes zwischen den beiden Hauptkrümmungsmittelpunkten beschreibt. Auch hier muss man von einer Minimalfläche ausgehen und dieses giebt Anlass auf die unendlich kleine Deformation der Minimalflächen einzugehen, welche auf die Integration der allgemeinsten harmonischen linearen Differentialgleichung zurückgeführt wird. Als weitere Beispiele für die Aufsuchung der 12 Flächen werden für S die Kugel vom Radius 1 und die Flächen konstanter negativer Krümmung genommen. Ohne auf die Einzelheiten einzugehen, sei bemerkt, dass im zweiten Falle auf den Flächen A_1 zwei Scharen geodätischer Linien ein konjugiertes System bilden, Flächen, die von den Herren Noss (1888) und Guichard (1890) untersucht worden sind, und zwar entstehen auf die angegebene Art alle Flächen dieser Eigenschaft.

Um in die Theorie der aufeinander abwickelbaren Flächen tiefer einzudringen, lässt der Herr Verfasser nun eine von zwei auf einander abwickelbaren Flächen auf der anderen rollen, so dass je zwei einander entsprechende Punkte zur Deckung kommen. Dabei dreht sich die Fläche um eine durch den Berührungspunkt gehende und in der Tangentialebene

liegende Gerade, und diese aufeinander folgenden Geraden bilden eine Kongruenz, von der eine Reihe von Eigenschaften abgeleitet wird. Das wichtigste Ergebnis ist, dass sich aus einem Paar Flächen, die aufeinander abwickelbar sind, unendlich viele Paare ableiten lassen, die dasselbe sphärische Bild haben. Und umgekehrt liefert jedes Paar von Flächen, die dasselbe sphärische Bild haben, unendlich viele Paare aufeinander abwickelbarer Flächen, und zwar wird das Band zwischen den beiden einander so entfernt scheinenden Theorien der Biegung der Flächen und des sphärischen Bildes durch die cyklischen Systeme gebildet, deren Betrachtung infolgedessen ein besonderes Kapitel gewidmet ist.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Theorien ergiebt sich auch auf analytischem Wege. Sucht man alle Flächen, die ein bestimmtes sphärisches Bild haben, so wird man auf eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung geführt, wie bei dem Problem der unendlich kleinen Deformation, mit dem Unterschiede, dass im letzteren Falle die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung die Asymptotenlinien der Fläche sind, während sie hier die Krümmungslinien darstellen. Bezieht man die beiden Flächen, welche in den beiden verschiedenen Problemen zu derselben partiellen Differentialgleichung führen, aufeinander, so erhält man die Berührungstransformation Lies, von der schon bei der Besprechung des ersten Bandes die Rede war. Die Übergangsformeln von der einen Fläche zur anderen und einige wenige Eigenschaften der Transformation werden abgeleitet, insbesondere die für die Anwendung wichtigste, dass einer Geraden in dem ersten Raume eine Kugel in dem zweiten, einer geradlinigen Kongruenz ein zweifach unendliches System von Kugeln entspricht. Es ergiebt sich daraus sogleich, dass, wenn man das Problem des sphärischen Bildes für eine Fläche lösen kann, man es auch mit Hilfe einer einfachen Quadratur für alle Flächen lösen kann, die sich aus der ersten durch Inversion ergeben. Wendet man dieses Verfahren auf diejenigen Flächen an, die der Gleichung $\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial y}=0$ entsprechen, so erhält man alle reellen Flächen, für welche man die vollständige Lösung des Problems finden kann.

Die Flächen, die derselben Gleichung

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial y}=k\Theta$$

genügen und für welche man das Problem der sphärischen Abbildungen lösen kann, können auf folgende Weise definiert werden. Wenn man mit z, z' zwei beliebige Lösungen der Gleichung bezeichnet, in eine Form gebracht, für welche die konjugierten imaginären Funktionen σ, σ' definiert sind durch die Quadraturen

$$\omega\sigma=\int\left(\omega\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)dx-\left(\omega\frac{\partial z}{\partial y}-z\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)dy,$$

$$\omega\sigma'=\int\left(\omega\frac{\partial z'}{\partial x}-z'\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)dx-\left(\omega\frac{\partial z'}{\partial y}-z'\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)dy,$$

wobei ω immer die Lösung vom Modul 1 ist, so kann man, wenn man die Fläche auf das System der Tangential-Koordinaten α, β, ξ bezieht, setzen:

$$\alpha = \frac{z'}{\omega}; \ \beta = \omega\sigma'.$$

Diese beiden Formeln definieren das sphärische Bild der Krümmungslinien. Dann kann man ebenso nehmen:

$$p' = \omega\sigma; \ q' = \frac{z}{\omega}$$

$$\xi = \int (p'd\alpha - q'd\beta) = z\sigma' + \int \left(z'\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial z'}{\partial x}\right)dx - \left(z'\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial z'}{\partial y}\right)dy.$$

Da die Variabeln α und β wie p' und q' konjugiert sind, so kann man unendlich viele reelle Lösungen für ξ erhalten und die Fläche ist die Enveloppe der Ebene

$$(\alpha + \beta)X + i(\beta - \alpha)Y + (\alpha\beta - 1)Z + \xi = 0.$$

Die einfachste Form der Gleichung $\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial y} = k\Theta$ entspricht denjenigen Flächen mit ebenen Krümmungslinien, bei denen die den ebenen Krümmungslinien auf der Einheitskugel entsprechenden Kreise durch einen festen Punkt gehen. Es werden nun die allgemeinsten Flächen mit ebenen Krümmungslinien bestimmt. Um alle Flächen mit einem System ebener Krümmungslinien zu erhalten, konstruiert man eine beliebige isotrope abwickelbare Fläche Δ und eine nicht-isotrope D_1. Man biegt dann D_1 so, dass ihre Erzeugenden geradlinig bleiben und dass ihre Tangentialebenen die Kurven mit sich führen, längs welcher sie die Abwickelbare Δ schneiden. Die Gesamtheit der so fortgeführten Kurven erzeugt die allgemeinste Fläche mit einem System ebener Krümmungslinien. Wenn man daraus auch nicht auf einfache Weise diese Flächen finden kann, so ergeben sich doch einige Sätze, so z. B. wenn eine der ebenen Krümmungslinien ein Kreis ist, so sind alle Kreise, ist eine dieser Kurven algebraisch, so sind alle algebraisch, wenn die ebenen Krümmungslinien Kegelschnitte sind, so müssen es Kreise sein.

Von den Flächen mit einem System ebener Krümmungslinien werden nun diejenigen völlig bestimmt, welche isotherm sind, und zwar hängt die Lösung von elliptischen Funktionen ab und enthält eine willkürliche Funktion. Es ergiebt sich:

$$X = \frac{\Theta^2(\omega)[x - i(yz' - zy')]}{\mathrm{H}(2\omega)\mathrm{H}'(0)} \cdot \frac{\mathrm{H}\left(\frac{u + iv_1 - 3\omega}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u + iv_1 + \omega}{2}\right)} \cdot e^{(u + iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}$$

$$+ \frac{\Theta^2(\omega)[x + i(yz' - zy')]}{\mathrm{H}(2\omega)\mathrm{H}'(0)} \cdot \frac{\mathrm{H}\left(\frac{u - iv_1 - 3\omega}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u - iv_1 + \omega}{2}\right)} \cdot e^{(u - iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}$$

und für Y und Z erhält man ähnliche Formeln. Von diesen Flächen wird eine Reihe von Eigenschaften abgeleitet.

Der nächst einfache Fall ist derjenige, dass das eine System der Krümmungslinien aus sphärischen Kurven besteht. Zur Bestimmung derselben wird von dem Satze Joachimsthals ausgegangen: „Wenn eine Krümmungslinie sphärisch ist, so muss die Abwickelbare, welche der Fläche längs dieser Krümmungslinie umschrieben ist, auch einer Kugel umschrieben sein und umgekehrt.“ Aus einer gegebenen Fläche mit einer Schar sphärischer Krümmungslinien werden unendlich viele derselben Art abgeleitet, die dasselbe sphärische Bild haben. Sodann wird gezeigt, dass man alle Flächen mit einer Schar sphärischer Krümmungslinien aus denen mit ebenen Krümmungslinien ableiten kann: 1) indem man die Inversen dieser nimmt, 2) indem man die Flächen mit sphärischen Krümmungslinien konstruiert, die dasselbe sphärische Bild haben wie die vorher gefundenen. Die allgemeinste Fläche mit sphärischen Krümmungslinien kann man auch erhalten, indem man eine isotrope Abwickelbare Δ durch eine Schar S von Kugeln schneidet und diese Kugeln und ihre Enveloppe Σ einer bestimmten Biegung unterwirft. Die Schnitte der Abwickelbaren Δ mit den Kugeln S bilden so eine Familie von Kurven, welche die gesuchte Fläche erzeugen. Genauer werden diejenigen Flächen bestimmt, deren beide Systeme von Krümmungslinien eben oder sphärisch sind. Zu dem Zwecke sucht man auf die allgemeinste Weise 6 Funktionen A_i von α und 6 Funktionen B_i von β, welche die Relation

$$\sum_1^6 (A_i + B_i)^2 = 0$$

identisch befriedigen. Dann sind die beiden Schalen der Enveloppe der variabeln Kugel

$$\sum_1^5 (A_i + B_i) x_i = 0$$

zwei der gesuchten Flächen, wenn x_i pentasphärische Koordinaten bezeichnen. Es ergiebt sich weiter, dass die gesuchten Flächen auf einfache Weise aus einem Kegel entstehen oder aus der Fläche, deren Normalen Tangenten an einen Kegel sind.

Ohne auf die Verallgemeinerungen einzugehen, welche sich daran anschliessend besonders auf die orthogonalen Systeme mit demselben sphärischen Bilde beziehen, sei noch der letzten beiden Kapitel gedacht, die den neuen Resultaten gewidmet sind, die wir Herrn Weingarten in betreff der Abwickelbarkeit der Flächen verdanken. Wir haben früher gesehen, dass die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung der auf eine Fläche abwickelbaren Flächen die Asymptotenlinien dieser Flächen sind. Kann man also gewisse besondere Eigenschaften dieser Asymptotenlinien angeben, so kann das Problem auf eine neue Art formuliert und dadurch können neue Resultate gefunden werden. Die Betrachtung des zwei aufeinander abwickelbaren Flächen gemeinsamen konjugierten Systems erlaubt diese allgemeine Bemerkung anzuwenden. Sind x_1, y_1, z_1 die Koordinaten eines Punktes der gegebenen Fläche Θ_1 und setzen wir

$$x_1 = u; \; y_1 + iz_1 = v; \; y_1 - iz_1 = 2w,$$

so kann w als Funktion von u und v betrachtet werden, und wenn wir schreiben:

$$dw = p\,du + q\,dv,$$

so nimmt das Linienelement der Fläche die Form an:

$$ds^2 = du^2 + 2\,dv\,dw = du^2 + 2p\,du\,dv + 2q\,dv^2,$$

und von diesem geht Herr Weingarten aus. Die Methode Weingartens lässt die Bestimmung aller Flächen Θ, die auf diese Fläche Θ_1 abwickelbar sind, abhängen von derjenigen einer anderen Fläche Σ, die einer gewissen Differentialgleichung genügt, welche eine Beziehung zwischen den Hauptkrümmungsradien, den Entfernungen eines festen Punktes von der Tangentialebene und dem Berührungspunkte feststellt. Setzt man

$$\varphi = up + vq - w,$$

so ergeben sich die Koordinaten x, y, z der Fläche Θ aus

$$x = \int C d\frac{\partial \varphi}{\partial p} + X d\frac{\partial \varphi}{\partial p}$$

$$y = \int C' d\frac{\partial \varphi}{\partial p} + Y d\frac{\partial \varphi}{\partial p}$$

$$z = \int C'' d\frac{\partial \varphi}{\partial p} + Z d\frac{\partial \varphi}{\partial p}$$

wo X, Y, Z die Koordinaten und C, C', C'' die Richtungskosinus der Normalen von Σ sind. Das Linienelement von Θ wird ausgedrückt durch:

$$ds^2 = \left(d\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)^2 + 2pd\frac{\partial \varphi}{\partial p}\,d\frac{\partial \varphi}{\partial q} + 2q\left(d\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)^2$$

und die Fläche Σ genügt der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} - (\varrho' + \varrho'')\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\,\partial q} + \varrho'\varrho''\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0.$$

Unter den Anwendungen ist besonders interessant die Aufsuchung aller Flächen, die auf ein Paraboloid zweiten Grades abwickelbar sind, bei welchem eine der geradlinigen Erzeugenden den unendlich fernen Kreis berührt. Weitere Untersuchungen führen zu dem Schlusssatz: Ist eine beliebige Schar von Kurven K auf einer Fläche Θ gegeben, so kann man immer durch einfache Quadraturen alle Kongruenzen G bestimmen, die durch Tangenten an Θ so erzeugt sind, dass die Regelflächen, deren Erzeugende durch eine der Kurven K gehen, diese Kurve als Striktionslinie besitzen. Die Relation zwischen der Kongruenz und der Fläche bleibt bestehen, wenn die Fläche unter Mitführung der Geraden gebogen wird. Wenn man zwei unabhängige Variabele nimmt, um die Richtung jeder Geraden der Kongruenz zu bestimmen, so muss der Parameter der Schar von Kurven K einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen, welche ausschliesslich vom Linienelemente von Θ abhängt und deren Integration infolgedessen gestattet, durch einfache Quadraturen alle Flächen zu bestimmen, die auf Θ abwickelbar sind.

Mit diesen Untersuchungen schliesst das eigentliche Werk ab und es folgen nun noch 11 im Jahre 1896 erschienene Zusätze, welche die Seiten 353—516 des vierten Bandes einnehmen. Die drei ersten derselben sind Beiträge der Herren Picard, Königs und Cosserat, während die übrigen von Herrn Darboux selbst geschrieben sind.

I. Über die Näherungsmethoden in der Theorie der Differentialgleichungen. Herr E. Picard beschäftigt sich in dieser Note mit partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von hyperbolischem Typus, wie sie in der Flächentheorie vorkommen und als deren allgemeinste Form

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

angenommen wird. Bei der Bestimmung des Integrales durch Reihen wird auch der Grösse des Geltungsbereiches ausgedehnte Beachtung zu teil.

In dem zweiten Zusatze:

II. Über die geodätischen Linien mit quadratischen Integralen sucht Herr G. Königs die vollständige Lösung des Problems der geodätischen Linien, welche mehrere quadratische Integrale zulassen, und schliesst so an ein Kapitel des III. Bandes des Werkes an. Er findet zunächst, dass, wenn ein ds^2 mehr als drei von einander unabhängige quadratische Integrale in Bezug auf seine geodätischen Linien zulässt, es fünf quadratische Integrale hat, die Fläche also konstant ist. Da sich weiter ergiebt, dass die ds^2 mit drei quadratischen Integralen für die geodätischen Linien auf Rotationsflächen führen, so kehrt H. Königs die Aufgabe um und sucht alle Formen ds^2 von Rotationsflächen mit quadratischen Integralen auf, die in einer Tabelle zusammengestellt werden. In einer zweiten Tabelle werden die Lionvilleschen Formen des Flächenelementes für Flächen konstanter Krümmung gegeben, bei denen die Krümmung nicht Null ist. Aus diesen werden dann noch verschiedene Tabellen abgeleitet, die aus seiner Abhandlung im XXXI. Band des Savants étrangers genommen sind, und dann wird nachgewiesen, dass in diesen Tabellen die vollständige Lösung des Problems enthalten ist.

III. Über die Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Herr Cosserat beweist darin einen Satz, welcher aus einer Arbeit des Herrn Moutard herrührt, die beim Aufstande der Kommune im Jahre 1871 verloren gegangen ist. Dieselbe beschäftigte sich mit dem eingehenden Studium der einfachsten Form, deren das allgemeine Integral partieller Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln fähig ist, die Form, welche besteht aus einer einzigen Relation zwischen den drei Variabeln, zwei expliziten willkürlichen Funktionen derselben, die aber nicht unter einem Integralzeichen vorkommen dürfen, und den Derivierten dieser Funktionen in beschränkter Zahl. Der Satz nun, welcher hier abgeleitet wird, heisst: Diejenigen der gesuchten Gleichungen, welche durch eine Veränderung der Variabeln weder auf lineare Laplacesche Gleichungen, noch auf die Lionvillesche Gleichung zurückführbar sind,

lassen sich, ausgenommen in zwei besonders einfachen Fällen, zurückführen auf die Form

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(Ae^z) - \frac{\partial}{\partial y}(Be^{-z}),$$

wo A und B zwei Funktionen der unabhängigen Variabeln sind, die gewissen Bedingungen genügen müssen; ferner kann die Integration dieser Gleichung zurückgeführt werden auf diejenige einer solchen von Laplace, nämlich:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \lg A}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + ABz.$$

IV. Über die Torsion der Linien doppelter Krümmung und die Kurven konstanter Torsion. Nachdem Herr Darboux auf die wichtigen Unterschiede zwischen der Krümmung und der Torsion der Kurven doppelter Krümmung aufmerksam gemacht und insbesondere auf die Bedeutung des Vorzeichens der Torsion hingewiesen hat, giebt er die Resultate, die infolge seiner Anregung im I. Bande dieses Werkes, algebraische Kurven mit konstanter Torsion aufzusuchen, erhalten worden sind. So verdankt man den Herren Fabry und Fouché eine Kenntnis mehrerer solcher Kurven, wenn es bis jetzt auch noch nicht gelungen ist, alle aufzufinden.

V. Über die Eulerschen Formeln und die Bewegung eines festen Körpers. Die Eulerschen Formeln werden auf geometrischem Wege in sehr einfacher Weise abgeleitet, wobei sich zugleich unmittelbar die geometrische Bedeutung der in ihnen vorkommenden Grössen ergiebt. Die verschiedenen endlichen Bewegungen werden sodann zurückgeführt auf Drehungen um 180^0 (renversement) verbunden mit ebenen Inversionen; jede Bewegung einer endlichen Figur lässt sich zusammensetzen aus zwei solcher Drehungen um zwei Gerade.

VI. Note über eine Differentialgleichung und über die Spiralflächen. Aus den Gleichungen der Spiralflächen wird deren Differentialgleichung abgeleitet und an Stelle derselben die allgemeinere

$$My^2 + 2Nyy' + Ty'^2 = 1$$

betrachtet und gezeigt, wie man sie in verschiedenen Fällen integrieren kann.

VII. Über die Form der Krümmungslinien in der Nähe eines Nabelpunktes. Die Resultate dieser Note sind vom Verfasser im Jahre 1883 der Akademie mitgeteilt worden. Nimmt man den Nabelpunkt als Koordinaten-Anfang und die Tangentialebene in diesem Punkte als XY-Ebene, so lässt sich die entstehende Differentialgleichung dadurch vereinfachen, dass man zu den Polarreziproken der Integralkurven übergeht. Diese genügen der Gleichung

$$\frac{du'}{u'} = \frac{b'p^2 + (b-a')p - b}{b'p^3 + (2b-a')p^2 + (a-2b')p - b}\, dp.$$

Der besondere Fall, dass der Nenner $= 0$ ist, wird zunächst ausgeschlossen, die sich ergebenden Unterfälle werden diskutiert und die gefundenen Resultate auf die Wellenfläche angewendet, wobei sich ergiebt, dass die

Krümmungslinien derselben in der Nähe eines Nabelpunktes einer Kurve 10. Grades und 5. Klasse ähnlich sind. Sodann erfährt auch der besondere Fall eine eingehende Behandlung.

VIII. Über die Asymptotenlinien und die Krümmungslinien der Fresnelschen Wellenfläche. Die Wellenfläche wird als Apsidalfläche eines Ellipsoids betrachtet. Werden entsprechende Punkte beider Flächen analytisch in Verbindung gebracht, so erhält man die apsidale Transformation, deren Eigenschaften entwickelt werden. Nach Ableitung bekannterer Eigenschaften wird gezeigt, dass die Asymptotenlinien der Wellenfläche algebraische Kurven sind (Sophus Lie, 1870, Comptes rendus) und dass man auf ähnliche Weise auch die Asymptotenlinien der tetraedralen Flächen erhalten kann. Die Gleichung der Krümmungslinien der allgemeinen Wellenfläche ist bis jetzt noch nicht gefunden, doch wird hier die Bestimmung derselben für die beiden Spezialfälle durchgeführt: 1. dass die Wellenfläche die Apsidalfläche eines elliptischen Cylinders ist und 2. dass sie wenig von der Kugel abweicht. Da die Wellenflächen der Kristalle von der Kugel wenig verschieden sind, so können wir ihre Krümmungslinien mit genügender Genauigkeit berechnen. Aus diesen beiden Spezialfällen ergiebt sich zugleich, dass die Krümmungslinien nicht algebraische Kurven sind.

IX. Über die Cayleysche Geometrie und über eine Eigenschaft der Flächen mit kreisförmigen Erzeugenden. Schon aus der Form des Linienelementes in Cayleyscher Geometrie erkennt man, dass man in ihr die geodätischen Linien jeder Fläche zweiten Grades finden kann. Das Linienelement der Regelflächen in dieser Geometrie hat die Form

$$dS^2 = du^2 + (V\cos^2 u + 2V_1 \cos u \sin u + V_2 \sin^2 u)dv.$$

Da die Regelflächen durch eine Punkt-Transformation, die schon am Schlusse des 3. Bandes behandelt wurde, in solche cyklische Flächen übergehen, bei denen die erzeugenden Kreise auf einer festen Kugel senkrecht stehen, so können von diesen gewisse Eigenschaften abgeleitet werden, von denen einige auf alle Flächen mit kreisförmigen Erzeugenden erweitert werden.

X. Über die partiellen Differentialgleichungen. Diese Note enthält die wesentlichsten Punkte einer Arbeit, welche der Herr Verfasser im VII. Bande (1. Serie) der Annales de l'Ecole Normale im Jahre 1870 veröffentlicht hat und ist eine Erweiterung der Cauchyschen Methode der Veränderung der Variabeln in Verbindung mit der Jacobischen Integrationsmethode. Das Wesentliche ist also, dass für x, y, x, y_0 $[y_0 = f(x, y)]$ gesetzt wird, wo y_0 passend zu wählen ist. Während durch Differentiation diese Methode bei Differentialgleichungen erster Ordnung immer zum Ziele führt, d. h. man ebensoviel Gleichungen wie Unbekannte erhält, ist bei Gleichungen höherer Ordnung die Zahl der Gleichungen immer um eine kleiner als die der Unbekannten. Man kommt jedoch auch hier zur Lösung, wenn eines der Gleichungssysteme zu zwei integrabeln Gleichungen führt, die kombiniert werden.

XI. Über die Hilfsgleichung. In einem Artikel in den Comptes rendus (XCVI. Band) vom Jahre 1883 hat Herr Darboux den Begriff der Hilfsgleichung eingeführt, von dem hier das Wesentliche angegeben wird. Wenn man in einer beliebigen totalen oder partiellen Differentialgleichung, die eine Funktion z einer oder mehrerer unabhängigen Variabeln definiert, z durch $z + Ez'$ ersetzt, die erhaltene Gleichung nach Potenzen von E entwickelt und den Koeffizienten von E gleich Null setzt, so erhält man eine lineare und homogene Differentialgleichung in Beziehung auf z', welche Herr Darboux die Hilfsgleichung der gegebenen nennt. Dieser Begriff lässt sich auch auf jedes System von Differentialgleichungen ausdehnen. Man erhält ein Hilfssystem, welches die einer Lösung unendlich benachbarten Lösungen definiert. Mit Hilfe dieser Einführung werden zwei geometrische Probleme behandelt: zu einer Fläche alle unendlich benachbarten zu suchen, die mit der gegebenen eine Familie eines dreifach orthogonalen Systems bilden, und alle Flächen zu suchen, die auf eine gegebene Fläche abwickelbar sind.

Willgrod.

Leopold Kroneckers Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften von K. Hensel. Zweiter Band. Leipzig 1897. 540 S.

Über Plan und Anlage des hier vorliegenden Unternehmens ist bei Gelegenheit der Besprechung des ersten Bandes berichtet worden. Die erste der drei Abteilungen, in welche nach dem Willen Kroneckers seine zahlreichen Abhandlungen bei der Gesamtausgabe eingegliedert werden sollten, enthält die zum Gebiete der „allgemeinen Arithmetik" gehörigen Untersuchungen; der nunmehr erschienene zweite Band bringt diejenigen Aufsätze dieses Gebietes zum Abdruck, welche in die Jahre 1875 bis 1885 fallen, während ein dritter Band die erste Abteilung der Werke abschliessen und die ihr beigegebenen Zusätze vereinigen wird.

Was den Inhalt der hier aufs neue publizierten Abhandlungen angeht, so beziehen sie sich zu einem Teile auf Einzelprobleme; so enthält der Band z. B. acht Aufsätze über das quadratische Reziprozitätsgesetz, dessen verschiedenartige Beweise zu ergänzen, zu verbinden und zu sichten Kronecker bis in seine letzten Lebensjahre nicht müde wurde, und die grosse Abhandlung über bilineare Formen mit vier Variabelen, in welcher er seine neuen Klassenzahlrelationen von der Theorie der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen loslöste und auf rein arithmetischem Wege begründete. Im Mittelpunkte aber des Bandes steht die Festschrift zu Kummers fünfzigjährigem Doktorjubiläum (1881), die arithmetische Theorie der algebraischen Grössen, in welcher Kronecker das Fazit seiner Forscherthätigkeit zog und die allgemeinen Grundlagen schuf, auf denen es möglich wird, die durch ihre Einfachheit und Strenge ausgezeichneten Methoden der Zahlentheorie zur Ergründung der Eigenschaften algebraischer Zahlen und Funktionen anzuwenden; seitdem haben zahlreiche Arbeiten, die teils an diese Festschrift, teils an die anders geprägten, aber gleich gearteten

Gedankenreihen Dedekinds und Webers anknüpfen, die Fruchtbarkeit dieser Methoden erwiesen. In unmittelbarem Zusammenhange mit der Festschrift stehen schliesslich eine Reihe kleinerer in dem Bande enthaltener Abhandlungen, teils vorbereitenden, teils ergänzenden Inhalts, unter anderen auch die merkwürdige Abhandlung „Zur Theorie der Formen höherer Stufen", deren wahre Bedeutung neuerdings durch Arbeiten von Dedekind (1892) und Hurwitz (1894) in helles Licht gerückt worden ist.

GEORG LANDSBERG.

S. GUNDELFINGER. **Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämtlicher trinomischer Gleichungen.** Hinzugefügt sind vierstellige Additions-, Subtractions- und Briggische Logarithmen, sowie eine Interpolationstafel für alle Differenzen unter Hundert. Leipzig 1897, B. G. Teubner.

Die für Astronomen und Techniker bestimmten Tafeln sind durch Ausbau der Gaussschen Methode entstanden.

Wenn es sich um die Berechnung der reellen Wurzeln einer trinomischen Gleichung:
$$x^{m+n} \pm ex^m \pm f = 0$$
(e und f positive Konstanten) handelt, so genügt es offenbar, die positiven Wurzeln aufzusuchen. Trinomische Gleichungen mit positiven Wurzeln giebt es demnach nur zwei Arten:

Geichungen mit einem Zeichenwechsel
$$\text{I)}\quad x^{m+n} + ex^m - f = 0, \qquad \text{II)}\quad x^{m+n} - ex^m - f = 0,$$
Gleichungen mit zwei Zeichenwechseln
$$x^{m+n} - ex^m + f = 0.$$

Die hier gegebene Methode unterscheidet sich wesentlich von der Gaussschen. Schreibt Gauss vor, mit dem isoliert stehenden Gliede zu dividieren und die so entstehende Relation mit der Identität $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ zu vergleichen, so stellt der Verfasser die Regel auf, „das Glied, welches nicht dasselbe Vorzeichen wie die beiden anderen hat, zu isolieren, mit irgend einem dieser beiden anderen Glieder zu dividieren und die so entstehende Relation mit $1 + 10^A = 10^B$ zu vergleichen."

Beispielsweise giebt
$$x^{m+n} + f = ex^m$$
nach Division mit x^{m+n}:
$$1 + fx^{-(m+n)} = ex^{-n}.$$
Setzt man
$$fx^{-(m+n)} = 10^A, \quad ex^{-n} = 10^B,$$
so wird:
$$-(m+n)\log x + \log f = A,$$
$$-\quad n \quad \log x + \log e = B,$$
woraus
$$B - \frac{n}{m+n}A = \log e - \frac{n}{m+n}\log f$$
und
$$\log x = \frac{\log f - A}{m+n} = \frac{\log e - B}{n}.$$

Es kommt also lediglich darauf an, zwei zusammengehörige Werte für A und B derart zu bestimmen, dass eine Gleichung der Form $A - \mu B = c$ oder $B - \mu A = c$ befriedigt wird, wobei μ einen positiven echten Bruch bezeichnet. Diesem Zwecke dienen die vier Tafeln S. 4—7.

Vorausgeschickt ist auf S. 1 eine Tafel, vermöge deren sich unmittelbar die Aufgaben lösen lassen:

1. Gegeben $A = \log \xi$, gesucht $B = \log(1 + \xi)$ oder
$$B - A = \log\left(1 + \frac{1}{\xi}\right);$$
2. Gegeben $B = \log(1 + \xi)$, gesucht $A = \log \xi$.

Auf S. 2—3 ist eine Entwickelung aller echten Brüche, deren Nenner kleiner als Hundert, in Dezimalbrüche auf zwei Stellen gegeben.

Die Methode wird noch an den Zahlenbeispielen:
$$x^5 - 5x - 4 = 0,$$
$$x^3 - 7x - 7 = 0,$$
$$x^3 + 3x = \frac{M}{25}$$
des näheren erläutert.

E. Jahnke.

B. Sporer. **Niedere Analysis.** Sammlung Göschen. Göschen, Leipzig 1896. 173 S. M. 0.80.

Knapp und klar geschrieben, bietet das Buch auf engem Raume die Grundlagen einer Reihe ausgewählter Kapitel der niederen Analysis.

Im ersten Abschnitt behandelt der Verfasser die Theorie der Kettenbrüche und benutzt sie zur Auflösung der diophantischen Gleichungen ersten Grades. Auch diophantische Gleichungen zweiten Grades werden behandelt und die Pellsche Gleichung an einigen Beispielen erläutert.

Der zweite Abschnitt bringt das Wesentliche aus der Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ausser den bekannten, dem Würfelspiel entlehnten Aufgaben hätten passend noch Beispiele aus der kinetischen Gastheorie hier Platz finden können.

Der Verfasser geht dann zu den Reihen über und bespricht im dritten Abschnitt die arithmetischen Reihen höherer Ordnung, die verschiedenen Arten figurierter Zahlen und den Begriff der Interpolation, wo die Lagrangesche Interpolationsformel ihre Stellung findet. Im nächsten Abschnitt folgen die Konvergenzbetrachtungen für unendliche Reihen, die Methode der unbestimmten Koeffizienten, der allgemeine binomische Lehrsatz, die Exponentialreihe, die trigonometrischen, hyperbolischen und cyklometrischen Funktionen, unendliche Reihen für die Ludolphsche Zahl, unendliche Produkte für $\sin x$ und $\cos x$, der Cotessche Satz und interessante trigonometrische Reihen, auf deren Bedeutung für die Theorie des Drehstroms der Verfasser hätte hinweisen können.

Der letzte Abschnitt bringt die allgemeinen Eigenschaften der algebraischen Gleichungen, sowie mehrere Methoden für die algebraische Auf-

lösung der Gleichungen vierten Grades, von denen allerdings eine genügt hätte, und endlich die bekanntesten Methoden zur näherungsweisen Auflösung der Gleichungen.

Das Buch eignet sich für den Schulgebrauch sowohl wie für das Einzelstudium, insbesondere dürfte es dem angehenden Techniker, dessen mathematische Kenntnisse an das Niveau der Untersekunda einer Vollanstalt bezw. Prima einer Realschule heranreichen, zur Weiterbildung zu empfehlen sein.

E. Jahnke.

F. Bendt. **Katechismus der Differential- und Integralrechnung.** Leipzig 1896, J. Weber. 267 S. M. 3.

Der Verfasser hat den Versuch gemacht, ein Mittelding zu schaffen zwischen den vollständigen Lehrbüchern, welche die Elemente der Differential- und Integralrechnung in mathematischer Strenge entwickelt darbieten, und jenen Schriften, die auf wenigen Bogen eine Vorstellung von dem Wesen der Infinitesimalrechnung erwecken wollen. Den ersteren entlehnt der Katechismus die wichtigsten Methoden und Anwendungen, mit den letzteren hat er den Verzicht auf strenge Beweisführung gemein.

Ein Blick in das Inhaltsverzeichnis lässt die Reichhaltigkeit des Katechismus erkennen. Ein vorbereitender erster Teil bringt den gewöhnlichen binomischen Lehrsatz und Methoden zur Entwickelung geschlossener Ausdrücke in unendliche Reihen. Hierbei ist dem Verfasser auf Seite 11 ein Versehen untergelaufen, wenn er ansetzt

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

und fortfährt: „Wie man hier sofort sieht, ist diese Reihe vom zweiten Gliede an eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{2}$." Auch dürfte die Übersetzung von transscendent mit „unendlich" keine zutreffende sein.

Der zweite Teil handelt von der Differentialrechnung. Nach einem einleitenden Kapitel über den Grenzbegriff und den Begriff der Stetigkeit entwickelt der Verfasser den Begriff des ersten und der höheren Differentialquotienten und erläutert deren Bildungsgesetz an einer grossen Reihe von Beispielen. Hieran schliessen sich die Reihen von Taylor und Mac Laurin mit Anwendung auf die bekanntesten transscendenten Funktionen. Ein weiteres Kapitel ist der Bestimmung des wahren Wertes einer Funktion gewidmet, die für einen speziellen Wert der Variablen in unbestimmter Form erscheint. Ein Kapitel vom Maximum und Minimum der Funktionen bildet den Übergang zu Anwendungen der Differentialrechnung auf die Untersuchung der Kurven.

Der dritte Teil, die Integralrechnung, enthält die Integration rationaler Funktionen, die teilweise Integration und eine Tabelle der wichtigsten unbestimmten Integrale; einfache bestimmte Integrale, geometrische Anwendungen der Integralrechnung (Quadratur und Rektifikation der Kurven, Oberflächen- und Inhaltsbestimmung der Rotationskörper), vielfache Inte-

grale, die Integration von Differentialgleichungen erster und höherer Ordnung sowie ein Kapitel über die komplexen Zahlen und die Moivresche Formel. Auch dieser Teil bietet eine Fülle von Beispielen zur Erläuterung der Lehrsätze und allgemeinen Betrachtungen.

Der Katechismus soll nach der Absicht des Verfassers der Praxis dienen. „Er wendet sich an Leser, die die Mathematik nur als Mittel für ihren besonderen Zweck betreiben.“ Und diesen Kreisen dürfte das Buch in der That gute Dienste leisten.

E. Jahnke.

K. Koppes **Arithmetik und Algebra** zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten, neu bearbeitet von J. Diekmann. 13. Auflage. II. Teil. Bädeker, Essen 1897. 204 S. M. 2.40.

Die sachliche Seite der Bearbeitung ist fast durchgängig eine neue und selbständige geworden. So hat der Herausgeber der „Anwendungen der Determinanten und Elemente der neueren Algebra“ die Lehre von den Gleichungen zweiten und höheren Grades erweitert und vertieft, namentlich auch nach derjenigen Richtung hin, in welcher sie für die analytische Geometrie in Betracht kommt. Die numerische Auflösung der Systeme zweier bezw. dreier linearer Gleichungen mit Hilfe von Determinanten möchte auch Referent als die praktisch brauchbarste empfehlen. Zur Einübung der Auflösungsmethoden für Systeme zweier bezw. dreier Gleichungen zweiten, dritten, vierten Grades bringt der Verfasser eine Reihe interessanter Beispiele bei. Eines derselben erinnerte Referenten an ein elegantes Gleichungssystem, das ihm vor Jahren begegnete. Es lautet:

$$\frac{x_h - x_k x_l}{\sqrt{(1 - x_k^2)(1 - x_l^2)}} = a_h \quad (h, k, l = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2).$$

Auf die beiden ersten Abschnitte, welche den Gleichungen gewidmet sind, folgt ein Abschnitt über die geometrischen Reihen mit Anwendung auf die Zinseszins- und Rentenrechnung. Besonders ausführlich wird hier über die Tilgung von Schuldsummen, über die Ausgabe und Verlosung von Schuldscheinen gehandelt. Der vierte Abschnitt enthält die arithmetischen Reihen erster und höherer Ordnung mit Anwendung auf die Kugelhaufen. Beiden Abschnitten sind eine Reihe von Übungsaufgaben angehängt.

Im fünften Abschnitt bespricht der Verfasser den binomischen Lehrsatz für positive ganze Exponenten, die Exponentialreihe, die Darstellung der komplexen Zahlen und die logarithmische Reihe. Dabei finden die Auflösung der binomischen Gleichung $x^n = 1$ und die Berechnung der Ludolphschen Zahl ihre Erledigung. Auch hier bieten zahlreiche Übungen dem Schüler Gelegenheit teils zur Einprägung des Erlernten, teils zur Auffindung neuer Wahrheiten.

Ein Anhang zu dieser ersten Abteilung bringt die kombinatorischen Rechnungen und deren Zusammenhang mit dem binomischen Lehrsatz, die Lehre von den Kettenbrüchen sowie die Eulersche und die Lagrange-

sche Auflösungsmethode der diophantischen Gleichungen nebst Übungsmaterial.

Die zweite Abteilung bringt in zwei Abschnitten ausführlich die Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen, und sodann die Auflösung der numerischen Gleichungen höherer Grade. Dort geht der Verfasser auf den Begriff der Discriminante und den der Resolvente genauer ein; hier kommen nach einander Gleichungen mit rationalen und solche mit irrationalen Wurzeln zur Behandlung. Für die Ermittelung der letzteren ist die Newtonsche Annäherungsmethode gewählt.

Ein letzter Abschnitt handelt von den extremen Werten einer Funktion. Nachdem für eine Reihe spezieller typischer Funktionsformen die Grenzwerte abgeleitet worden sind, geht der Verfasser zur allgemeinen Behandlung des Maximum- und Minimumproblems über. Den Beschluss bilden eine Fülle lehrreicher Aufgaben aus der Planimetrie, Stereometrie und Physik.

E. Jahnke.

W. Winter, **Algebra.** Lehrbuch mit Aufgabensammlung für Schulen. Zweite Auflage. Th. Ackermann, München 1895. 318 S.

Lehrbücher sind für den Unterricht in der Algebra überflüssig, wohl aber sind Aufgabensammlungen mit Vorteil zu verwenden. Die neueren Sammlungen, an denen nicht gerade Mangel herrscht, zeigen die Einrichtung, dass den einzelnen Abschnitten eine kurze Darstellung der algebraischen Gesetze und womöglich vollständig durchgeführte Übungsbeispiele vorangestellt sind. Auch der Verfasser des vorliegenden Lehrbuches hat diese Einrichtung getroffen. Zu den schwierigeren Aufgaben sind am Schluss jedes Abschnittes die Resultate beigefügt. Die Beispiele sind nach der Angabe des Verfassers von ihm selbst gefertigt und im Unterricht auf ihre Brauchbarkeit geprüft. Insofern muss auch diese Sammlung wie jede, welche neue Aufgaben bietet, als wertvoll bezeichnet werden.

E. Jahnke.

E. Schultz, **Vierstellige mathematische Tabellen** im engen Anschluss an die mathematischen Tabellen der technischen Kalender. Baedeker, Essen 1896. 80 S. M. 0.80.

„Der Verfasser ist der Überzeugung, dass die sichere Kenntnis des Gebrauches der mathematischen Tabellen in den technischen Kalendern dem Schüler auch später in der Praxis von grossem Werte sein wird. Da nun aber der kleine Druck der Kalendertabellen bei den vielfach anzustellenden Übungen die Sehkraft der Schüler wesentlich beeinträchtigt, soll durch die Herausgabe dieser Tabellen in erster Linie die Schonung des Auges bezweckt werden.“ Das Bestreben, einen möglichst engen Anschluss an die Einrichtung der Kalendertabellen zu erreichen, hat den Verfasser zu einer von anderen Tabellen abweichenden Ablesung von Grad und Minuten geführt.

Die Tabellen erscheinen in zwei Ausgaben, mit und ohne Anleitung. In der Anleitung erläutert der Verfasser an 25 interessanten Beispielen aus der Praxis die Art der Benutzung seiner Tabellen sowie der mathematischen Tabellen der technischen Kalender.

Auf diese Beispiele, die zum Teil des Verfassers „Leitfaden der Körperberechnung für gewerbliche Schulen sowie zum Selbstunterricht für den Maschinentechniker“ entlehnt sind, möchte Referent besonders aufmerksam machen.

E. Jahnke.

P. Treutlein. **Vierstellige logarithmische und goniometrische Tafeln** nebst den nötigen Hilfstafeln. Vieweg, Braunschweig 1896. 72 S. M. 0. 60.

Als Vertreter der Ansicht, dass dem mathematischen Unterricht der Mittelschule am besten durch vierstellige Logarithmentafeln gedient ist, hat der Verfasser hier auf Grund langjähriger Schulerfahrung eine solche Tafel angefertigt. Zwar sind deren schon mehrere vorhanden, die durch billigen Preis, passendes Format, deutlichen Druck, Übersichtlichkeit der Anordnung u.s.w. in gleicher Weise ausgezeichnet sind. Die neue Tafel aber soll „das so sehr aufhaltende Interpolieren ganz unnötig machen oder auf das allergeringste Maß herabdrücken, um so die rasch fördernde Benutzung der Tafel als eines Rechenknechtes zu ermöglichen.“

E. Jahnke.

M. Kröger. **Die Planimetrie in ausführlicher Darstellung** und mit besonderer Berücksichtigung neuerer Theorien. Nebst einem Anhange über Kegelschnitte. O. Meissner, Hamburg 1896. 511 S. M. 8.

Der Verfasser erhebt den Anspruch, im vorliegenden Buch „ein klares System aller irgend erheblichen und lernenswerten planimetrischen Wahrheiten zu geben“ für diejenigen, welche „sich mit der gewöhnlichen schulgemässen, durch mancherlei Rücksichten und Hemmnisse beschränkten Behandlung nicht begnügen können und wollen.“

Um zu beurteilen, ob dieser etwas pomphaften Ankündigung die Ausführung entspricht, wird es nötig sein, auf das Werk näher einzugehen.

Bei dem angedeuteten Standpunkt des Verfassers überrascht zunächst die schwerfällige Breite, in der wenigstens die ersten Kapitel gehalten sind. Wo eine passende Definition hingereicht hätte, um unmittelbar den Lehrsatz zu erhalten, finden sich langathmige Beweise, die womöglich noch die Algebra zu Hilfe rufen. Wo an sich einfache Verhältnisse vorliegen, führt der Verfasser neue Bezeichnungen ein, welche den doch wohl erstrebten Zweck der Zusammenfassung und Vereinfachung jedenfalls nicht erfüllen. Bei der Lektüre dieser Kapitel kamen dem Referenten die Worte in den Sinn, welche Herr Bertram bei der Besprechung einer neuerdings erschienenen Didaktik des mathematischen Unterrichts der gegenwärtigen Lehrergeneration zugerufen hat: „So ist es erklärlich, dass der Anfang

den Anfängern Betrachtungen zumutet, für welche das Interesse erst erzwungen werden muss; dass das jugendlich naive Hantieren mit Rechenoperationen und geometrischen Konstruktionen früher durch Zweifel und logische Sicherungen unterbrochen wird, als bis die Stellen erreicht werden, wo sie unvermeidlich sind und dem nun in Anschauungen und Erfahrungen gereifteren Geiste als das klar werden, was sie sind, nämlich die ersten Offenbarungen der eigentlich mathematischen Ideen.... Sollte aber nicht der ganze mathematische Kursus des Gymnasiums als ein propädeutischer anzusehen sein, und würde nicht eine beträchtliche Zahl von abstrakten Deduktionen auf ein späteres Lebensalter verschoben werden können, wenn man die Erziehung der Schüler zu wirklich strenger Wissenschaftlichkeit so anlegt, dass man, was historisch den Mathematikern erst nach der Entstehung der einzelnen Zweige ihrer Wissenschaft zur vollen Erkenntnis gekommen ist, auch den Schülern erst am Ende ihrer Schullaufbahn in einem Rückblick zum Bewusstsein zu bringen suchte?" (Zeitschrift für Gymnasialwesen II, 538—541.)

Aber auch sonst noch bieten die ersten Kapitel Anlass zu Ausstellungen. So bemüht sich der Verfasser in der Einleitung — natürlich vergebens —, eine Definition der geraden Linie und der Ebene aufzustellen, er übersieht, dass der Begriff der Richtung denjenigen der geraden Linie involviert. Dieselbe Unklarheit bezüglich des Richtungsbegriffs beherrscht die Parallelentheorie des ersten Abschnitts. Der zweite Abschnitt trägt die Überschrift „Entstehung und allgemeine Eigenschaften geradliniger Flächen". Als „geradlinige Flächen" bezeichnet der Verfasser ebene, von geraden Linien begrenzte Figuren!

Kann hiernach Referent sich mit der Darstellung in den einleitenden Kapiteln nicht einverstanden erklären, so möchte er das Anerkennenswerte in einzelnen der nun folgenden Abschnitte um so mehr hervorheben.

Dahin gehört sogleich der dritte Abschnitt, wo der Verfasser ausführlich den Symmetriebegriff behandelt, um ohne Hilfe der Kongruenzsätze eine grosse Reihe von Eigenschaften der Dreiecke und Vielecke herzuleiten.

Allerdings muss auch hier bemerkt werden, dass von den eingeführten Bezeichnungen ein Teil entbehrlich ist. Die vorgeschlagenen Zeichen für centrale und axiale Symmetrie erscheinen dem Referenten nicht einfach genug, um auf Einführung hoffen zu können.

Der vierte Abschnitt bringt die bekannten Methoden zur geometrischen Konstruktion von Dreiecken und Vierecken, der fünfte, welcher sich verschiedentlich an das ausgezeichnete „Lehrbuch der Geometrie von A. Kunze" anlehnt, die Inhaltsbestimmung „geradliniger Flächen." Hier nimmt der Verfasser Gelegenheit, am Quadrat das Verhältnis zweier inkommensurabler Strecken klar zu legen. Er fährt dann S. 143 fort: „Ein solches nicht absolut genau anzugebendes Verhältnis heisst irrational". Der Verfasser übersieht den Unterschied der irrationalen von den transscendenten Grössen, was in dem Kapitel „Kreisberechnungen und Näherungskonstruktionen" noch klarer zu Tage tritt, wo π als Irrationalzahl hingestellt

wird (S. 394). Infolgedessen weisen auch die sonst reichlichen historischen Notizen an dieser Stelle eine Lücke auf.

Es folgt der sechste Abschnitt, die Kreislehre umfassend. Die Darstellung unterscheidet sich von der gebräuchlichen dadurch, dass der Kreis als symmetrische Figur behandelt wird, und dass ein Teil der Sätze nach dem Prinzip der Dualität angeordnet ist. Die beigefügten „Sätze und Aufgaben zur Übung" (es sind deren 311) geben dem Verfasser Veranlassung, die mannigfachen Beziehungen an der ϱ-Figur ausführlich darzulegen. Vielleicht entschliesst sich der Verfasser in einer nächsten Auflage, die knappen Ausdrücke In-, Um- und Ankreis aufzunehmen.

Die beiden nun folgenden Abschnitte gehören zu den besten des ganzen Werkes. In ihnen kommt ausser dem gewöhnlichen Schulpensum ein Teil der wesentlichen Ergebnisse neuerer Untersuchungen zur Darstellung, besonders ausführlich das wichtige Punkt- und Strahlengebilde, die Potenzialität und Ähnlichkeit der Kreise, die Lehre von den Kreisbüscheln und im Anschluss hieran das Wichtigste über Punkt- und Strahlensysteme. Als Schluss des achten Abschnittes hat der Verfasser neben dem Problem des Apollonius auch das Malfattische aufgenommen und von diesem eine elementare Lösung gegeben, deren Ausgangspunkte sich nach der Angabe des Verfassers in Julius Petersen „Methoden und Theorien" finden.

Dem siebenten wie dem achten Abschnitt sind wieder zahlreiche „Sätze und Aufgaben zur Übung" angehängt, unter denen besonders die zum letzteren gehörige Sammlung hervorgehoben zu werden verdient.

Den metrischen Relationen am Dreieck und Viereck, welche schon der fünfte Abschnitt beigebracht hat, reihen sich im neunten Abschnitt solche für die Kreispolygone an.

Der zehnte Abschnitt bietet einige isoperimetrische Sätze und Aufgaben und der elfte das wesentliche aus der „algebraischen Analysis bei geometrischen Konstruktionen". Im letzten Abschnitt hat der Verfasser zunächst ausführlich die Kreispolarität behandelt und sodann versucht, das Prinzip der reziproken Radien und die Kreisverwandtschaft „in einer Weise darzustellen, die davon überzeugen möchte, dass diese Materie sich ohne zu grosse Ansprüche an die Fassungskraft der Durchschnittsschüler bewältigen lasse und sehr wohl zur Aufnahme in das wiederholende und erweiternde Pensum oberer Klassen geeignet wäre."

Der Anhang bringt das Wichtigste über die Kegelschnitte. Nachdem zuerst die Ellipse, Hyperbel und Parabel als geometrische Örter behandelt und besonders auf metrische Eigenschaften hin untersucht worden sind, werden sie als Kreisprojektionen durch Punkte und Tangenten bestimmt. Die wichtigsten Sätze über Polarität und Involution schliessen sich an.

Zum Schluss möchte Referent noch seine Zustimmung zu dem ablehnenden Standpunkt des Verfassers bezüglich der Frage ausdrücken, ob die hypereuklidischen Untersuchungen in dem Lehrplan der Schule eine Stelle finden sollen. Es erledigt sich diese Frage aus der allgemeinen Er-

wägung, dass für den Schulunterricht der Schwerpunkt auf das Können und nicht auf das Kennen gelegt werden muss.

Zusammenfassend möchte Referent hiernach sein Urteil über das Buch dahin abgeben, dass es, von den gerügten Mängeln abgesehen, in mancher Hinsicht eine Bereicherung der Lehrbuch-Litteratur über Planimetrie bildet.

E. Jahnke.

Bibliographie

vom 9. Juni bis 4. August 1898.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin, Reimer. Mathematische, kart. M. 3. 50.
Physikalische, kart. M. 4. 50.

Abhandlungen d. königl. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikal. Klasse. Neue Folge. 1. Bd. Nr. 2. Brendel, Mart., Theorie der kleinen Planeten. 1. Teil. Berlin, Weidmann. M. 16.

Abhandlungen der kaiserl. Leop.-Carol. deutschen Akademie der Naturforscher, 71. Bd. Leipzig, Engelmann. Nr. 5, Schilling, Friedr., Geometrisch-analytische Theorie der symmetrischen S-Funktionen mit einem einfachen Nebenpunkt. M. 7.

—— Nr. 6, Schröder, Ernst, Über zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantorsche Sätze. M. 3.

—— Nr. 7, Schröder, Ernst, Die selbständige Definition der Mächtigkeiten 0, 1, 2, 3 und die explizite Gleichzahligkeitsbedingung. M. 1.

Berichte, mathematische und naturwissenschaftliche, aus Ungarn. 14. Bd. 1895—1896. Berlin, Friedländer & Sohn. M. 8.

Jahresbericht des Centralbureaus für Meteorologie und Hydrographie im Grossherzogtum Baden, mit den Ergebnissen der meteorologischen Beobachtungen und der Wasserstandsaufzeichnungen am Rhein und seinen grösseren Nebenflüssen f. das Jahr 1897. Karlsruhe, Braun. M. 6.

Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 6. Bd. 1897 1. Heft. Leipzig, B. G. Teubner. M. 4.

Sitzungsberichte, Münchener, Mathematische Klasse, 1898, 1. Heft. München, Franz. M. 1. 20.

—— Wiener, Mathem.-naturwissenschaftl. Klasse. 1. Abt. 106. Bd. 8. bis 10. Heft. Wien, Gerolds Sohn. M. 1.

—— Dasselbe. Abt. IIa. 106. Bd. 7.—10. Heft. Ebenda. M. 15. 70.

Veröffentlichungen des hydrographischen Amtes der kaiserl. und königl. Kriegs-Marine in Pola. Nr. 5, Gruppe II. Jahrbuch der meteorologischen und erdmagnetischen Beobachtungen. Neue Folge, II. Bd. Beobachtungen des Jahres 1897. Wien, Gerold & Co. M. 12.

Veröffentlichungen des königl. astronomischen Recheninstituts zu Berlin. Berlin, Dümmler. Nr. 7. BAUSCHINGER, J., Genäherte Oppositions-Ephemeriden von 49 kleinen Planeten für 1898 August bis Dezember. M. 1. 20.

Geschichte der Mathematik und Physik.

GROSS, TH., Robert Mayer und Hermann v. Helmholtz. Eine kritische Studie. Berlin, Fischer. geb. M. 4. 50.

Reine Mathematik.

BACHMANN, PAUL, Zahlentheorie. 4. Teil. Die Arithmetik der quadratischen Formen. 1. Abt. Leipzig, B. G. Teubner. M. 18.

BUDISAVLJEVIĆ, EMAN. v., und MIKUTA, ALFR., Leitfaden für den Unterricht in der höheren Mathematik. I. Bd. Grundzüge der Determinanten-Theorie und der projektiven Geometrie. Analytische Geometrie. Wien, Braumüller. geb. M. 8.

BÜRKLEN, O. TH., Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik (Sammlung Göschen Nr. 51). 2. Aufl. Leipzig, Göschen. M. —. 80.

GAUSS, F. G., Fünfstellige vollständige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. Zwei Teile. Halle, Strien. 1. 55. Aufl. M. 2. 50.

—— 2. Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für Dezimalteilung des Quadranten. 2. Aufl. M. 6.

GRAF, J. H. und GUBLER, ED., Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen. (In zwei Heften.) 1. Heft. Die Besselsche Funktion. 1. Art. Bern, Wyss. M. 3. 20.

HÖHNEMANN, G., Praktisches Lehrbuch der Mathematik zum Selbstunterricht. I. Algebra. Leipzig, Strauch. M. 1. 50.

HULLMANN, K., Mathematische Abhandlungen. I. Die Reihen. II. Die Dreiteilung des Winkels. III. Das delische Problem. München, Finsterlin Nachfolger. M. 1. 50.

KEMMER, GFR., Über die Verwandlung von Projektivitäten in Involutionen und von Reziprozitäten in Polarsysteme durch Anwendung von Projektivitäten. Dissertation. Darmstadt, Winter. M. 1.

KOBER, GEO., Die Grundgebilde der neueren Geometrie. Eine geordnete Zusammenstellung ihrer Um- und Abbildungen erster und zweiter Ordnung. 1. Teil. Die Grundgebilde der Ebene. Hannover, Hahn. M. 3.

SCHUBERT, HERM., Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen (Sammlung Göschen Nr. 81). Leipzig, Göschen. M. —. 80.

Angewandte Mathematik.

AHLBORN, FR., Der Schwebflug und die Fallbewegung ebener Tafeln in der Luft. Über d. Stabilität d. Flugapparate. Hamburg, Friederichsen & Co. M. 5.

BACH, C., Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Kesselwandungen. 3. Heft. Untersuchungen über die Formänderungen und die Anstrengungen flacher Böden. Berlin, Springer. M. 3.

BÖRGEN, C., Über die Auflösung nautisch-astronomischer Aufgaben mit Hilfe der Tabelle der Meridionalteile (der „Merkatorschen Funktion"). Hamburg, Friederichsen & Co. M. 5.

EULER, LEONH., Die Abhandlungen über Kartenprojektion (1777). Herausgegeben von A. WANGERIN (Ostwalds Klassiker Nr. 93). Leipzig, Engelmann. M. 1.20.

FRANKE, J. H., Geodätische Punktkoordinierung in sphärischen Kleinsystemen. Vergleichende Entwickelungen im einheitlichen Koordinatensystem der bayerischen Landesvermessung. München, Ackermann. M. 2.40.

GROSS, G., Die mechanische Wärmetheorie (Thermodynamik) unter besonderer Berücksichtigung der Molekulartheorie und der sich daraus ergebenden Erweiterung des Anwendungsgebietes der Thermodynamik, nebst Anwendungen auf Wärmemotoren, Kältemaschinen und andere technische Einrichtungen. 1. Bd. Jena, Costenoble. M. 8.

HEYENGA, H., Ortsbestimmung u. Kompassberichtigung nach neuer Theorie... zur Erweiterung, Vervollkommnung und Vereinfachung der nautischen Astronomie. Hamburg, Eckardt & Messtorff. geb. M. 10.

HOLZMÜLLER, GUST., Die Ingenieur-Mathematik in elem. Behandlung. 2. Teil. Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 6.

JÄGER, GUST., Theoretische Physik. I. Mechanik und Akustik. II. Licht und Wärme (Sammlung Göschen Nr. 76, 77). Leipzig, Göschen. à M. —.80.

Landes-Triangulation, die königl. preuss. Hauptdreiecke. 10. Teil. A. Der nördl. niederländ. Anschluss. B. Der südl. niederländ. Anschluss. C. Der belgische Anschluss. Berlin, Mittler & Sohn. kart. M. 10.

Nivellements-Ergebnisse, die, der trigonometrischen Abteilung der königl. preuss. Landesaufnahme. 9. Heft. Prov. Hannover und das Grossherzogt. Oldenburg. Berlin, Mittler & Sohn. kart. M. 1.

SCHULTZE, FRZ., Nautik. Kurzer Abriss d. tägl. an Bord von Handelssch. angew. Teils d. Schifffahrtsk. (Samml. Göschen Nr. 84). Leipzig, Göschen. M. —.80.

TRUCK, SIGISM., Die russische Triangulierung auf der Balkanhalbinsel in den Jahren 1877—1879. Wien, Lechner. M. 1.

Veröffentlichung d. königl. preuss. geod. Instituts. Bestimmungen v. Azimuten im Harzgebiete, ausgef. i. d. J. 1887—1891. Berlin, Stankiewicz. M. 6.

VILLIGER, W., Die Rotationszeit d. Planeten Venus, m. einem Anhang, enth. Beobachtungen der Oberflächenbeschaffenheit d. Planeten Venus u. Merkur. (Aus: „Annalen der Münch. Sternwarte", 3. Bd.) München, Franz. M. 7.

VOLLAND, CONR., Anleitung z. Schattenkonstruktion. Zum Gebrauch f. Schüler technischer Lehranstalten u. s. w. Leipzig, Gebhardt. M. 1. 20.

—— Die Schattenkonstruktion. Zwei Teile. Ebenda. 1. Eine Sammlung von Aufgaben, nebst einer Anleitung z. Schattenkonstruktion. 2. Aufl. M. 2.

—— 2. Aufgabensammlung f. die architekt. Schattenlehre. 2. Aufl. M. 1. 50.

Physik und Meteorologie.

BERG, OTTO, Über die Schwingungsdauer v. Kondensatorentladungen. Diss. Freiburg i. Br., Speyer & Kärner. M. 1.

HÉJAS, ANDR., Die Gewitter in Ungarn nach den Beobachtungen von den Jahren 1871—1895. Budapest, Kilián. M. 4.

HELMHOLTZ, H. v., Vorlesungen über theoretische Physik. Leipzig, Barth.
I, 2. Vorlesungen über die Dynamik diskreter Massenpunkte. Herausgegeben von OTTO KRIGAR-MENZEL. M. 15.
III. Vorlesungen über die mathematischen Prinzipien der Akustik. Herausgegeben von ARTH. KÖNIG und CARL RUNGE. M. 12.

KIENAST, HERM., Das Klima von Königsberg i. Pr. I. Teil. Die Niederschlagsverhältnisse der Jahre 1848—1897. Progr. Königsberg, Koch. M. 3.

LIZNAR, J., Die Verteilung der erdmagnet. Kraft in Österreich-Ungarn zur Epoche 1890·0 nach den in den Jahren 1890—1894 ausgeführten Messungen. II. Teil. A. Die normale Verteilung zur Epoche 1890·0. B. Die Störungen und die störenden Kräfte zur Epoche 1890·0. C. Die normale Verteilung zur Epoche 1850·0. D. Die Störungen der Epoche 1850·0. E. Säkulare Änderung. F. Formel zur Berechnung der erdmagnet. Elemente für eine beliebig zwischen 1850 und 1890 liegende Epoche. (Aus: Denkschriften der kaiserl. Akad. d. Wissensch.) Wien, Gerolds Sohn. M. 7. 80.

MÜLLER-POUILLETS Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 9. Aufl. Von LEOP. PFAUNDLER unter Mitwirkung von OTTO LUMMER. 2. Bd. 2. Abt. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 10.

NEWTON, SIR ISAAC, Optik (1704). Übersetzt und herausg. von WILLIAM ABENDROTH. I. Buch. (Ostwalds Klassiker Nr. 96.) Leipzig, Engelmann. M. 2. 40.

STERNECK, ROB. v., Relative Schwerebestimmungen, ausgeführt in den Jahren 1895 und 1896. Wien, Lechner. M. 1.

THOMPSON, SILVANUS P, Über sichtbares und unsichtbares Licht. Deutsch von OTTO LUMMER. Halle, Knapp. M. 9.

WIEDEMANN, GUST., Die Lehre von der Elektrizität. 2. Aufl., zugleich als 4. Aufl. der Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. 4. Bd. Braunschweig, Vieweg & Sohn. geb. M. 34.

Historisch-litterarische Abteilung.

Rezensionen.

S. Lie. **Geometrie der Berührungstransformationen.** Dargestellt von S. Lie und G. Scheffers. 1. Bd. XI und 694 S. Leipzig 1896, B. G. Teubner.

Die analytische Theorie der Lieschen Berührungstransformationen hat ihre Darstellung im zweiten Bande der von Lie und Engel herausgegebenen „Vorlesungen über endliche, kontinuierliche Transformationsgruppen" gefunden; man sehe die Besprechung in dieser Zeitschrift Bd. 39, 1894, S. 95 flg. Wir können uns daher, dem Titel des vorliegenden Bandes entsprechend, im wesentlichen auf die geometrischen Auffassungen und Anwendungen der Theorie beschränken; übrigens wird die letztere als solche auch hier noch einmal in ihren Grundzügen entwickelt.

Um gleich das Hauptturteil vorwegzunehmen, so scheint uns gerade dieses Werk, wie kein anderer Band der ganzen Serie, geeignet, Anfänger in das Liesche System einzuführen: wir möchten sogar noch einen Schritt weiter gehen und es, namentlich im Interesse der Geometer, fast bedauern, dass der vorliegende Band nicht gleich als erster erschienen ist.

Es handelt sich um eine erweiterte Wiedergabe der inhaltsreichen Abhandlungen Lies zumeist aus dem Anfang der siebziger Jahre über Berührungstransformationen. Man erkennt deutlich, wie Lie vom Beginn seiner wissenschaftlichen Thätigkeit an von der Anschauung durchdrungen war, „dass sich Analysis und Geometrie ebenso wie früher auch in unserer Zeit gegenseitig stützen und mit neuen Ideen bereichern sollen." Man beobachtet, aus welchen Anschauungsquellen heraus sich beim Verfasser die Keime zu seinen neuen und umfassenden Ideen gebildet und entwickelt haben, was auf einen historisch veranlagten Leser unzweifelhaft anregender wirkt, als ein systematischer Aufbau der Theorie, so wichtig ein solcher an sich sein mag.

Das Buch gliedert sich in drei grössere Abschnitte.

Der erste behandelt die Lehre von den Linienelementen (kürzer „L. E.") in der Ebene nebst den zugehörigen Berührungstransformationen (kürzer „B. T.").

Der zweite und dritte Abschnitt nehmen die Erweiterung auf den Raum in Angriff, die in doppelter Weise vor sich geht: der zweite Ab-

schnitt führt in die Lehre von den L. E. im Raume ein, der dritte in die von den Flächenelementen (kürzer „F. E.“). Die B. T. des Raumes bleiben im wesentlichen einem zweiten Bande vorbehalten.

Der erste Abschnitt beginnt zweckmässig mit einer Anzahl klassischer geometrischer Transformationen, die sich als B. T. einer Ebene in sich, respektive einer Ebene in eine andere auffassen lassen.

Dahin gehören die Orthogonalprojektion einer Ebene auf eine zweite, die allgemeine ebene projektive Punkttransformation und die ebene Inversion. Es sind das „uneigentliche“ B. T. der Ebene. Zunächst ordnen sie nur je einem Punkte P der Ebene einen Punkt P' zu; da aber wegen der Stetigkeit der Transformationen auch jedem zu P benachbarten Punkte Q ein zu P' benachbarter Punkt Q' entspricht, mithin auch jeder Fortschreitungsrichtung durch P eine bestimmte Fortschreitungsrichtung durch Q, so wird auch jedem Punkt und einer durch ihn gehenden Geraden ein anderer Punkt nebst einer durch ihn gehenden Geraden korrespondieren, oder, nach Lie, ein L. E. einem L. E. Die beiden entgegengesetzten Richtungen einer Geraden werden hierbei nicht auseinandergehalten (s. u.). Analytisch ergiebt sich sofort, wenn

1) $$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y)$$

die Punkttransformationen darstellen, durch „Erweiterung“ die Transformation der Richtungen:

2) $$p_1 = \frac{Y_x + Y_y p}{X_x + X_y p},$$

wo

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad p_1 = \frac{dy_1}{dx_1},$$

und die X_x etc. die bezüglichen partiellen Differentialquotienten bedeuten.

Dass die neue Auffassung bereits manche Vorteile bietet, dafür mag die Inversion als Beispiel dienen; die übliche Ausnahme in der Zuordnung von Pol O und der unendlich fernen Geraden u fällt jetzt fort, da dem Pol O und einer durch ihn gehenden Richtung (Geraden) ein bestimmter Punkt auf u, also auch hier ein L. E. einem L. E. entspricht.

Man hätte freilich auch die Punkttransformation 1) mit irgend einem von 2) verschiedenen Zuordnungsprinzip für die Richtungen kombinieren können, gegenüber all diesen zusammengesetzten Transformationen ist die durch 1), 2) festgelegte offenbar dadurch ausgezeichnet, dass sie die L. E. einer Kurve wiederum in die L. E. einer Kurve überführt.

Als Beispiele für „eigentliche“ B. T. der Ebene — die nicht durch Erweiterung einer Punkttransformation entstehen — dienen die Dilatation, die Fusspunkttransformation, die Transformation durch reziproke Polaren.

Hier geht zwar auch jedes L. E. einer Kurve in ein ebensolches über, aber die L. E. eines Punktes verwandeln sich im allgemeinen nicht wieder in die eines Punktes, sondern in die einer Kurve. Man wird so darauf geführt, einen Begriff aufzustellen, der die Begriffe „Punkt“ und „Kurve“, und nur diese umfasst: das ist der „Elementverein“, analytisch eine solche ∞^1 Schar von L. E., die der „speziellen Pfaffschen Gleichung“:

3) $$dy - p\,dx = 0$$

genügen. Auch die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung $F(x, y, p) = 0$ führt von selbst darauf: eine solche Gleichung integrieren heisst nichts anderes als alle Elementvereine zu bestimmen, deren Elemente $F = 0$ erfüllen.

Eine B. T. der Ebene ist damit definiert als eine solche Transformation der L. E. (x, y, p), die jeden Verein von Elementen (x, y, p) in einen Verein (x_1, y_1, p_1) überführt. Analytisch ist dazu das Bestehen einer Identität

4) $$dy_1 - p_1 dx_1 = \varrho(x, y, p)\,(dy - p\,dx) \quad (\varrho \neq 0)$$

erforderlich, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Invarianz der Gleichung 3).

Alle B. T. der Ebene lassen sich, wie eine einfache Rechnung zeigt, durch „ausführbare" Operationen (nämlich Differentiationen und Eliminationen) erhalten.

Dasselbe leistet eine weniger einfache, aber tiefer eindringende Integrationsmethode, die darauf beruht, dass die eine B. T. der Ebene ausdrückenden Transformationsfunktionen x_1, y_1, p_1 der x, y, p an gewisse Differentialrelationen geknüpft sind, deren Bestehen umgekehrt eine B. T. charakterisiert.

Indessen ist wohl zu beachten, dass keine der beiden Methoden eine explizite Darstellung sämtlicher B. T. der Ebene liefert. Will man das, so wird man genötigt, den Begriff der „infinitesimalen" B. T. einzuführen, das ist einer solchen, bei der die L. E. nur unendlich kleine Änderungen erfahren. Die mittels der Taylorschen Reihe auszuführende Rechnung zeigt, dass eine beliebige Funktion $f(x, y, p)$ bei einer infinitesimalen B. T. den Zuwachs

5) $$\delta f = [(Wf) - Wf_y]\,\delta t = Bf \cdot \delta t$$

erfährt, wo δt einen unendlich kleinen Parameter bedeutet, W eine gewisse Funktion der x, y, p, (Wf) den sogenannten „Poissonschen Klammerausdruck"; umgekehrt liefert 5) bei Annahme einer willkürlichen Funktion W stets eine infinitesimale B. T.

Der Ausdruck Bf, der Faktor von δt in 5), heisst das „Symbol" der infinitesimalen B. T., W ihre „charakteristische Funktion".

Mit der Theorie der B. T. der Ebene ist aufs engste die ihrer „Differentialinvarianten erster Ordnung" verknüpft, das ist der der B. T. gegenüber invarianten Funktionen von x, y, p; eine solche ist eine beliebige Funktion von zwei unabhängigen Individuen u, v; kennt man von diesen nur die eine, so bestimmt sich die andere durch eine Quadratur. Weiterhin tritt der Begriff zweier „vertauschbarer" B. T. $B_1 f$ und $B_2 f$ in den Vordergrund, das heisst solcher, deren Reihenfolge gleichgültig ist; sie lassen sich auf eine besonders einfache kanonische Form (nämlich zweier infinitesimaler Translationen) bringen.

Die Verfasser unterlassen nicht, die obigen Begriffe und Sätze an zahlreichen Beispielen zu illustrieren. Es mag genügen auf eine An-

wendung hinzuweisen, die hinsichtlich der Bedeutung und Schwierigkeit des Gegenstandes die Tragweite der Methoden erkennen lässt: wie muss das Bogenelement einer Fläche beschaffen sein, auf der die Schar der geodätischen Kreise unendlich viele B. T. gestattet? Als Resultat einer nicht einfachen Rechnung ergiebt sich, dass nur zwei Klassen solcher Flächen existieren, die Flächen konstanter Krümmung und die Spiralflächen.

Der Übergang zum zweiten Abschnitt, der den L. E. des Raumes gewidmet ist, wird durch eine Operation vermittelt, die auch weiterhin eine durchgreifende Bedeutung erhält, durch eine „Abbildung" der L. E. (x, y, p) der Ebene auf den Punktraum. Eine solche ist leicht herzustellen: man trage etwa im Punkte (x, y) des L. E. (x, y, p) der Ebene E ein Lot von der Länge p auf, so wird der Endpunkt (x, y, p) das „Bild" des L. E. der Ebene E sein und umgekehrt.

Demgemäss bilden sich die Elementvereine der Ebene E im Raume ab als die „Integralkurven" von 3), das heisst als die Kurven, deren L. E. die Gleichung 3) erfüllen.

Die Verfasser ergreifen die Gelegenheit, den allgemeinen „Pfaffschen Gleichungen" — linearen homogenen Gleichungen in dx, dy, dp, deren Koeffizienten Funktionen von x, y, p sind — insbesondere ihren kanonischen Formen respektive denen ihrer linken Seiten, der „Pfaffschen Ausdrücke", eine eingehende Untersuchung zu Teil werden zu lassen; es giebt solcher kanonischen Formen bei Anwendung von Punkttransformationen (x, y, p) nur zwei respektive drei, von denen im ersteren Falle die Gleichung 3) die eine repräsentiert.

Wir lassen diese und damit zusammenhängende speziellere Untersuchungen beiseite und wenden uns zu den grundlegenden Entwickelungen über Mongesche Gleichungen und Plückersche Linienkomplexe.

Indem, wie üblich, x, y, z, die Koordinaten eines Raumpunktes bezeichnen mögen, verstehen die Verfasser unter einer „Mongeschen Gleichung" eine in dx, dy, dz homogene, deren Koeffizienten im allgemeinen noch von x, y, z abhängen.

Da ein L. E. des Raumes bestimmt ist durch seinen Punkt (x, y, z) und die beiden Verhältnisse der dx, dy, dz, welche seine Richtung angeben, so wird vermöge einer Mongeschen Gleichung aus den ∞^5 L. E. des Raumes eine ∞^4-Schar ausgeschieden, so zwar, dass jedem Raumpunkt P noch eine ∞^1-Schar von L. E. zugewiesen ist, deren Geraden den „Elementarkegel" von P bilden. Auf einer beliebigen Fläche liegen daher stets eine oder mehrere Scharen von Integralkurven einer Mongeschen Gleichung.

Für den Geometer werden in erster Linie solche Mongesche Gleichungen in Betracht kommen, die ∞^3 Gerade als Integralkurven besitzen. Dann und nur dann wird die Mongesche Gleichung zu einer in sechs Grössen p_{ik} — den Plückerschen Linienkoordinaten einer durch einen Punkt (x, y, z) und einen ihm benachbarten bestimmten Geraden — homogenen Gleichung $\Phi(p_{ik}) = 0$; mit anderen Worten, eine solche Gleichung $\Phi(p_{ik}) = 0$

charakterisiert (durch ihre ∞^4 L. E.) einen Plückerschen Linienkomplex, so dass die Theorie der Mongeschen Gleichungen die der Linienkomplexe umfasst.

Eine Mongesche Gleichung ordnete jedem Raumpunkt ∞^1 L. E. zu, deren Geraden die Kanten eines Elementarkegels waren. Um auch die dualistische Auffassung zur Geltung zu bringen, nach der ein Kegel von seinen Tangentialebenen umhüllt wird, wird man sagen, dass die Mongesche Gleichung zugleich jedem Raumpunkt ∞^1 „Flächenelemente“ (kürzer „F. E.“) zuordnet, wo unter einem F. E. der Inbegriff eines Punktes und einer durch ihn gehenden Ebene zu verstehen ist. Als „Koordinaten“ eines F. E. werden fungieren die Koordinaten x, y, z des Punktes nebst den Grössen $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, die die Stellung der Ebene (Richtung ihrer Normalen) fixieren.

In diesem Sinne bietet sich die Fragestellung dar: wie kann man bei gegebener Mongescher Gleichung alle Flächen bestimmen, die in allen ihren Punkten P den zugeordneten Elementarkegel berühren, oder auch, für deren jeden Punkt P das F. E., das ihm die Fläche vermöge der Tangentialebene zuweist, sich stets unter den ∞^1 F. E. befindet, die ihm die Mongesche Gleichung zuweist.

Es erscheint von vornherein plausibel, dass sich alle diese Flächen durch Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in z $F(x, y, z, p, q) = 0$ ergeben werden. Anderseits wird jede Integralfläche einer Mongeschen Gleichung von ∞^1 Kurven, den „Charakteristiken“, überdeckt, so, dass in jedem Punkt der Fläche der zugehörige Elementarkegel längs der betreffenden Kurve berührt.

Der Vollständigkeit halber entwickeln die Verfasser auch die Grundzüge der Plückerschen Liniengeometrie, doch so, dass stets die Beziehungen zu den Differentialgleichungen hervortreten; ein historisches Kapitel über ältere Untersuchungen über Geradenscharen im Raume dürfte die Geometer lebhaft interessieren. Als ein typisches Muster für die skizzierten Methoden erscheint die Behandlung des „tetraedralen Komplexes“, das ist der Gesamtheit der Geraden, die ein festes Tetraeder nach konstantem Doppelverhältnis schneiden.

Ein bemerkenswertes Hilfsmittel ist hierbei die „logarithmische Abbildung“ des Raumes, in dem lx, ly, lz als neue Veränderliche eingeführt werden. Logarithmische Abbildungen sind wohl schon öfters von Graphikern zur praktischen Auflösung von Gleichungen und anderem mit Vorteil verwendet worden, in der Geometrie dürften sie bisher selten aufgetreten sein.

Diese Abbildung vereinfacht hier nicht nur wesentlich die Differentialgleichung des tetraedralen Komplexes, sondern sie gewährt auch den Vorzug, die projektiven Transformationen des Tetraeders in sich in Translationen umzuwandeln.

Indem wir die Behandlung einiger Probleme der Liniengeometrie, die auf partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung führen, nur streifen,

kommen wir zu dem Kapitel über die Beziehungen zwischen den Geraden und Kugeln des Raumes, das die Verfasser selbst als das wichtigste des ganzen Bandes hinstellen.

Die Grundlage bilden die konformen Punkttransformationen der Ebene und des Raumes. Eine konforme Punkttransformation der Ebene hängt, wie man weiss, noch von (zwei) willkürlichen Funktionen ab; beschränkt man sich aber auf die, die jeden Kreis in einen Kreis überführen, so gelangt man zu der wohlbekannten Gruppe von ∞^6 Transformationen, die in der modernen Theorie der automorphen Funktionen eine so wichtige Rolle spielen. Dagegen hängt die Gesamtheit der konformen Punkttransformationen des Raumes, da sie von selbst jede Kugel in eine Kugel überführen, von vornherein nur von einer endlichen Anzahl von (zehn) Parametern ab.

Diese „Gruppe" von konformen Punkttransformationen des Raumes wird in Beziehung gesetzt zu einer, den Geometern gleichfalls geläufigen Abbildung des Raumes auf die Ebene, die analytisch durch die Gleichungen

6) $$x = X,\ y = Y,\ r = iZ$$

dargestellt wird, so dass dem Raumpunkte (X, Y, Z) der Kreis in der Ebene $C = 0$ mit dem Zentrum (x, y) und dem Radius r zugeordnet wird. Verfolgt man aber die Abbildung 6) weiter, so erkennt man, dass sie ein ein-eindeutiges Entsprechen vermittelt zwischen den konformen Punkttransformationen des Raumes und den B. T. der Ebene, die jeden Kreis in einen Kreis überführen. Es beruht das darauf, dass vermöge 6) das ebene Bild einer „Minimalgeraden", i. e. einer Geraden des Komplexes $dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0$, ein L. E. ist.

Neben die Abbildung 6) stellt sich eine andere, nicht minder wichtige. Man denke sich im Raume ein (allgemeines) Möbiussches Nullsystem gegeben, seine L. E. genügen einer Pfaffschen Gleichung, die sich durch projektive Transformation auf die typische Form bringen lässt:

7) $$d(z + xy) - 2y\,dx = 0,$$

die also vermöge der ein-eindeutigen quadratischen Transformation

8) $$\xi = x, \quad \eta = z + xy, \quad \pi = 2y$$

in 3) übergeht. Führt man demnach die Abbildungen 8), 6) nach einander aus, so entsteht eine Abbildung des Raumes in sich, so, dass jedem Punkt (x, y, z) eine Minimalgerade des Raumes (X, Y, Z) zugeordnet wird, und umgekehrt einem Punkte (X, Y, Z) eine Gerade des Nullsystems 7): als Resultat einer längeren Elimination erhält man die wichtigen Darstellungsgleichungen:

9) $$X + iY + xZ + z = 0, \quad x(X - iY) - Z - y = 0.$$

Ein Nullsystem ordnet aber auch die F. E. des Raumes zu „reziproken" Paaren an, indem stets dem Punkt (Ebene) des einen F. E. Ebene (Punkt) des andern entsprechen, mithin auch die Flächen zu reziproken Paaren. Daher charakterisiert 9) zugleich eine ein-zweideutige Zuordnung der Flächen, indem immer einem Paar reziproker Flächen im Raume (x, y, z) eine einzige Fläche im Raume (X, Y, Z) korrespondiert und umgekehrt.

Im besonderen gehen die F. E. einer Kugel über in die zweier Geraden (die dann reziproke Polaren des Nullsystems sind).

Das bemerkenswerteste Ergebnis ist aber, dass sich bei zwei vermöge 9) zugeordneten Flächen die Krümmungslinien den Haupttangentenkurven entsprechen.

Der dritte und letzte Abschnitt behandelt die Theorie der F. E. und als einen integrierenden Bestandteil von ihr die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$10) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Diese Auffassung wird aber erst allmählich entwickelt. Vorerst begnügen sich die Verfasser damit, Lagranges Theorie der Gleichungen 10) in einer geometrischen Einkleidung vorzutragen, wie sie im wesentlichen schon Monge gewählt hat, wobei der Begriff des F. E. eine mehr formale Rolle spielt, insofern er die Sprechweise erleichtert.

In diesem Sinne verlangt die Integration von 10), die durch 10) bestimmten ∞^4 F. E. in ∞^2 Scharen von je ∞^2 Elementen einer Fläche anzuordnen. Die Gleichung all dieser Flächen, die zwei Parameter a, b mit sich führt:

$$11) \qquad z = \Phi(x, y;\ a, b)$$

ist die „vollständige Lösung" von 10); durch Differentiation und Elimination der a, b kommt man von 11) zu 10) zurück. Für irgend eine Lösung $z = \varphi(x, y)$ von 10) liegen dann drei Möglichkeiten vor: I. Die Fläche $z = \varphi$ hat alle ihre ∞^2 F. E. mit einer Fläche 11) gemein, ist also in 11) als „Partikularlösung" enthalten; II. die Fläche $z = \varphi$ hat mit jeder von gewissen ∞^1 Flächen 11), die durch eine willkürliche Gleichung $\omega(a, b) = 0$ ausgeschieden werden, je ein F. E. gemein, ist also deren Umhüllende, das liefert die „allgemeine" Lösung von 10); III. die Fläche $z = \varphi$ hat mit jeder Fläche 11) nur eine diskrete Anzahl von F. E. gemein, ist also die Umhüllende von 11), und heisst eine „singuläre" Lösung von 10).

Die beiden letzteren Lösungen ergeben sich aus 11) durch ausführbare Operationen, so die allgemeine Lösung (Integralfläche), auf die wir uns hier beschränken, durch Elimination von a aus:

$$12) \qquad z = \varphi, \ \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} b'(a) = 0,$$

wo $b(a)$ die mit $\omega(a, b) = 0$ äquivalente Funktion b von a bedeutet. Die Kurven, die 12) bei Variieren von a darstellt, sind die „Charakteristiken" von 11), deren es aber nur eine ∞^3 Schar giebt, da man die drei Grössen a, $b(a)$, $b'(a)$ als die drei einzigen Parameter ansehen kann.

Diese ∞^3 Charakteristiken führen unmittelbar vermöge ihrer ∞^4 L. E. wieder zur Theorie der Mongeschen Gleichung zurück: deren Elementarkegel sind genau dieselben, wie die durch die F. E. 10) einem jeden Punkte zugeordneten.

Die systematische Behandlung des Gegenstandes basiert auf dem Fundamentalbegriff eines „Vereines" von F. E. Sagt man von zwei unend-

lich benachbarten F. E., sie seien in „vereinigter Lage": wenn sie die Pfaffsche Gleichung $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ erfüllen, so bildet eine Schar von F. E. einen „Verein", wenn jedes Element der Schar mit allen unendlich benachbarten Elementen der Schar vereinigt liegt.

Ein Elementverein besteht entweder aus ∞^2 F. E. — dann ist er eine Fläche, oder eine Kurve, oder ein Punkt — oder aus ∞^1 F. E., dann ist er ein Elementarkegel, oder, wenn die ∞^1 F. E. längs einer Kurve liegen, ein „Elementstreifen". Dann lautet das, alle Fälle umfassende Problem der Integration von 10): Man soll alle Elementvereine der ∞^4 F. E. 10) aufsuchen. Eine „vollständige Lösung" von 10) ist jetzt allgemeiner eine Schar von ∞^2 (verschiedenen) Vereinen von je ∞^2 F. E., die 10) genügen. Noch wichtiger ist der Begriff des „charakteristischen Streifens", der jetzt an die Stelle der „Charakteristik" tritt. Deutet man nämlich a, b als Punktkoordinaten in einer (a, b)-Ebene, so ist ein charakteristischer Streifen einfach das räumliche Bild eines L. E. der Ebene; denn eine einfache Rechnung zeigt, dass zwei sich in einem Punkte (a, b) berührende Kurven $\omega_1(a, b) = 0$, $\omega_2(a, b) = 0$ zwei allgemeinen Integralflächen von 10) entsprechen, die sich längs der Charakteristik 12) berühren, das heisst einen Elementstreifen gemein haben.

Schneidet man anderseits die Gesamtheit der Integralflächen von 10) durch eine allgemein, aber bestimmt gewählte (ξ, y)-Ebene, so wird dadurch zwischen der (a, b)-Ebene und der (ξ, y)-Ebene eine Beziehung festgelegt: diese Beziehung erweist sich als eine B. T.

Indem wir uns versagen, auf die weiteren Ausführungen in dieser Richtung — so den Existenzbeweis für die Integrale einer analytischen Gleichung 10), ferner die wichtige Rolle, welche die „Involutionsbeziehung" bei mehreren Gleichungen 10), spielt — einzugehen, weisen wir noch kurz auf einige Kapitel hin, die — in Analogie mit den bekannten Erscheinungen bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen — von dem Vorteil handeln, den die Kenntnis einer oder mehrerer infinitesimalen Punkttransformationen, die eine Gleichung 10) gestattet, für ihre Integration darbietet. Diese Untersuchungen sollen im zweiten Bande systematischer wieder aufgenommen werden. Desgleichen möchten wir die Geometer noch besonders auf das letzte Kapitel aufmerksam machen, in dem eine Reihe flächentheoretischer Probleme analytisch, aber unter wesentlicher Verwendung geometrischer Mittel, gelöst wird. Es handelt sich um die Bestimmung aller Gleichungen 10), deren Charakteristiken auf allen Integralflächen entweder Haupttangentenkurven, oder Krümmungslinien, oder geodätische Linien, oder Gerade sind; ferner die, deren Integralflächen zu Normalen lauter Geraden eines gegebenen Linienkomplexes haben, sowie die, deren Integralflächen ∞^1 geodätische Linien enthalten, die einem vorgelegten Linienkomplex angehören. Mit Ausnahme des dritten werden diese Probleme vollständig gelöst.

Haben wir so versucht, dem Leser eine Vorstellung nicht nur von der Reichhaltigkeit des Werkes, sondern auch von den Gedankengängen selbst,

die es beherrschen, zu verschaffen — ein Versuch, der allerdings nur dann erspriesslich wirken kann, wenn er zu wirklichem Studium des auch stilistisch gut geschriebenen und mit schönen Zeichnungen illustrierten Buches anregt — so seien uns noch einige zusätzliche Schlussbemerkungen gestattet. Herr E. Study hat bereits in den Göttinger Anzeigen von 1897, S. 436—445 eine Reihe von Einwänden erhoben, die wir im ganzen für gerechtfertigt halten. Dahin gehört einmal, dass es Lie verschmäht, beim L. E. (und entsprechend beim F. E.) die beiden Richtungen, die positive und negative, zu trennen, was für manche Gattungen von Problemen nicht nur opportun, sondern geradezu notwendig erscheint. Ferner wird man Study beistimmen müssen, wenn er das geflissentliche Vermeiden der homogenen Koordinaten, oder allgemeiner gesprochen, den öfteren Mangel zweckmässiger Koordinatensysteme missbilligt.

Wir mögen in letzterer Hinsicht etwa die fundamentalen, auf gewöhnliche rechtwinklige Punktkoordinaten bezogenen Gleichungen 7) herausgreifen. Trotz ihres scheinbar einfachen Aussehens wird kaum jemand im stande sein, bei ihrem Anblick den reichen, in ihnen verborgenen Gedankeninhalt auch nur zu ahnen, dessen allmähliche Enthüllung denn auch wie eine Reihe von Überraschungen wirkt. Bei Anwendung von (überzähligen) Kugelkoordinaten würden nicht nur die Gleichungen selbst, sondern auch die Rechnung, die zu ihnen führt, wesentlich durchsichtiger werden. Andererseits können wir es sehr wohl verstehen, aus welchen Gründen Herr Lie auf derartige formale Verschönerungen seines Apparats kein Gewicht gelegt hat. Die ganze Richtung seiner Untersuchungen kann unseres Erachtens in zwei Stichworten charakterisiert werden. Einmal liegen die grossen Fortschritte, die er erzielt hat, in der geeigneten logischen Zusammenfassung scheinbar diskreter Begriffe zu höheren Einheiten, wie er z. B. der Begriff des Elementvereines in Ebene, Raum (und höheren Räumen) ist.

Herr Lie hat bei seiner Auswahl, um mit Schopenhauer zu reden, den beiden Hauptprinzipien der Homogenität und der Spezifikation gleichmässig Rechnung getragen, das heisst, in populärer Sprechweise, seine Begriffe sind weder zu eng, noch zu weit. Dadurch hat er es eben ermöglicht, viele Fälle, die früher als „Ausnahmefälle“ beiseite standen oder gar störend wirkten, einem grösseren Hauptfall anzugliedern.

Von nicht geringerer Wichtigkeit ist für die sehr umfassende Gattung seiner Probleme das analytisch-geometrische Prinzip der Abbildung, in dessen Ausübung er unerschöpflich ist. Die Kunst dieser Abbildung besteht geradezu darin, Erscheinungen, die auf einem ersten Gebiet schwer zu entwirren sind, durch Übertragung auf ein anderes Gebiet zu selbstverständlichen zu machen.

Man wird wohl aber nicht fehl gehen, wenn man annimmt, dass eine gesunde Weiterentwickelung der Gesamt-Mathematik gerade wesentlich an jene beiden Prinzipien gebunden sein wird, da sie ein Auseinanderfallen des Ganzen in eine unübersehbare Reihe von Teilen verhüten.

Als dritte Forderung wird allerdings die schon oben berührte hinzutreten müssen, dass jede Beziehung zwischen mathematischen Grössen auch eine ihm adäquate Form anzunehmen hat; man wird immer wieder darauf zurückkommen müssen, mit Plücker zu reden, in den Gleichungen (und zwar nicht bloss den geometrischen) unmittelbar zu lesen: zu dem Behuf sollen sie freilich „lesbar“ sein. Das bedingt dann wieder, dass die blosse Rechnung überall auf das denkbarste Minimum zu reduzieren ist.

Was bei einem derartigen Untersuchungsprogramm in jedem Einzelfall mit dem Beiwort „neu“ zu belegen ist, wird stets Sache der subjektiven Meinung bleiben. In diesem Sinne sind wir der Überzeugung, dass gerade der vorliegende Band — mögen auch manche Fachgenossen in ihm nichts wesentlich neues zu finden meinen — fruchtbar wirken wird.

W. Fr. Meyer.

Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Von H. Burkhardt. Leipzig 1897. Veit & Comp.

Das in der Überschrift genannte Werk zerfällt in sechs Abschnitte und stellt sich als Aufgabe, den Studenten gleichzeitig den Zugang zur Riemannschen und Weierstrassschen Funktionentheorie zu eröffnen, wobei jedoch die Riemannschen geometrischen Vorstellungsformen in den Vordergrund gestellt sind.

Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit der Theorie der komplexen Zahlen. Die Lehre von den gebrochenen und negativen Zahlen wird dabei zunächst als bekannt vorausgesetzt, die komplexen Zahlen werden sodann als Zahlenpaare eingeführt, ihre Rechnungsoperationen angegeben und geometrisch gedeutet.

Der zweite Abschnitt behandelt die rationalen Funktionen einer komplexen Veränderlichen und die durch sie vermittelten konformen Abbildungen. Es wird zunächst der Begriff der konstanten und der veränderlichen komplexen Grösse definiert und daran sofort derjenige der rationalen Funktion einer komplexen Veränderlichen angeknüpft. Nennen wir die letztere $f(z)$, so stellt:

$$z' = f(z)$$

eine Abbildung der z Ebene auf die z' Ebene dar, oder, wenn man die Grössen z und z' in derselben Ebene und unter Zugrundelegung desselben Axensystems deutet, eine Transformation der Ebene in sich. Die hierbei auftretenden Beziehungen werden bei einer Reihe von Transformationen untersucht, und zwar sind es im wesentlichen die Transformationen:

$$z' = \frac{az+b}{cz+d} \text{ (mit ihren verschiedenen Spezialfällen),}$$
$$z' = z^2,$$
$$z' = z^n.$$

Die lineare Transformation wird nicht nur in der Ebene, sondern auch auf der Kugel gedeutet.

Sodann folgen einige wenige allgemeine Sätze über ganze und gebrochene rationale Funktionen. Es ist weniger der Zweck dieses Abschnittes, die mannigfaltigen bei den behandelten Funktionen auftretenden Abbildungsaufgaben genauer zu studieren, als an der Hand derselben einige Fundamentalbegriffe der modernen Funktionentheorie in einfacher Weise einzuführen. Es sind dieses die Begriffe einer Gruppe von Transformationen, der Invariante einer Gruppe, der automorphen Funktionen, des Fundamentalbereiches einer Funktion u. s. f. Ich möchte diese überaus einfache und anschauliche Art der Einführung in die Funktionentheorie als eine äusserst glückliche bezeichnen. Ein jeder, der sich mit Funktionentheorie beschäftigt, mag er im übrigen der Weierstrassschen oder der Riemannschen Anschauungsweise folgen, wird aus ihr mannigfachen Gewinn erzielen.

Weniger einverstanden kann Referent sich mit dem dritten Abschnitt erklären. Derselbe enthält Definitionen und Sätze aus der Theorie der reellen Veränderlichen und ihrer Funktionen inklusive der Sätze über Differentialquotienten, bestimmte einfache und Doppelintegrale. Es ist nicht die Absicht des Verfassers, diese Sätze zu entwickeln, vielmehr begnügt er sich damit, sie anzuführen und verweist im übrigen auf die wichtigsten Werke über die Theorie der Funktionen einer Veränderlichen. Die Bedenken, die sich gegen eine solche Darstellung erheben lassen, sind die folgenden. Erstens erscheint es nicht logisch, diese Theorie erst im dritten Abschnitt aufzustellen, da in den früheren Abschnitten teilweise schon von ihnen Gebrauch gemacht ist. So z. B. werden an dieser Stelle erst die irrationalen Zahlen eingeführt, obgleich mit ihnen thatsächlich schon beständig operiert worden ist; ferner wird definiert, was unter einer reellen veränderlichen Grösse x zu verstehen ist, während doch schon im zweiten Abschnitt der kompliziertere Begriff der komplexen Veränderlichen eingeführt wird. Ebenso wird jetzt erst der Begriff der Stetigkeit erläutert, trotzdem schon zuvor mehrfach von dem stetigen Verhalten bestimmter Funktionen gesprochen worden ist. Wenn es daher überhaupt notwendig erscheint, die angegebenen Sätze zusammenzustellen, so dürfte es besser am Beginn des Werkes geschehen. Es kommt aber ein zweiter schwerwiegender Einwand hinzu. Der dritte Abschnitt umfasst nur wenige Seiten — das Verständnis desselben erfordert aber bei der von dem Herrn Verfasser mit Recht erstrebten und geforderten Strenge ein sehr eingehendes Studium der Theorie der reellen Funktionen. Die letztere kann aber als einfach nicht mehr bezeichnet werden, sodass der elementare Charakter des Burkhardtschen Buches geradezu illusorisch wird.

Um hier nur einen Punkt schärfer hervorzuheben: die Hauptschwierigkeit bei der Einführung in die Cauchy-Riemannsche Funktionentheorie besteht erfahrungsgemäss in einer klaren und strengen Begründung des Cauchyschen Integralsatzes. Wird nun, wie es in dem vorliegenden Buche geschieht, der Satz über die Reduktion eines gewissen Doppelintegrals auf ein Linienintegral einfach als bekannt vorausgesetzt, so ist

damit jene Schwierigkeit in Wahrheit nicht überwunden, sondern lediglich übergangen — der Student muss dann eben zusehen, wo er die nötige Belehrung findet.* Die gewöhnlichen Vorlesungen und Lehrbücher über Differential- und Integralrechnung werden hierbei nicht genügen. Aus diesem Grunde will es mir sehr bedenklich erscheinen, dergleichen Dinge in einem für Anfänger bestimmten Elementarbuche über Funktionentheorie ohne weiteres als bekannt vorauszusetzen.

Der vierte Abschnitt beschäftigt sich mit den eindeutigen analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Der Herr Verfasser knüpft von neuem an die Theorie der rationalen Funktionen an, aber jetzt nach anderer Richtung, wie im dritten Abschnitt. Er entwickelt den Begriff der Stetigkeit und den Begriff des Differentialquotienten einer rationalen Funktion komplexen Argumentes und zeigt dann vor allem, dass die hinreichenden und notwendigen Bedingungen dafür, dass ein Ausdruck von der Form $X_{+i}Y$, in welchem X und Y rationale Funktionen von x und y bedeuten, auf die Form einer rationalen Funktion von $z = x + iy$ gebracht werden kann, folgendermaßen lauten: X und Y müssen den partiellen Differentialgleichungen Genüge leisten:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x},$$

Diese Eigenschaft giebt dem Herrn Verfasser Anlass zu der bekannten Definition einer in einem Bereiche regulären eindeutigen Funktion des komplexen Arguments $x + iy$. Mit der so gewonnenen Definition beginnt die Einführung einer neuen allgemeineren Methode für den weiteren Aufbau der Funktionentheorie. Bisher war der Herr Verfasser von einfacheren zu schwierigeren Funktionen übergegangen, deren analytische Form von vornherein feststand. Von jetzt an knüpft er nicht mehr an irgendwelche analytische Ausdrucksformen an, sondern im Cauchy-Riemannschen Sinne an bestimmte Eigenschaften der regulären Funktionen. Hierbei geht er in der üblichen Weise vor. Er definiert zunächst das Integral einer regulären Funktion komplexen Argumentes und entwickelt im Anschluss daran den bekannten Cauchyschen Satz, mit dessen Hilfe der Wert, den eine reguläre Funktion des komplexen Argumentes z in irgend einem Punkte ζ eines Bereiches S besitzt, ausgedrückt wird durch die Werte derselben Funktion auf dem Rande dieses Bereiches. Dieser Cauchysche Satz dürfte wohl infolge seiner grossen Allgemeinheit und Fruchtbarkeit als der wichtigste

* Hierbei bleibt es dahingestellt, ob es bei der Einführung in die Funktionentheorie überhaupt zweckmässig erscheint, den Cauchyschen Lehrsatz mit Hilfe jenes Doppelintegralsatzes zu beweisen. Man vergleiche über diesen Punkt die Arbeiten von Pringsheim über den Cauchyschen Integralsatz in den Münchner Sitzungsberichten aus dem Jahre 1896.

des ganzen Buches bezeichnet wurden — er ist es, welcher der in demselben vertretenen Auffassung der Funktionentheorie das charakteristische Gepräge giebt. Gerade aus diesem Grunde erschien es mir zweckmässig, auf die unzulängliche Erörterung seiner eigentlichen Grundlagen innerhalb des Burkhardtschen Buches oben ganz ausdrücklich hinzuweisen.

Von diesem Cauchyschen Lehrsatz werden in dem vierten Abschnitt drei Anwendungen gemacht.

Erstens wird gezeigt, dass, wenn eine Funktion komplexen Argumentes in einem Kreise um den Nullpunkt regulär ist, sie sich für alle Punkte ζ im Innern desselben in eine gewöhnliche Potenzreihe von ζ entwickeln lässt.

Zweitens resultiert daraus der Laurentsche Satz betreffend die Entwickelung einer Funktion, die in einem von zwei konzentrischen Kreisen um den Nullpunkt begrenzten Ringe regulär ist.

Drittens wird der Satz bewiesen, dass die Summe einer in einem zusammenhängenden Bereiche gleichmässig konvergenten Reihe regulärer Funktionen selbst eine innerhalb dieses Bereiches reguläre Funktion vorstellt.

Der erste Satz führt naturgemäss zu der Weierstrassschen Funktionenlehre zurück, bei welcher die Potenzreihe das alleinige Fundament bildet. Die einfachsten Eigenschaften der Potenzreihen werden aufgestellt und die charakteristischen Eigenschaften der rationalen und der ganzen transcendenten Funktionen entwickelt. Von letzteren werden die Exponential, die Sinus- und die Cosinusfunktion gesondert betrachtet. Dabei zeigt es sich, dass der Begriff der regulären Funktion noch nicht vollständig genügt. Der Funktionsbegriff muss dahin erweitert werden, dass in dem näher zu untersuchenden Bereiche einzelne Ausnahmepunkte zugelassen werden, in welchen entweder überhaupt kein bestimmter Funktionswert vorhanden ist oder der betreffende Funktionswert in seiner Beziehung zu den Nachbarwerten nicht mehr alle Bedingungen erfüllt. Hierbei kommt der Herr Verfasser zu der Definition des Poles einer Funktion $f(z)$, führt ferner bei der ganzen transcendenten Funktion den Unendlichkeitspunkt als wesentlich singulären Punkt ein — wenn auch an dieser Stelle die letztere Bezeichnungsweise nicht gebraucht wird.

Die Laurentsche Reihe giebt Anlass zu der Entwickelung der Fourierschen Reihe, der dritte Satz endlich über die Summen unendlich vieler regulärer Funktionen führt zu dem bekannten Mittag-Lefflerschen Theorem über die Entwickelung einer Funktion mit unendlich vielen Polen in der Form einer unendlichen Partialbruchreihe. Dasselbe wird unter gewissen beschränkenden Annahmen bewiesen und als Beispiel die Funktion cotang z betrachtet.

Schliesslich ist zu bemerken, dass sich auch in diesem Abschnitt einige Untersuchungen über konforme Abbildungen vorfinden.

Der Inhalt dieses Abschnittes muss als ein reicher bezeichnet werden, die Darstellung ist, wie durchweg, eine elegante.

Der **fünfte** Abschnitt beschäftigt sich mit den mehrwertigen analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Der Herr Verfasser bemerkt in der Einleitung, dass die von ihm getroffene Anordnung des Stoffes vielleicht nur geteilter Zustimmung begegnen wird. Er betrachtet nämlich zuerst zwei unendlich vieldeutige Funktionen, den Arcus einer komplexen Grösse und den Logarithmus, deren Riemannsche Flächen konstruiert werden. Die hierbei gewonnenen Sätze werden zur Diskussion von $\sqrt{z}$, der Funktionen, die auf der Riemannschen Fläche von $\sqrt{z}$ eindeutig sind, der Funktion $\sqrt[n]{z}$ und einzelner anderer mehrdeutiger algebraischer Funktionen gebraucht. Die Diskussion der allgemeinen algebraischen Funktionen fehlt. Mit dem letzteren Punkte kann Referent sich durchaus einverstanden erklären, dagegen erscheint ihm der Aufbau einer Theorie der Funktion $\sqrt{z}$ und $\sqrt[n]{z}$ auf der Theorie des Arcus und des Logarithmus denn doch zu weit hergeholt. Zwar wird man gut thun, von der trigonometrischen Form der komplexen Zahlen Gebrauch zu machen, das könnte aber doch geschehen, ohne zuvor so tief in die Theorie des Arcus und des Logarithmus einzudringen, als der Herr Verfasser es thut.

Noch ein Punkt sei aus diesem Abschnitt herausgegriffen. Der Herr Verfasser definiert den allgemeinen Logarithmus einer komplexen Grösse durch das Integral:

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$$

— die Theorie des gewöhnlichen reellen Logarithmus setzt er aber hierbei als bekannt voraus. Referent würde es für methodisch richtiger halten, die Definition und die Eigenschaften des allgemeinen Logarithmus in der Weise festzustellen, dass die Definition und die Eigenschaften des reellen natürlichen Logarithmus der reellen positiven Zahlen sich als spezielle Fälle daraus ergeben.

Im **sechsten** Abschnitt, welcher als „Allgemeine Funktionentheorie" bezeichnet ist, wird der allgemeine Begriff der analytischen Funktion einer komplexen Veränderlichen entwickelt. Der Herr Verfasser denkt sich zunächst in einem beliebigen Bereiche S eine reguläre (d. h. Cauchy-Riemannsche) Funktion $f(x)$ als ursprünglich vorgelegtes „Funktionselement" irgendwie definiert und daraus mit Hilfe von Taylorschen Reihenentwickelungen, deren Konvergenzbezirke über S hinausreichen, neue „Funktionselemente" abgeleitet. Die Gesamtheit der durch solche „analytische Fortsetzung" erreichbaren Elemente konstituiert dann eine „analytische Funktion". Es findet also hier eine Vermischung der Cauchy-Riemannschen und der Weierstrassschen Definitionsform statt, auf die der Herr Verfasser augenscheinlich grosses Gewicht legt, die mir indessen nicht glücklich durchgeführt zu sein scheint. Vor allem bemerke man folgendes: während bei Weierstrass immer nur eine einzelne Potenzreihe mit bestimmten Koeffi-

zienten als Funktionselement bezeichnet wird, verliert dieser Begriff jede feste Bedeutung, wenn, wie es hier geschieht, die genannte für irgend einen Bereich S definierte Funktion $f(z)$ als Funktionselement eingeführt wird. Denn mit demselben Rechte müsste dann auch $f(z)$ mit einer Reihe von Fortsetzungen genommen als ein einziges Funktionselement gelten, oder man müsste etwa die Festsetzung treffen, dass ein neues Funktionselement beginnt, sobald die Variable z den ursprünglichen Definitionsbereich verlässt. In diesem Falle würde aber der Begriff des Funktionselementes von der zufälligen Wahl des Bereiches S abhängen, und es entsteht ferner die Unzuträglichkeit, dass eine und dieselbe Potenzreihe, welche innerhalb S mit $f(z)$ übereinstimmt und auch noch in einem gewissen ausserhalb liegenden Bereiche S' konvergiert, nunmehr zwei verschiedene Funktionselemente vorstellen würde. Dergleichen Unebenheiten hätten durch ein konsequenteres Festhalten der Weierstrassschen Definitionen und Entwickelungen vermieden werden können. Ohne zu tief hierauf einzugehen, möge folgendes bemerkt werden. Auch bei Herrn Burkhardt tritt die Potenzreihe, welche bei der Cauchy-Riemannschen Betrachtungsweise lediglich eine sekundäre Rolle spielt, als wichtiges, ja eigentlich alles beherrschendes Moment, ähnlich wie bei Weierstrass in den Vordergrund. Wenn das aber geschieht, so wäre ein tieferes Eingehen auf deren Eigenschaften erforderlich gewesen, als es thatsächlich geschieht. Insbesondere wird der fundamentale Satz über den wahren Konvergenzbezirk einer Potenzreihe, durch welchen das Auftreten singulärer Stellen und deren wahre Natur erst verständlich wird, schwer vermisst. Was sich hierüber in dem Burkhardtschen Buche findet, scheint doch gar zu unzulänglich. Das gleiche gilt von denjenigen Bemerkungen, welche sich auf analytische Funktionen analytischer Funktionen beziehen.

Alles in allem muss man sagen, dass von dem elementaren Charakter und der lichtvollen Klarheit der Weierstrassschen Methode leider viel zu wenig in den vorliegenden Abschnitt übergegangen ist. Wesentlich besser geraten sind die nachfolgenden funktionentheoretisch-geometrischen Betrachtungen (Spiegelung, konforme Abbildung), mit welchen das Buch schliesst: hier zeigt sich die knappe und elegante Darstellungsweise des Herrn Verfassers wieder von ihrer besten Seite.

M. Krause.

Abels theorem and the allied theory including the theory of the theta functions by H. F. Baker. Cambridge 1897. At the University Press.

Das in der Überschrift genannte Werk ist mit sehr grosser Sach- und Litteraturkenntnis geschrieben und enthält eine Übersicht über die wichtigsten Teile aus der Theorie der Abelschen Integrale und ihrer Umkehrfunktionen. Es zerfällt in zwei Teile, von denen der erste in acht Kapiteln die Theorie der Integrale, der zweite in zwölf Kapiteln die Theorie der Umkehrfunktionen enthält. Die Lektüre des Werkes wird einigermaßen

durch den Umstand erschwert, dass der Herr Verfasser das Forsythsche Lehrbuch über Funktionentheorie als bekannt voraussetzt.

Im ersten Teile werden, um wenigstens eine kurze Übersicht über den reichhaltigen Inhalt zu geben, die Abelschen Integrale der drei verschiedenen Arten definiert und mit einander verglichen. Bei der Betrachtung der rationalen Funktionen zweier veränderlicher Grössen, zwischen denen eine algebraische Gleichung besteht, ergiebt sich der Begriff des Geschlechtes, der Weierstrasssche Lückensatz und der Riemann-Rochsche Satz. Die Weiterführung der Theorie ergiebt eine Vereinfachung in der Form der Abelschen Integrale. Es werden dazu die Fundamentalsysteme der definierten Funktionen eingeführt, ihre Eigenschaften untersucht und Anwendungen auf die Darstellung der Integrale der verschiedenen Arten gemacht. Im fünften Kapitel werden einige besondere Fälle der Riemannschen Fläche, insbesondere der hyperelliptische in Betracht gezogen. Das sechste Kapitel bringt geometrische Anwendungen. Im siebenten Kapitel wird die Theorie von Funktionen entwickelt, welche alle rationalen Funktionen auf der Riemannschen Fläche darzustellen erlauben, daneben finden sich Betrachtungen über die Vertauschung von Argument und Parameter und Periodenrelationen. Das folgende Kapitel hat das Abelsche Theorem zum Gegenstand. Dasselbe wird auf mehrfachem Wege bewiesen und geometrisch gedeutet. Hiermit schliesst der erste grosse Teil des Werkes. Es folgt nunmehr im neunten Kapitel das allgemeine Umkehrproblem. Die Auflösbarkeit wird nachgewiesen und dazu die allgemeine Thetafunktion eingeführt, deren charakteristische Eigenschaften studiert werden, insbesondere werden auch die Nullstellen eingehend untersucht. Die bei der Umkehrung auftretenden Beziehungen werden in einigen Fällen noch eingehender diskutiert, so vor allem in dem hyperelliptischen Falle. Sodann wendet der Herr Verfasser sich zu einer sorgfältigen von den früheren Betrachtungen unabhängigen Theorie der allgemeinen Thetafunktionen. Es werden dazu die verschiedenen Arten von Additionstheoremen, darunter die von Frobenius und in neuester Zeit von Prym und Krazer gegebenen ausführlich entwickelt und zur Aufstellung von Thetarelationen verwandt. Das allgemeine Transformationsproblem wird aufgestellt und die allgemeinen Formeln abgeleitet, hierbei wird auch der Fall kurz berührt, dass die Transformationszahlen gebrochene Zahlen sind. Das spezielle Transformationsproblem, sowie die mannigfachen Differentialgleichungen und Entwickelungen der Thetafunktionen respektive Thetaquotienten werden nicht in Betracht gezogen. Eine Theorie der komplexen Multiplikation und einige Bemerkungen über die Reduktion höherer auf niedere Integrale schliesst das inhaltreiche Werk, dessen Lektüre einem jeden aufs wärmste empfohlen werden kann, der sich mit der allgemeinen Theorie der Abelschen Integrale und Funktionen beschäftigt.

M. Krause.

Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. Par Émile Picard, Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de Paris, et Georges Simart, Capitaine de Frégate, Répétiteur à l'École Polytechnique. Tome I. VI, 246 p. 8°. Paris 1897. Gauthier-Villars et fils.

Dieses Werk stellt den ersten Versuch dar, eine Theorie, welche bisher in dem Dunkel der Zeit- und Akademieschriften sich entwickelt hat, in systematischer Form zusammenzufassen und einem weiteren Leserkreise vorzuführen. Wie die Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen aus zwei Quellen, aus der Kurven- und aus der Funktionenlehre, entsprungen ist, so hat auch die vorliegende höhere Theorie doppelten Ursprung: einen geometrischen in deutschen Arbeiten von 1868—1874 über die rationale Transformation algebraischer Flächen, einen transcendenten in Arbeiten, um 1884, des einen der beiden Verfasser dieses Buches, E. Picard's, über die Existenzbedingungen totaler algebraischer Differentialausdrücke auf singulären Flächen. Beide Untersuchungsrichtungen sind inzwischen fortentwickelt worden; die erstere ist in neuerer Zeit durch einige talentvolle jüngere italienische Mathematiker in lebhaften Fluss geraten, die zweite hat Herr Picard selbst durch neue Resultate bereichert, besonders in einer vor kurzem gehaltenen Vorlesung, aus welcher auch das Werk hervorgegangen ist. Man könnte so fürchten, dass die geometrische Richtung in der Darstellung stark zurücktreten möchte. Indes sorgen die Verfasser in den beiden letzten der 8 Kapitel des ersten Bandes für eine selbständige Darlegung der Resultate jener früheren Arbeiten, der nächste Band soll auch über ihre Weiterführung berichten und wird hoffentlich auch zur Ausfüllung der grossen Lücke, welche bis jetzt die beiderseitigen Invarianzbetrachtungen von einander trennte, beitragen.

Der vorliegende Band bringt zunächst einige Kapitel sehr allgemeiner Natur über die Definition totaler m-facher Integrale im n-fach ausgedehntem Raume, über die Riemann-Bettischen Zusammenhangszahlen beliebig ausgedehnter Gebilde, über die Ausdehnung der Cauchyschen Residuentheorie auf Doppelintegrale und die zugehörigen Periodenverhältnisse — zum grösseren Teile nach Poincaré. Die in den Kapiteln IV—VI gebotenen Anwendungen auf algebraische Flächen, die Betrachtung der zugehörigen linearen cyklischen Wege und einfachen totalen Differentialausdrücke gehören ganz Herrn Picard an. Insbesondere ist es erfreulich, dass die Verfasser hier den Standpunkt der Auflösung der Singularitäten einer Fläche durch Transformation adoptieren und sogar eine neue, verhältnismässig einfache Methode vorschlagen, welche freilich, trotz richtiger Endresultate, noch weiterer Durcharbeitung (siehe S. 78) bedarf. Dass das Beispiel Seite 175 zu keinem Integral dritter Gattung geführt hat, liegt wesentlich daran, dass die dort betrachtete Fläche eine rationale ist. Auch die beiden letzten mehr geometrischen Kapitel über Flächen und ihre Doppelintegrale sind sehr übersichtlich (nur die Bemerkung über den Fall $y'' = 0$, Seite 182 und 188, nicht zutreffend).

Der zweite Band will auch durch Anwendungen die Bedeutung der vorgetragenen neuen Theorien ersichtlich machen. So begrüssen wir denn dieses Werk als Darstellung — wie die Verfasser es aussprechen — des gegenwärtigen Standes der Wissenschaft bezüglich eines Gebietes, dessen Studium die Anstrengung vieler Forscher verdient, und zwar, wie wir hinzufügen, als eine wohlgelungene Darstellung einer an sich sehr schwierigen Materie.

M. Noether.

Vorlesungen über Kreis- und Kugelfunktionenreihen. Von Dr. Johannes Frischauf, Professor an der Universität Graz. Leipzig 1897, B. G. Teubner. VI und 60 S.

In einem vier Druckbogen umfassenden Schriftchen behandelt Herr Frischauf die Grundlagen der für zahlreiche Anwendungen innerhalb der mathematischen Naturbetrachtung so wichtigen Fourierschen Reihen und Kugelfunktionen. Die Darstellungsweise des Verfassers ist allenthalben so fasslich und elementar gehalten, als es die Schwierigkeiten des Gegenstandes irgend zuliessen. Besondere Erwähnung verdient die Behandlung des Theorems von der Entwickelbarkeit einer auf der Kugeloberfläche willkürlich gegebenen eindeutigen Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ in eine nach Kugelfunktionen zweier Argumente fortschreitende Reihe. Hier ist es eine bekannte Schwierigkeit jeder Vorlesung über Potentialtheorie, dass die Konvergenz dieser Reihe (Konvergenz der Kugelfunktionenreihe des Potentials einer Kugelfläche an der Konvergenzgrenze) schwer beweisbar ist. Bekanntlich unterlag der ursprüngliche Dirichletsche Beweis der Kritik. Herr Frischauf giebt eine vereinfachte Fassung des korrekten Dinischen Beweisganges. Beispiele ausführlich zu behandeln, hat leider nicht in der Absicht des Verfassers gelegen. In dieser Hinsicht sind uns die englischen Lehrbücher vielfach überlegen (siehe z. B. Byerly, An elementary treatise on Fouriers series etc.). Aber auch so wird sich das vorliegende Buch unter den Studierenden zahlreiche Freunde erwerben.

R. Fricke.

Maurice d'Ocagne. **Cours de géométrie descriptive et de géométrie infinitésimale.** Paris, Gauthier-Villars.

Dem Anwachsen des Stoffes in den einzelnen mathematischen Disziplinen entsprechend haben viele neuere Lehrbücher einen Umfang angenommen, der sich kaum noch mit dem Gebrauch von seiten der Studierenden verträgt. Insbesondere gilt das für die darstellende Geometrie, und man kann daher nur zustimmen, wenn Lehrbücher erscheinen, welche sozusagen die gewöhnlichen Kenntnisse bei ihren Lesern voraussetzen, ohne deshalb ausgewählte Kapitel zu bringen, vielmehr auch Elementargebiete behandeln, aber dort neue Ausblicke gewähren. Ich habe hier namentlich Mannheims géométrie descriptive im Auge; aber auch das vorliegende Werk vertritt die gekennzeichnete Tendenz.

Es zerfällt in die beiden, nur sehr lose zusammenhängenden Teile, wie sie der Titel zum Ausdruck bringt. In erster Linie verfolgte wohl der Verfasser mit der Herausgabe des Lehrbuches die Absicht, seinen Hörern an der école des ponts et chaussées den Inhalt seiner dort gehaltenen Vorträge in exakter Form darzubieten.

Der erste Teil zerfällt in die Kapitel:

Kotierte Projektionen, Axonometrische Perspektive, Schattenkonstruktionen, Linearperspektive.

Das erste Kapitel erledigt den Gegenstand in der üblichen Weise, besonderes ist nicht hervorzuheben.

Die Behandlung der axonometrischen Perspektive weicht in ihrem Ausgangspunkte von der gewöhnlichen dadurch ab, dass anfangs ohne nähere Begründung nur die Vorschrift erteilt wird, die Koordinaten eines darzustellenden Raumpunktes nach drei in einer Bildebene beliebig wählbaren Richtungen von einem Punkte aus aufzutragen und dann durch äquipollente Strecken den Bildpunkt festzulegen. Erst am Schlusse des Kapitels wird durch einen analytischen Beweis des Pohlkeschen Satzes die Identität der Methode mit derjenigen der schiefen Projektion nachgewiesen.

Das Vorgetragene wird (Kapitel III) für die Schattenkonstruktion verwertet, indem der Schatten eines Körpers auf eine Ebene als dessen schiefe Projektion aufgefasst wird. Für eine bestimmte Wahl des Lichtstrahles — der üblichen, bei der Grund- und Aufriss-Winkel von 45° mit der Axe einschliessen —, ergeben sich dann Verhältniszahlen, mit deren Hilfe sich häufig auftretende Schattenformen leicht in der jeweiligen Projektion ohne Heranziehung der anderen konstruieren lassen. Als Beispiel sei das Verhältnis der Axen jener Ellipse, welche eine Kugel als Schatten auf die Projektionsebene wirft, ferner die Form des Schattens vom Rande einer Kugelschale im Innern derselben, angeführt.

Die Benutzung der zum Teil bekannten Formeln gestattet schnelles Arbeiten und sichert sehr genaue Resultate, stellt aber an das Gedächtnis des Zeichners erhebliche Anforderungen.

Bemerkenswert ist eine einfache Regel, nach der man entscheidet, ob eine Fläche ihre beleuchtete oder ihre dunkle Seite dem Beschauer zukehrt. Die Grundrisse der Erläuterungsfiguren unter II und III der Nr. 102 sind leider versehentlich unschraffiert geblieben, dem ganz richtigen Texte widersprechend.

Aus dem Kapitel der Linearperspektive sei nur eine hübsche Konstruktion des Bildes einer Kugel erwähnt, von dem in einfacher Weise ein Paar konjugierter Durchmesser angegeben wird.

Der zweite Teil, die Infinitesimalgeometrie, ist die eigentliche pièce de résistance des Werkes. Das Ziel ist die strenge Ableitung der verschiedenen Sätze und Konstruktionen, welche sich in Bezug auf Tangenten, Schmiegungsebenen, Krümmung etc. geometrisch definierter Gebilde ergeben, und zwar in rein geometrischer Form. Die Aufgaben decken sich vielfach

inhaltlich mit denen der Kinematik veränderlicher Systeme, nur dass bei der Lösung von dem Begriffe der Bewegung kein Gebrauch gemacht wird.

Die Grundlage des Ganzen bilden einige Fundamentalformeln, welche in anderer Weise abgeleitet bereits in dem oben erwähnten Mannheimschen Werke sich vorfinden und von denen die dritte (in Worten) als besonders charakteristisch hier mitgeteilt werden möge. Zieht man von einem Punkt A einer Kurve je eine Tangente an zwei andere Kurven, so ist das Bogendifferential, welches A durchläuft, gleich dem Winkeldifferential des Tangentenwinkels, multipliziert mit dem Unterschiede der reziproken Entfernungen der Schnittpunkte, welche die Kurvennormalen in den Berührungspunkten der Tangenten auf der Bahnnormalen in A verzeichnen, von dem Punkte A. Bleibt insbesondere der Tangentenwinkel konstant, so verschwindet sein Differential; des endlichen Bogendifferential wegen muss demnach der andere Faktor, nämlich die auftretende Differenz unendlich gross werden, d. h. die Normalen der Enveloppen der Schenkel eines bewegten starren Winkels schneiden sich in jedem Augenblick auf der Normalen der vom Scheitel beschriebenen Kurve, ein Resultat, dessen Richtigkeit durch Heranziehung des Drehpols unmittelbar in Evidenz tritt. Von Anwendungen sei eine besonders einfache Bestimmung des Krümmungs-Mittelpunkts der Fusspunktkurve einer gegebenen Kurve hervorgehoben. Merkwürdigerweise ist nur eine einzige kinematische Anwendung, nämlich die auf den Peaucellierschen Inversor gemacht. Um so lieber weisen wir auf die vom Verfasser auf Grund der mitgeteilten Formeln gegebene Bestimmung der Kurve hin, welche das Triebrad eines Zweirades beschreibt, dessen Leitrad (Vorderrad) eine bestimmte Bahn durchläuft.* Bei geradliniger Fahrt sind beide Kurven identisch und es ist interessant zu verfolgen, wie sich beim Übergang in die gekrümmte Bahn die Kurven von einander lösen, um sich später beim Aufhören der Kurve wieder zu vereinigen. An den Trennungspunkten haben beide Bahnen gemeinschaftliche Tangenten.

Die nun folgenden Anwendungen auf die Raumgeometrie beziehen sich auf Kurven und Flächen. Im wesentlichen ist die Methode rein geometrisch, doch werden analytische Hilfsmittel nicht vollständig vermieden. Von speziellen Kurven wird die Schraubenlinie, von speziellen Flächen werden die Hüllflächen einer Kugel, die windschiefen und abwickelbaren Flächen behandelt, die Minimalflächen kurz berührt.

Der Inhalt ist ein sehr reicher. Wenn es gestattet ist, einen Wunsch zu äussern, so wäre es der nach einer etwas weiter durchgeführten konstruktiven Lösung der aufgestellten Fragen; damit wäre auch eine innigere Verbindung der beiden Teile des Werkes hergestellt, welche jetzt eigentlich wenig mit einander zu thun haben.

C. Rodenberg.

* Im „Génie civil“ vom 27. Juni 1896.

Oeuvres de Laguerre publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences. Par MM. Ch. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché, membres de l'Institut. Tome I. Algèbre. Calcul intégral. Paris 1898. Gauthier-Villars et fils. 468 p. 15 fr.

In dem Bericht, welchen Ossian Bonnet erstattete, als sich Laguerre um einen Sitz in der Akademie bewarb, heisst es: Laguerre est un des géomètres les plus pénétrants de notre époque; ses découvertes en Géométrie lui assignent le premier rang parmi les successeurs de Chasles et de Poncelet, et ses recherches nombreuses et profondes sur l'Algèbre et le Calcul différentiel et intégral accusent un talent d'analyste de premier ordre.

Die wissenschaftliche Welt muss es der Pariser Akademie Dank wissen, dass sie die Herausgabe der gesammelten Arbeiten Laguerres beschlossen hat. Die Herren Hermite, Poincaré und Rouché haben sich dieser Aufgabe unterzogen und so Laguerres Schriften diejenige Einwirkung auf die Entwickelung der modernen Mathematik gesichert, welche ihnen gebührt.

Die Sammlung ist auf zwei Bände berechnet. Der erste beginnt mit einer Einleitung des Herrn Poincaré. Diese, sowie die von Herrn Rouché (Journal de l'Ecole Polytechnique LVI, 213—277, 1886) gegebene Biographie ist in der folgenden Darstellung zu Grunde gelegt.

Edmond Laguerre wurde am 9. April 1834 zu Bar-le-Duc geboren. Schon früh zeigte sich sein mathematisches Talent. Noch candidat à l'Ecole Polytechnique trat er im Jahre 1853 mit einer Arbeit hervor, durch die er eine Lücke in der modernen Geometrie ausfüllte: Er gab die Lösung zu dem Problem der homographischen Transformation der Winkelbeziehungen, eine Lösung, welche einem Poncelet und Chasles entgangen war. Terquem schrieb aus Anlass dieser Lösung in seinen „Annales“: Profond investigateur en Géométrie et en Analyse, le jeune Laguerre possède un esprit d'abstraction excessivement rare, et l'on ne saurait trop encourager les travaux de cet homme d'avenir. Über ein Jahrzehnt veröffentlichte Laguerre nichts. Er schien von seinen Pflichten als Artillerieoffizier gänzlich in Anspruch genommen. Erst um das Jahr 1865, wo er als répétiteur à l'Ecole Polytechnique nach Paris kam, fing er an, die Ergebnisse seiner Studien mitzuteilen.

Laguerre hat 140 Abhandlungen geschrieben, von denen mehr als die Hälfte auf die moderne Geometrie Bezug haben. Diese sollen den zweiten Band der gesammelten Werke füllen. Der erste Band, welcher vorliegt, enthält die Abhandlungen aus den Gebieten der Algebra und Integralrechnung.

An erster Stelle sind Laguerres Untersuchungen über die algebraischen Gleichungen abgedruckt.

Der Sturmsche Satz giebt die vollständige Lösung des Problems, die Anzahl der reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung zu bestimmen. Die angenäherte Berechnung der Wurzeln wird alsdann durch die Newton-

sche Methode geleistet. Diese Fragen schienen also durchaus erschöpfend beantwortet. Laguerre macht darauf aufmerksam, dass Sturms Verfahren mehr bewundert als angewendet wird, dass man im allgemeinen zur Bestimmung der Anzahl der reellen Wurzeln sowie zur Separation der Wurzeln numerischer Gleichungen Wege einschlägt, die dem speziellen Falle angepasst sind. Er giebt zunächst einen neuen Beweis für die Descartessche Zeichenregel, welcher noch einfacher ist als der bekannte. Die wahre Bedeutung desselben liegt aber darin, dass er sich nicht nur auf die ganzen Polynome bezieht, sondern sich auch auf die unendlichen Reihen ausdehnen lässt. Und in dieser Gestalt führt Descartes' Theorem zu eleganten Regeln, welche, einfacher als die Sturmsche, sich auf ausgedehnte Klassen von Gleichungen beziehen.

Die Newtonsche Methode besteht darin, die algebraische Gleichung durch eine Gleichung ersten Grades zu ersetzen, welche wenig von ihr abweicht. Laguerre ersetzt sie durch eine Gleichung zweiten Grades, die noch weniger von ihr abweicht, und erreicht dadurch eine schnellere Annäherung. Ausserdem versagt diese Methode, solange die Wurzeln reell sind, niemals. Von besonderem Vorteil erweist sich das neue Verfahren bei den Gleichungen, deren linke Seite ein Polynom darstellt, das der linearen Differentialgleichung

$$Py'' + Qy' + Ry = 0$$

genügt. Unter diesen Polynomen betrachtet Laguerre im besonderen die von Herrn Hermite untersuchten Polynome U_n, welche die Differentialgleichung

$$y'' - xy' + ny = 0$$

erfüllen, und die Legendreschen Polynome X_n, die der Differentialgleichung

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0$$

genügen.

Laguerre hat seine Methode auch auf die transcendenten Gleichungen ausgedehnt, d. h. auf den Fall, wo die linke Seite eine ganze transcendente Funktion ist. Es ist ihm unter Benutzung des Weierstrassschen Begriffs der Primfaktoren gelungen, die Einteilung der ganzen transcendenten Funktionen nach dem Geschlecht zu vertiefen. Personne, sagt Poincaré in der erwähnten Einleitung, ne s'est avancé aussi loin que lui dans cette théorie, l'une des plus difficiles de l'Analyse.

Die Untersuchung der Polynome, welche einer linearen Differentialgleichung genügen, veranlasste Laguerre zum Studium der algebraischen Kettenbrüche, welches uns, nach einem Poincaréschen Ausspruch, dereinst zu schneller konvergierenden Entwickelungen der Funktionen führen wird, als vermittelst der Potenzreihen möglich ist. Von Laguerres Resultaten mag das folgende hervorgehoben werden, wonach sich aus einer divergenten Reihe ein konvergenter Kettenbruch herleiten lässt. Es rechtfertigt dieses Ergebnis auf einem neuen Wege den Gebrauch divergenter Reihen, dem sich auf Grund der Poincaréschen Arbeiten noch eine Zukunft vorhersagen lässt.

Eine der längsten Abhandlungen Laguerres trägt den Titel „Sur les systèmes linéaires" und ist im Jahre 1867 im Journal de l'Ecole Polytechnique veröffentlicht worden. Laguerre entwickelt hier die Theorie der linearen Substitutionen und findet, dass sie eine einfache und gewissermassen arithmetische Deutung für die gewöhnlichen imaginären Grössen, für die Quaternionen, für die clefs algébriques von Cauchy liefert. Diese Prinzipien werden auf die Theorie der quadratischen Formen und auf die Theorie der Abelschen Funktionen angewendet. Laguerre findet hier die Resultate von Herrn Hermite wieder und vervollständigt sie in verschiedenen Punkten.

Als Laguerres bedeutendste Entdeckung in der Theorie der Differentialgleichungen preist Ossian Bonnet in seinem oben erwähnten Bericht die Einführung des Invariantenbegriffs in die genannte Theorie, welcher es ermöglichte, die Differentialgleichungen durch passende Umformungen auf den höchsten Grad der Einfachheit zu bringen. Die Fruchtbarkeit dieses Gedankens ist durch Halphen dargethan worden, welcher unter diesem neuen Gesichtspunkte seine Theorie der Differentialinvarianten entwickelt hat.

Ich habe noch zweier Arbeiten Laguerres Erwähnung zu thun, welche auf dem Gebiete der Potentialtheorie liegen. In der ersten Arbeit „Sur l'attraction qu'exerce un ellipsoïde homogène sur un point extérieur" C. R. LXXXVI, 1878 gelingt Laguerre die Zurückführung des Potentialausdrucks auf ein einfaches Integral durch Zerschneiden des Ellipsoids in unendlich dünne Scheiben. Diese liegen zwischen zwei unendlich nahen Ebenen, welche der Ebene

$$ix\cos\varphi + iy\sin\varphi + z = 0, \quad i = \sqrt{-1},$$

parallel laufen, wenn (x, y, z) den äusseren Punkt bezeichnet. Hierbei ergiebt sich zunächst die Darstellung der Potentialfunktion mit Hilfe eines Doppelintegrals, welche in der zweiten Arbeit „Sur le potentiel de deux ellipsoides" C. R. CII, 1886, der letzten Arbeit Laguerres, benutzt wird, um das Potential zweier Ellipsoide durch ein dreifaches Integral auszudrücken.

Den Beschluss des ersten Bandes bildet eine Arbeit von Herrn Hermite unter dem Titel „Sur un Mémoire de Laguerre concernant les équations algébriques". Herr Hermite leitet hier die Resultate, zu denen Laguerre in seiner Arbeit „Sur une méthode pour obtenir, par approximation, les racines d'une équation algébrique qui a toutes les racines réelles" Nouv. Ann. de Math. (2) XIX, 1880 gelangt ist, auf einem anderen und einfacheren Wege her.

Laguerre ist am 14. August 1886 in seiner Vaterstadt gestorben. Drei Jahre vor seinem Tode öffneten sich ihm die Pforten des Instituts. Gleichzeitig wurde ihm der Lehrstuhl für mathematische Physik an dem Collège de France übertragen. Wie hoch Laguerre auch als Mensch geschätzt und verehrt wurde, geht aus dem Nachruf hervor, welchen ihm Herr Bertrand im Namen der Akademie gewidmet hat und in welchem

es heisst: „Edmond Laguerre, passionné pour la Science, semblait indifférent au succès. Jamais il n'a négligé un devoir; jamais il n'a sollicité une faveur ... Toujours oublieux de se faire valoir, il a pris sa retraite, jeune encore, sans avoir atteint dans l'artillerie les hauts grades où son mérite semblait l'appeler .... Ses découvertes l'avaient placé au premier rang des géomètres français avant que l'Académie des Sciences en eût entendu discuter et proclamer l'importance."

E. Jahnke.

E. Villié. **Compositions d'analyse, cinématique, mécanique et astronomie données depuis 1889 à la Sorbonne pour la licence ès sciences mathématiques.** Enoncés et solutions. Troisième partie. Gauthier-Villars. Paris 1898. 299 S.

Der vorliegende Band giebt ebenso wie die beiden vorhergehenden eine Sammlung von Aufgaben, die an einer Reihe von Universitäten Frankreichs in den Jahren 1889—1897 für die licence ès sciences mathématiques gestellt worden sind. Bei diesem Examen, welches etwa dem Oberlehrerexamen in Preussen entsprechen würde, werden nur Klausurarbeiten angefertigt. Es unterscheidet sich daher diese Sammlung naturgemäss von den bei uns bekannten Aufgabensammlungen. Es sind durchweg schwierigere Probleme, deren Lösung eine gewisse analytische Geschicklichkeit und Bekanntschaft mit den fundamentalen Gesetzen der Kinematik und Dynamik voraussetzt. Einige Beispiele werden den Charakter des Buches und die Höhe der gestellten Anforderungen am besten erläutern.

An der Ecole Normale wurde im Jahre 1890 als erste Frage die folgende vorgelegt: Es ist zu beweisen, dass der Differentialgleichung

$$(x^2 - 1)\, y'' = n\,(n + 1)\, y,$$

wo n eine ganze positive Zahl bezeichnet, durch ein Polynom $P(x)$ genügt wird. Weiter ist zu zeigen, dass eine zweite Lösung der Gleichung die Form

$$P \log \frac{x+1}{x-1} + Q$$

hat, wo Q auch ein Polynom darstellt.

Im Jahre 1896 lautete die einzige, an der Ecole Normale gestellte Aufgabe so: Es ist die partielle Differentialgleichung der Flächen zu integriren, deren Normalen Tangenten einer gegebenen Kugel sind. Ferner ist zu beweisen, dass das eine System von Krümmungslinien erzeugt wird, wenn sich grösste Kreise auf der Kugel abwickeln, und dass das andere System sphärisch ist.

Der Mechanik gehören die folgenden Fragen an: Es ist die Bewegung einer ebenen, homogenen, unendlich dünnen kreisförmigen Scheibe zu untersuchen, wenn zwei Punkte des Umfanges gezwungen sind, zwei in einem Punkte O zusammenlaufende lotrechte Geraden zu beschreiben.

Ein schwerer homogener Rotationscylinder von der Masse m ruht auf einer horizontalen Ebene, wo er ohne Reibung gleiten kann. Längs der

Achse desselben wird ein Kanal von unendlich dünnem Querschnitt gebohrt, in welchem sich ein schwerer Punkt von derselben Masse m befindet, der ohne Reibung den Kanal entlang gleiten kann. Es ist die Bewegung des Systems zu untersuchen, wenn man voraussetzt, dass der Cylinder auf die Ebene geworfen wird.

Der Wert der Sammlung wird noch dadurch erhöht, dass den Aufgaben die Lösungen beigegeben sind.

Das Werk kann den Studierenden unserer Hochschulen nur warm empfohlen werden; es giebt ihnen Gelegenheit, in den verschiedenen Gebieten der Analysis, in der Kinematik und Mechanik ihre Kräfte zu erproben und ihr Können zu erweitern.

E. Jahnke.

W. Binder. **Theorie der unicursalen Plankurven vierter bis dritter Ordnung in synthetischer Behandlung.** Leipzig 1896, B. G. Teubner. 396 S.

Die Theorie der ebenen Unicursalkurven dritter und vierter Ordnung dürfte heute im grossen und ganzen als abgeschlossen gelten. Es kann daher nur dankbar anerkannt werden, dass sich der Verfasser entschlossen hat, die Aufsätze und Abhandlungen, welche zu einem Teil im Laufe der letzten drei Dezennien von verschiedenen Mathematikern, zum andern Teil von ihm selbst speziell in der Zeitschrift für Mathematik und Physik veröffentlicht worden sind, zu dem vorliegenden, Herrn Schlömilch zugeeigneten Werke zu vereinigen.

Als Motto hat der Verfasser dem Buche die Worte vorgesetzt: Vom Allgemeinen auf das Einzelne. Es sind nämlich die Kurven vierter Ordnung vorausgeschickt worden, da die Kurven dritter Ordnung vielfach Modifikationen der allgemeineren Eigenschaften solcher von der vierten Ordnung enthalten.

Der Verfasser beginnt mit einem allgemeinen Teil, in welchem neben der Aufzählung der wichtigsten Eigenschaften höherer Plankurven eine kurze Ableitung der Büschel resp. Netze und Scharen von Kegelschnitten Platz findet. Daselbst werden noch die allgemeinen Beziehungen mehrdeutiger Grundgebilde, sowie die Gesetze der quadratischen Transformationen erörtert.

Hieran schliessen sich im zweiten und dritten Teil elementare Untersuchungen bezüglich der Unicursal-Plankurven vierter und dritter Ordnung.

Während man beim Studium der Inflexionselemente einer Plankurve mit Hilfe des Kalküls von der Hesseschen Kurve ausgeht, benutzt der Verfasser für die synthetische Untersuchung der Inflexionselemente eine Direktionskurve, welche ausser den Inflexionen noch die Berührelemente der Doppeltangenten einer Kurve vierter Ordnung in einen projektivischen Zusammenhang bringt. Bei gewissen Degenerirten einer Kurve vierter Ordnung führt die Methode des Verfassers zu einer bisher nicht bekannten linearen Konstruktion ihrer Inflexionselemente.

Eingehend sind die circularen Kurven behandelt, auf deren sogenannte Kreisverwandtschaft wiederholt hingewiesen wird. Insbesondere ist dieses bei den Kreisverwandten dritter Ordnung geschehen, wo auch die vom Verfasser bezeichneten Scheiteleigenschaften, sowie die Eigentümlichkeit eines Centrums, welches solche Kurven besitzen, ausführlich erörtert werden. Die Gesetze der Symmetrie der betreffenden Kurven werden vom Standpunkte ihrer projektivischen Entstehung untersucht, auf welche Art die Kurvenspezies der Cykloiden, Lemniskaten, Kardioiden und Cissoiden verallgemeinert erscheinen.

Weiter ist der Fall der Identität mit den bekannten Rollkurven, sowie der Fall einer Kurve mit dreifachem Singularpunkt als einer verlängerten Hypocykloide nachgewiesen; und endlich zeigt der Verfasser, dass unter Umständen eine Kardioide identisch einer Epi- oder einer Pericykloide gleich werden kann.

Auch die Theorie der für die Mechanik so wichtigen Fusspunktkurven erfährt eine einfache Begründung im Sinne der projektivischen Geometrie.

Dem vorliegenden Werke sind 65 Figuren im Texte und auf zwei Tafeln beigegeben. Sie umfassen die erklärten Beziehungen und Konstruktionen zum grössten Teil.

E. Jahnke.

H. Hartl, **Lehrbuch der Planimetrie.** Leipzig und Wien 1896, F. Deuticke. 135 S.

An der vorliegenden Bearbeitung des planimetrischen Pensums ist besonders hervorzuheben, dass der Symmetriebegriff zur Herleitung einfachster Sätze herangezogen wird. Den einzelnen Abschnitten, auch schon den allerersten, sind eine Reihe von Aufgaben angehängt, die geeignet erscheinen, das Interesse des Schülers von vornherein zu fesseln. Die Übungsbeispiele sind zum grossen Teile der praktischen Geometrie entlehnt und mit Geschick ausgewählt.

Bezüglich der Abgrenzung des Pensums ist zu bemerken, dass von den Dreieckskreisen die Ankreise keine Erwähnung finden, dass aber zwei kurze Kapitel von der Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis und von den Ähnlichkeitspunkten zweier Kreise handeln. Ein Anhang enthält Aufgaben über Maxima und Minima und die algebraische Bestimmung eines Dreiecks.

Die Ausdrucksweise lässt an einigen Stellen Korrektheit und Knappheit vermissen. So heisst es auf S. 67: Der Flächeninhalt eines Kreises wird als ein Vielfaches des über dem Halbmesser zu verzeichnenden Quadrates bestimmt. Ausdrücke wie Inkreis und Umkreis, welche schon in verschiedene Lehrbücher übergegangen sind, hat der Verfasser nicht übernommen. Ferner fiel dem Referenten auf, dass der Verfasser griechische Buchstaben wie α, β zur Bezeichnung von Strecken verwendet.

Von diesen leicht zu beseitigenden Mängeln abgesehen, erscheint dem Referenten das Lehrbuch der Beachtung seitens der Fachgenossen wert.

E. Jahnke.

Annuaire pour l'an 1898, publié par le bureau des longitudes. Avec des notes scientifiques. Gauthier-Villers. Paris. 1 fr. 50 c.

Der kleine Band enthält, wie in jedem Jahre, eine Fülle wissenschaftlicher Daten, welche man in dieser Vollständigkeit wohl nirgends sonst findet. Er beginnt mit astronomischen Tabellen, mit solchen für die Maße und Gewichte und für die Geldsorten; hieran schliessen sich Zinstabellen, geographische, statistische Tabellen, Sterblichkeitstabellen u. a. m. Weiter werden die magnetischen Karten Frankreichs gegeben, Tabellen für die Dichtigkeiten und Elastizitätsverhältnisse der festen Körper, Tabellen für die Wärme, Akustik, Optik und Elektrizität, und endlich auch Tabellen mit den chemischen Konstanten, wobei überall die neuesten Untersuchungen berücksichtigt worden sind. Jeder Tabelle geht eine kurzgefasste Erklärung voran, welche auch dem Laien die Bedeutung der Zahlen verständlich machen und ihm deren Gebrauch ermöglichen soll.

Der Wert des Jahrbuches wird noch erhöht durch die angehängten populär-wissenschaftlichen Aufsätze aus der Feder von berühmten französischen Gelehrten: Sur la stabilité du système solaire, par M. H. Poincaré. — Notice sur l'oeuvre scientifique de M. H. Fizeau, par M. A. Cornu. — Sur quelques progrès récemment accomplis à l'aide de la Photographie dans l'étude de la surface lunaire, par MM. Loewy et Puiseux. — Sur les travaux exécutés en 1897 à l'observatoire du mont Blanc, par M. J. Janssen. — Discours prononcés au cinquantenaire académique de M. Faye, le 25 janvier 1897, par MM. J. Janssen et M. Loewy.

E. Jahnke.

La mathématique. Philosophie. Enseignement. Par C. A. Laisant, Répétiteur à l'École Polytechnique, Docteur ès sciences. Paris 1898. Georges Carré et C. Naud. 292 p.

Das Buch, von dessen Erscheinen wir unsere Leser in Kenntnis zu setzen wünschen, ist ein wesentlich französisches. Wir verstehen darunter, dass ein Franzose es für Franzosen geschrieben hat, und dass ein gründliches Wissen von dem gegenwärtigen Stande des mathematischen Unterrichtes in Frankreich erforderlich wäre, um ein Urteil zu fällen. Wir sind weit entfernt von einem solchen Wissen, und wir dürfen uns deshalb weder Lob noch Tadel gestatten, das entworfene Bild weder ähnlich noch unähnlich nennen. Die Malerei selbst hat freilich mit der Treue oder Untreue der Abbildung kaum zu thun, und in dieser Beziehung dürfen wir Herrn Laisant einen flotten und kecken Pinselstrich nachrühmen, ein mutiges um nicht zu sagen mutwilliges Spielen mit scharf sich abhebenden Farben, ein Schwelgen in starken Gegensätzen, wie es auch wieder vorzugsweise die französische Schule liebt. Kann und wird der französische Leser in Herrn Laisants Kennzeichnung der einzelnen Abteilungen der Mathematik und der Art, wie er sie gelehrt wünscht, mehr neues finden, als dieses bei einem deutschen Leser der Fall sein möchte? Das ist abermals eine Frage, die zu beantworten wir uns ausser stande fühlen. Herr

Laisant selbst legt auf ihre Bejahung kein besonderes Gewicht. Sagt er doch (S. 11): ein kleines Werk von der Art des seinigen, niedergeschrieben auf der Grundlage eigenen Nachdenkens und einiger Reminiszenzen, sei eher eine anspruchslose Causerie — wir wissen kein den Sinn genau wiedergebendes deutsches Wort — als ein ernstes Buch zu nennen. Seiner Bezeichnung uns anschliessend können wir nur von einer geistreichen Causerie reden, der man gern eine Stunde widmen wird.

CANTOR.

An elementary course of infinitesimal calculus by HORACE LAMB, M. A., F. R. S., Professor of mathematics in the Owens College, Victoria University, Manchester; formerly fellow of Trinity College, Cambridge. Cambridge 1897 at the University Press. XX, 616 p.

Wir haben schon häufig Gelegenheit gehabt, über das Erscheinen von Differential- und Integralrechnungen in deutscher, in französischer, in italienischer, in portugiesischer Sprache zu berichten. Heute zeigen wir zum ersten Male ein ähnliches englisches Werk an. Wir gestehen zugleich ein, dass es das erste englische Lehrbuch der Infinitesimalrechnung aus neuerer Zeit ist, mit welchem wir genauer bekannt geworden sind, und dass wir deshalb in der Lage sind, um Entschuldigung bitten zu müssen, falls wir Herrn Lamb persönlich zuschreiben sollten, was überhaupt englische Eigentümlichkeit sein könnte. Keinenfalls wird Herr Lamb sich darüber beschweren wollen, denn unsere Bemerkungen sind lediglich lobender Natur. Er hat ein Buch verfasst, welches uns dazu bestimmt zu sein scheint, viele Auflagen zu erleben, und wenn es auch in erster Linie für die Zöglinge einer technischen Schule bestimmt ist, so werden doch auch angehende Mathematiker von Fach sich desselben mit Vorteil bedienen, denn nur in der Auswahl der Beispiele giebt die erwähnte Tendenz sich kund, nicht in der Herleitung der einzelnen Sätze. Herr Lamb beginnt mit ausführlichen Grenzbetrachtungen, eine uns um so sympathischere Einleitung, als wir seit Jahren gewohnt sind, unsere Wintervorlesung über Differential- und Integralrechnung mit einer ebensolchen zu eröffnen. Herr Lamb lässt das Integrieren dem Differentieren so nahe als thunlich folgen; wir haben wiederholt auf die Zweckmässigkeit dieser Anordnung hingewiesen. Herr Lamb verschiebt dagegen die Untersuchungen über die Taylorsche Reihe bis an das Ende des Werkes, wo sie dem letzten Kapitel als Überschrift dienen. Das ist eine Neuerung einschneidendster Art. Die Absicht ist die, jenen wichtigen Gegenstand erst dann zur Erörterung zu bringen, wenn der Schüler sich die dazu erforderliche Reife des mathematischen Denkens schon angeeignet hat, und es ist nicht zu leugnen, dass Herrn Lambs 14. Kapitel *Taylors Theorem* ganz anders aussieht, als ein Kapitel über Reihenentwickelung im ersten Drittel einer Differentialrechnung. Gleichwohl möchten wir aus praktischen Gründen in einer Vorlesung dem neuen Beispiele nicht folgen. Erfahrungsmässig lässt jeder Dozent am Anfange der Vorlesungen sich mehr

oder weniger gehen. Er lässt sich von Zahl und Geistesrichtung seiner Zuhörer beeinflussen, dieses oder jenes Beispiel ausführlicher zu behandeln u. s. w., mit einem Worte: er individualisiert seine Vorlesung, und das kostet Zeit. Gegen Ende des Semesters muss dann rascher vorgegangen werden, und das eine Mal kommen Dinge in Wegfall, welche ein anderes Mal vorgetragen wurden und umgekehrt. Am leichtesten kann, scheint uns, ab- und zugegeben werden, wenn die Differentialgleichungen und ihre Integration den Schluss bilden. Bei dem Vortrage der Taylorschen Reihe kürzen zu sollen, scheint uns sehr bedenklich. Die von Herrn Lamb nun einmal getroffene Anordnung nötigt ihn zu einer wesentlich anderen Behandlung der früheren Kapitel, als sie in Übung zu sein pflegt. Die Auswertung unbestimmter Formen ist ganz weggelassen, die Lehre von den grössten und kleinsten Werten aber von einer Grundlage aus in Angriff genommen, welche man den auf seine Anfangsglieder beschränkten Taylorschen Satz nennen könnte. Aus der Thatsache, dass bei einer stetig verlaufenden Kurve jede Sehne einer Berührungslinie parallel verläuft, deren Berührungspunkt zwischen den Endpunkten der Sehne liegt, folgt, dass

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h).$$

Demnächst werden die Durchschnittspunkte der Kurve $y = f(x)$ mit der parabolischen Kurve $y = A + Bx + Cx^2$ ins Auge gefasst und A, B, C so bestimmt, dass beide Kurven einander bei $x = a$ berühren, bei $x = a + h$ schneiden. Aus dieser Bedingung ergiebt sich unter Anwendung des Rolleschen Lehrsatzes, dass

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{1}{2}h^2 f''(a+\theta h).$$

Wir könnten auch auf die Auflösung einiger Maximalaufgaben ohne Anwendung von Differentialrechnung hinweisen, welche uns wenigstens in Büchern über Infinitesimalrechnung nie begegnet ist. Zahlreiche andere Einzelheiten werden dem Leser Vergnügen bereiten. Wir heben nur ein Letztes noch hervor, dass nämlich bei der Integration von Differentialgleichungen der Gedanke des integrierenden Faktors weit mehr in den Vordergrund gerückt ist, als dieses sonst zu geschehen pflegt; dadurch gewinnt, wie uns scheinen will, die Darstellung an einheitlicher Färbung. Wir können auch wegen dieses Kapitels das Buch nur aufs wärmste empfehlen.

Cantor.

Higher Arithmetic by Wooster Woodruff Beman, Professor of mathematics in the university of Michigan, and David Eugene Smith, Professor of mathematics in the Michigan state normal college. Boston and London 1897. Ginn & Co. The Athenaeum Press. XVII, 193 p.

Wenn der elementare Inhalt des kleinen Lehrbuchs der Rechenkunst mit Einschluss des sogenannten kaufmännischen Rechnens ein Verweilen bei Einzelheiten verwehrt, so können wir doch nicht umhin auch unsere deut-

schen Fachgenossen auf dieses Erzeugnis amerikanischer Mathematiker aufmerksam zu machen. Die Auswahl der Beispiele, die gegebenen Hinweise auf praktische Rechenvorteile, die ganze Darstellung ist so, dass Referent sich dadurch nur mehr als je in der Überzeugung bestärkt fühlte, ein fruchtbarer Rechenunterricht könne nicht anders als durch einen wirklichen Mathematiker erteilt werden.

Cantor.

Récréations et problèmes mathématiques des temps anciens et modernes par W. W. Ronse Ball, fellow and tutor of Trinity College, Cambridge. 3ième édition revue et augmentée par l'auteur traduite par J. Fitz-Patrick. Paris 1898. Librairie scientifique A. Hermann. IV, 352 p.

Im Februar 1892 verliess die erste, im Juli 1896 die dritte Ausgabe des englischen Originals die Druckerpresse, die französische Übersetzung trägt das Datum des 15. November 1897. Das sind Zahlen, welche laut und deutlich einen seltenen buchhändlerischen Erfolg verkünden, den wir nicht anstehen auch von unserer Seite als wohlberechtigt anzuerkennen. Man weiss, wie seit dem Anfange des 17. Jahrhunderts mathematische Aufgabensammlungen erschienen, welche von einer zu Beginn nicht unbedeutenden wissenschaftlichen Höhe allmählich herniederstiegen. Als Schulbücher waren die späteren Sammlungen gewiss verdienstvoll, aber einem wirklichen Mathematiker beim Lesen Vergnügen zu bereiten, reichten sie nicht aus. Edouard Lucas war es, welcher 1882 mit seinem ersten Bande der *Recréations mathématiques*, dem bis 1894 drei weitere Bände nachfolgten, in die alten Bahnen zurücklenkte. Herr Ball stand unzweifelhaft unter Lucas' Einflusse, als er seine eigene Schrift vorbereitete, das zeigt sich schon aus den zahlreichen Erwähnungen jenes Schriftstellers, aber gleichwohl ist Herr Ball durchaus kein blosser Nachahmer, und auch dafür könnten wir ein äusseres Zeugnis anrufen, die Übersetzung ins Französische, welche eine Unmöglichkeit gewesen wäre, wenn das englische Original wenig mehr als eine Umarbeitung eines französischen Buches geboten hätte. Die Litteraturnachweise sind ungemein zahlreich und wertvoll. Inwieweit sie vollständig sind, lässt sich bei dem Mangel an einem alphabetisch geordneten Inhaltsverzeichnisse schwer überwachen. Wiederholt wollte uns indessen scheinen, als sei Michael Stifel nicht so sehr berücksichtigt, als es nötig gewesen wäre. Die französische Übersetzung ist sehr geschickt gemacht und durch wichtige Ergänzungen und Anmerkungen des Bearbeiters bereichert.

Cantor.

Mathematische Mussestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken u. Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Von Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Leipzig 1898. G. J. Göschensche Verlagshandlung. V, 286 S.

Nach Edouard Lucas, nach Herrn Ball, in teilweiser Anlehnung an beide, aber weit mehr noch in selbständig sie ergänzender Arbeit ist

nun auch ein deutscher Schriftsteller, Herr Schubert, mit einer Sammlung von mathematischen Scherzrätseln aller Art hervorgetreten. Er war vorzugsweise dazu geeignet einesteils durch eine gewisse zahlentheoretisch-kombinatorische Begabung, welche jeder Mathematiker an Herrn Schubert kennt, andernteils durch schon veröffentlichte mathematische Untersuchungen über gewisse Spielereien. Die kleine Sammlung ist der Hauptsache nach für Laien bestimmt, aber auch der Mathematiker wird sie mit Vergnügen durchlesen und sich angeregt fühlen, tiefere wissenschaftliche Betrachtungen insbesondere Herrn Schuberts Originalarbeiten kennen zu lernen.

CANTOR.

Tafeln für das Goldbachsche Gesetz von Dr. Robert Haussner, Privatdozent der Mathematik an der Universität Würzburg. [Aus den Abhandlungen der kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher Bd. 72.] Halle 1897. 214 S.

Das sogenannte Goldbachsche Gesetz besteht bekanntlich darin, dass jede gerade Zahl als Summe zweier ungerader Primzahlen entsteht. Euler hat schon durch Versuche das ihm mitgeteilte Gesetz bestätigt. Ausgedehntere Versuchsreihen hat Herr Georg Cantor 1894 veröffentlicht, und Herr Haussner hat nunmehr in umfangreiche Tabellen zusammengestellt, was er selbst an empirischem Materiale für die Prüfung des Gesetzes in mühevoller Arbeit gesammelt hat. Eine ausführliche Einleitung beschreibt die sehr sinnreiche Art, in welcher Herr Haussner seine Versuche angestellt hat, und berichtet auch über die Versuche und theoretischen Erörterungen, welche Herr Paul Stäckel zum Gegenstande einer Mitteilung in den Göttinger Nachrichten gemacht hat. Allen neueren Bearbeitern des Gegenstandes war neben der Bewahrheitung des Goldbachschen Satzes an sich die Auffindung der möglichen Anzahlen von Zerlegungen angelegen, wie z.B. $30 = 1 + 29 = 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17$ auf vier verschiedene Arten die Summe zweier ungerader Primzahlen ist. Eine unmittelbare Abhängigkeit der Zerlegungsanzahlen von der zu zerlegenden Zahl zu entdecken, ist noch nicht gelungen, wenngleich mancherlei Erfahrungsthatsachen auch nach dieser Richtung hin gesammelt und teilweise begründet werden konnten.

CANTOR.

Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie zum Gebrauche beim Selbstunterricht und in Schulen, besonders als Vorbereitung auf Geodäsie und sphärische Astronomie bearbeitet, von Dr. E. Hammer, Professor an der königl. Technischen Hochschule Stuttgart. Zweite, umgearbeitete Auflage. Stuttgart 1897. J. B. Metzler. XIV, 572 S.

Die erste Auflage von 1885 haben wir im 30. Bande dieser Zeitschrift Histor.-litter. Abtlg. S. 110—111 unseren Lesern warm empfohlen, und wir können heute, nachdem das Werk um volle $^5/_6$ an Umfang zugenommen hat, also fast ein neues Werk geworden ist, unser früheres Lob nur bestätigen. Dem Wunsche des Verfassers, das Buch möge in Schülerkreisen

sich einbürgern, wird naturgemäss mehr noch als 1885 dessen Umfang im Wege stehen. Schüler kaufen keine Trigonometrie von fast 36 Druckbogen, und wenn ein Einzelner sie kaufen sollte, wo fände er Zeit sie durchzulesen oder gar durchzurechnen? Aber der in zweiter Linie ausgesprochene Wunsch, Lehrer möchten mehr und mehr sich des Buches bedienen, ist zu erfüllen und verdient Erfüllung. Der Lehrer wird das Hammersche Werk als eine stets ergiebige Fundgrube betrachten dürfen, an welche er nur hinanzutreten braucht, um immer neuen, immer fesselnden Stoff für den trigonometrischen Unterricht zu finden, mag er in dieser Beziehung eine noch so häufige, noch so vollständige Abwechslung für wünschenswert halten. Herr Hammer fährt, was wir eigentlich gar nicht anders erwartet haben, fort, $\sin^2 \alpha$ u. s. w. zu schreiben. Er wird nicht erwarten, dass wir darum aufhören, diese Schreibweise für unlogisch zu halten. Aber eine Frage mag Herr Hammer uns beantworten. Was hat er gegen

$$d \cdot x^2 = d(x^2), \qquad dx^2 = (dx)^2, \qquad d^2x = ddx$$

$$\log \cdot x^2 = \log(x^2), \quad \log x^2 = (\log x)^2, \quad \log^2 x = \log \log x$$

einzuwenden? Benutzt er immer die nichtabgekürzte zweite Form, oder gestattet auch er sich die Abkürzung wenigstens einer oder der anderen der ersten Formen? Und wenn er diese letztere Frage bejahen sollte, hält er nicht Folgerichtigkeit für eine recht zweckmässige Einrichtung?

Cantor.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Versuch einer Kritik von Dr. Ludwig Goldschmidt, mathematischem Revisor der Lebensversicherungsbank für Deutschland in Gotha. Hamburg und Leipzig 1897. Verlag von Leopold Voss. VIII, 279 S.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat als Definition der Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines gewissen Ereignisses den Quotienten der Anzahl der diesem Eintreten günstigen Fälle durch die Anzahl der überhaupt möglichen Fälle angegeben. Ist diese Definition eine durch die Natur der Ereignisse erzwungene, oder ist sie willkürlich? Sagt sie uns, was Wahrscheinlichkeit ist, oder sagt sie uns nur, was der Mathematiker sich gewöhnt hat so zu nennen? Das ist, wenn wir dem Verfasser in seinen ungemein geistvollen, aber leider nicht immer das Ziel deutlich hervortreten lassenden Auseinandersetzungen richtig gefolgt sind, die Frage, über deren Beantwortung er sich mit den Philosophen auseinandersetzt. Herr Goldschmidt gelangt dabei zu einer Überzeugung, welche Referent mit ihm teilt, und welche sich etwa in folgende meistens dem uns vorliegenden Buche entlehnte Sätze kleiden lässt: Allen unseren Wahrscheinlichkeitsaussagen geht die Notwendigkeit in dem Sinne ab, dass ein eintretender Widerspruch zwischen Erwartung und Ereignis zu einer Auflehnung des Verstandes führen müsste. Überall müssen unseren auf mathematische Formeln zurückgeführten und insofern unfehlbaren Schlüssen Erfahrungsthatsachen zu Grunde liegen, ohne deren Richtigkeit die Schlüsse in der

Luft schweben. Auf dem Standpunkte vollständiger Unwissenheit Wahrscheinlichkeitsrechnungen anzustellen ist durchaus unberechtigt, mögen auch Schriftsteller von noch so grosser Bedeutung sich gegen diese Regel verfehlt haben. Als Grundaufgabe, auf welcher alles sich aufbaut, erscheint das Aufsuchen gleich wahrscheinlicher Fälle.

CANTOR.

Wolfgangi Bolyai de Bolya Tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi, cum appendice triplici. Editio secunda. Tomus I. Conspectus arithmeticae generalis. Mandato Academiae scientiarum Hungaricae suis adnotationibus adjectis ediderunt JULIUS KÖNIG et MAURITIUS RÉTHY, Academiae scientiarum Hungaricae sodales. Accedit effigies auctoris. Budapestini MDCCCXCVII. Sumptibus Academiae scientiarum Hungaricae. XII, 677 p.

Der Name des ungarischen Mathematikers, den eine auf der Göttinger Universität entstandene Freundschaft mit Gauss verband, ist allgemein bekannt. Mehr noch kennt man den Namen des Sohnes Johann Bolyai, der die Frage nach einer Geometrie, in welcher das Parallelenaxiom nicht herrsche, welche erstmalig von Saccheri gestellt worden war, neuerdings auf die Tagesordnung brachte. Von Wolfgang Bolyai dem Vater kannte das grössere mathematische Publikum nur die oben erwähnte Thatsache, die allerdings das günstigste Vorurteil zu erwecken vermochte, wenn man die geringe Zahl der Männer erwog, welche Gauss seiner Freundschaft würdigte. Dennoch war es schwer, den Meisten unmöglich, ein eigenes Urteil über Wolfgang Bolyais Leistungen zu gewinnen, da über seinen Schriften ein doppelter Unstern leuchtete. Sie waren so gut wie unerhältlich, und wer eines Exemplares habhaft wurde, fühlte sich durch die vielen ungewohnten Bezeichnungen sowie durch den mangelhaften Druck, der unter den ungünstigsten Verhältnissen sich durch mehrere Jahre hindurchgeschleppt hatte, abgeschreckt. Die Ungarische Akademie hat es als eine Ehrenpflicht erkannt, für eine neue würdige Ausgabe Sorge zu tragen, deren erster Band in gradezu glänzender Ausstattung vollendet vor uns liegt. Von den fremdartigen Bezeichnungen sind einige gewichen, wie Bolyai in einer Selbstanzeige einst als wünschenswert erkannt hatte, andere sind beibehalten worden, mit welchen sich allmählich zu befreunden Aufgabe des Lesers ist. Der erste Band des *Tentamen* besteht aus vier Abschnitten: 1. Grundzüge einer allgemeinen Arithmetik, 2. Differential- und Integralrechnung nebst Grundzügen der Variationsrechnung, 3. Grundzüge der Theorie der Gleichungen, 4. Zusätze. Das Erscheinungsjahr des Tentamen in seiner ersten Ausgabe war 1832. Bolzanos in Prag erschienene Schriften waren seit etwa 15 Jahren, Cauchys *Analyse algébrique* seit 11 Jahren im Handel, während die *Disquisitiones circa seriem etc.* von Gauss gar schon seit 20 Jahren für die Wissenschaft vorhanden waren. Diese Daten wird man gut thun im Auge zu behalten, um der Versuchung zu entgehen, Bolyais Tentamen eine noch bahnbrechendere Be-

deutung beizulegen, als es hätte erringen können, wenn es rechtzeitig genügend bekannt geworden wäre. Wollten und mussten wir durch diese Bemerkung einer Überschätzung des Tentamen in den Weg treten, so liegt uns nichts ferner, als eine Unterschätzung veranlassen zu wollen. Die Schriften, auf welche wir hingewiesen haben, lassen erkennen, worin die Eigenart und mit ihr der wissenschaftliche Wert des Tentamen besteht. Der Bruch mit jener Darstellungsweise, welche an dem Entdecken immer neuer analytischer Wahrheiten sich genügen liess, ohne eine vollkommene, allen Bemängelungen trotzende Sicherung derselben für unerlässlich zu halten, ist vollzogen. Das Hauptgewicht fällt auf die tiefe Begründung. Der Begriff der Grenze ist es insbesondere, welchen Bolyai (S. 20) scharf zu fassen sich bemüht. In deutscher Übersetzung lautet die betreffende Stelle etwa folgendermassen:

Findet ein gewisses A in jedem Augenblicke einer Zeit T statt, dagegen in einem nach T eintretenden Zeitpunkte t nicht mehr, so muss es, wenn T fortgesetzt zunimmt, einen Zeitpunkt p geben, welcher der letzte von dem Anfange von T an gerechnet ist, bei welchem das Stattfinden von A zutrifft. In p ist also zum letzten Male A oder zum ersten Male Nicht $-A$. Ist in p das Nicht $-A$, so wird hinter dem p irgendeinmal immer A oder immer Nicht $-A$ stattfinden, es sei denn, dass hinter dem p jeder Zeitpunkt p' ein solcher wäre, dass zwischen p und p' zugleich A und Nicht $-A$ stattfände. Das ist die Grundlage des Grenzbegriffes.

An einer anderen Stelle (S. 55) heisst es: Wächst q in der Weise, dass nach jeder Vermehrung eine neue stattfindet, dass aber dennoch immer etwas geringeres als Q entsteht, so hat q eine Grenze.

Um an einem Beispiele erkennen zu lassen, wie Bolyai geometrische Grenzbegriffe zu fassen wusste, führen wir eine dritte Stelle (S. 290) an: Ist ein Bogen $\mathfrak{ap}$ einer ebenen Kurve und eine solche in derselben Ebene befindliche von $\mathfrak{p}$ ausgehende Gerade $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$ gegeben, dass von $\mathfrak{p}$ aus in der gleichen Ebene keine Gerade zwischen dem Bogen und der $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$ gezogen werden kann, so sagt man, dass $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$ die Kurve berühre.

Man bemerkt, dass diese Definitionen, welche leicht zu vermehren wären, sehr modern im besten Sinne dieses Wortes anmuten. Es wäre vielleicht wünschenswert, wenn einer der Herausgeber sich die für ihn leichte Mühe geben wollte, Bolyais Kraftsätze, wenn wir so sagen dürfen, aus dem Zusammenhange gerissen in kurzem Auszuge zu veröffentlichen.

Cantor.

Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois publiées sous les auspices de la société mathématique de France, avec une introduction par M. Émile Picard, membre de l'Institut. Paris 1897. Gauthier-Villars et fils X, 61 p.

Gegenwärtig ist, man kann wohl sagen überall, die Neigung vorhanden, Gesamtausgaben der Schriften hervorragender Forscher zu ver-

anstalten. Auch für die der Anzahl nach wenigen Abhandlungen von Galois hat die französische mathematische Gesellschaft eine solche Vereinigung zu einem kleinen Bändchen veranlasst, welches, wie man voraussehen darf, bald in den wenigsten Bibliotheken von Mathematikern fehlen wird. Eine Einleitung aus der Feder von Herrn Émile Picard dient ihm zur besonderen Empfehlung, wenn es einer solchen bedürfte. CANTOR.

Der Mathematiker Jakob Steiner von Utzenstorf. Ein Lebensbild und zugleich eine Würdigung seiner Leistungen von Dr. phil. J. H. GRAF, ordentlichem Professor der Mathematik an der Hochschule in Bern. Mit dem Porträt und dem Faksimile eines Briefes Steiners. Bern 1897, K. J. Wyss. 51 S.

Die uns vorliegende kleine Schrift ist keine Lobschrift im landläufigen Stile. Herr Graf hat den Spruch, dass man von Toten nur Gutes reden solle, geopfert und an dessen Stelle die Behauptung bewährt, dass Wahrheit die beste Politik sei. Wir lernen in Grafs Schilderung den wirklichen Jakob Steiner kennen, eine nicht immer liebenswürdige, nicht immer nachahmungswerte, aber stets geniale und im höchsten Grade bedeutende Persönlichkeit. Ungemein fesselnd sind die Angaben über Steiners eigenen Bildungsgang, insbesondere über die Hefte, welche er ausarbeitete, als er der Pestalozzischen Erziehungsanstalt angehörte. CANTOR.

Bibliographie

vom 4. August bis 13. Oktober 1898.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathem.-physik. Klasse. Neue Folge, 1. Bd. Nr. 3. SCHUR, WILH., Ableitung relativer Örter des Mondes gegen die Sonne, aus heliometrischen Messungen von Sehnenlängen ausgeführt auf der Sternwarte zu Göttingen während der partiellen Sonnenfinsternisse von 1890, Juni 16./17. und von 1891, Juni 6. Berlin, Weidmann. M. 3.

Abhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathem.-physikalische Klasse. 24. Bd. Nr. IV. CREDNER, HERM., Die sächsischen Erdbeben während der Jahre 1889 bis 1897. Leipzig, B. G. Teubner. M. 4. 50.

Annalen, neue, der königl. Sternwarte in München. Herausgegeben von Direktor Hugo Seeliger. III. Bd. München, Franz. M. 25.

Berichte der sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-physik. Klasse. 1898. I.—IV. Leipzig, B. G. Teubner. à M. 1.

Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1897. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 53. Jahrg. 1. Abt. Börnstein, Rich., Physik der Materie. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 23.

Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung. Herausgegeben von A. Wangerin und A. Gutzmer. 5. Bd. 2. Heft 1. Lieferung. Kötter, Ernst, Die Entwickelung der synthetischen Geometrie. Leipzig B. G. Teubner. M. 4. 40.

Jahrbuch, deutsches meteorolog., für 1896. Meteorologische Station I. Ordnung in Magdeburg. Herausgeg. von Rud. Weidenhagen. Magdeburg, Faber. kart. M. 6.

Jahrbuch, nautisches, oder Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1901 zur Bestimmung der Zeit, Länge und Breite zur See nach astronomischen Beobachtungen. Herausg. vom Reichsamt des Innern. Berlin, Heymann. kart. M. 1. 50.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausg. von Emil Lampe. 27. Bd. Jahrg. 1896. 1. Heft. Berlin, Reimer. M. 12.

Sitzungsberichte, Münchener, Mathematische Klasse. 1898. 2. Heft. München, Franz. M. 1. 20.

— Wiener, Mathem.-naturw. Klasse. 1. Abt. 107. Bd. 1.—5. Heft. Wien, Gerolds Sohn. M. 6. 50.

Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9.—11. August 1897. Herausgegeben von Ferd. Rudio. Leipzig, B. G. Teubner. M. 12.

Veröffentlichung des königl. preuss. geodätischen Institutes u. Centralbureaus der internationalen Erdmessung. Helmert, F. R., Beiträge zur Theorie des Reversionspendels. Leipzig, B. G. Teubner. M. 7. 60.

—— Dasselbe. Krüger, L., Beiträge zur Berechnung von Lotabweichungssystemen. Ebenda. M. 8. 40.

Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorol. Instituts. Herausgeg. durch Direktor Wilh. von Bezold. 1897. 2. Heft. Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. und III. Ordnung im Jahre 1897, zugleich deutsches meteorol. Jahrbuch für 1897. Beobachtungssystem des Königreichs Preussen und benachbarter Staaten. Berlin, Asher & Co. M. 3.

Vierteljahrsschrift d. Astronomischen Gesellschaft. 33. Jahrg. 2. Heft. Leipzig, Engelmann. M. 2.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Kindler, P. Fintan, Die Zeitmesser bis zur Erfindung der Pendeluhr. Programm. Einsiedeln, Benziger & Co. M. 2.

Zednik, Jella v., Sophie Kowalewsky, ein weiblicher Professor (Sammlung gemeinnütziger Vorträge Nr. 237). Prag, Haerpfer. M. —. 20.

Reine Mathematik.

Breuer, Adb., Elementar entwickelte Theorie und Praxis der Funktionen einer komplexen Variabeln in organischer Verbindung mit der Geometrie. Wien, Daberkow. M. 5.

Bochow, Karl, Die Formeln für die Summe der natürlichen Zahlen und ihrer ersten Potenzen, abgeleitet an Figuren. Magdeburg, Faber. M. 1.

Czuber, Eman., Vorlesungen üb. Differential- u. Integralrechnung. 2. (Schluss-) Band. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 10.

Fort, O., und Schlömilch, O., Lehrbuch der analytischen Geometrie. 2. Teil. Analytische Geometrie des Raumes. 6. Aufl. Von R. Heger. Leipzig, B. G. Teubner. M. 5.

Gamborg, V. E., Logarithmentafeln, Logarithmen und Antilogarithmen enthaltend, nebst den Logarithmen d. trigonometrischen Funktionen u. a. m. Berlin, Juncker. M. 2. 25.

Goettler, Joh., Konforme Abbildung eines von konfokalen elliptischen und hyperbolischen Kurven n^{ter} Ordnung begrenzten Flächenstückes auf der Halbebene. Programm. Passau, Waldbauer. M. 1.

Koepp, G., Illustrierter Spezialkatalog über geometrische Modelle: Linien, Flächen, Körper und Sammlungen von denselben zur Veranschaulichung planimetrischer, stereometrischer und trigonometrischer Begriffe und Lehrsätze. Bensheim, Ehrhard & Co. M. —. 50.

Meyer, Max, Katechismus der Logarithmen. 2. Aufl. (Webers Katechismen Nr. 93.) Leipzig, Weber. M. 2. 50.

Petersen, Jul., Vorlesungen über Funktionstheorie. Kopenhagen, Höst & Sohn. M. 10.

Riedel, Ernst, Katechismus der Stereometrie, mit einem Anhange über Kegelschnitte, sowie über Maxima und Minima (Webers illustr. Katechismen Nr. 175). Leipzig, Weber. geb. M. 3. 50.

Roe jr., Edward Drake, Die Entwickelung der Sylvesterschen Determinante nach Normalformen. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2.

Salmon, Geo., Analytische Geometrie der Kegelschnitte, mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Frei bearbeitet von Wilh. Fiedler. 6. Aufl. 1. Teil. Leipzig, B. G. Teubner. M. 9.

Schlesinger, Ludwig, Handbuch d. Theorie d. linearen Differentialgleichungen. (In zwei Bänden.) 2. Bds. 2. (Schluss-) Teil. Leipzig, B. G. Teubner. M. 16.

Schur, Frdr., Lehrbuch der analytischen Geometrie. Leipzig, Veit & Co. M. 6.

Sturm, Lehrbuch der Analysis (Cours d'Analyse). Übersetzt von Thdr. Gross. 2. Bd. Berlin, Fischer. M. 7. 50.

Angewandte Mathematik.

Bolte, F., Sammlung von mathem., physikal. und techn. Tafeln für den Unterricht an Schulen für Seedampfschiffs-Maschinisten. Hamburg, Eckardt & Messtorff. kart. M. 2.

Brenner, Leo, Handbuch für Amateur-Astronomen. Leipzig, Mayer. geb. M. 10.

CLASSEN, JOHS., Die Prinzipien der Mechanik bei BOLTZMANN und HERTZ. Hamburg, Gräfe & Sillem. M. 1.

FÖPPL, AUG., Vorlesungen über technische Mechanik. 1. Bd. Einführung in die Mechanik. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 10.

GRUNER, P., Astronomische Vorträge. Sechs gemeinverständliche Hochschulvorträge. Bern, Nydegger & Baumgart. M. 1. 40.

Handwörterbuch der Astronomie, 14. und 15. Lieferung. Breslau, Trewendt. à M. 3. 60.

GÜNTHER, LUDW., Keplers Traum vom Mond. Leipzig, B. G. Teubner. M. 8.

KLEIN, F., und SOMMERFELD, A., Über die Theorie des Kreisels. II. Heft. Durchführung der Theorie im Falle des schweren symmetrischen Kreisels. Leipzig, B. G. Teubner. M. 10.

ROTH, AUGUST, Lehrbuch der astronomischen Navigation. Im Auftrage des kaiserl. und königl. Reichs-Kriegsministeriums, „Marine-Sektion“, verfasst. Wien, Gerold & Co. M. 10.

ROUTH, EDWARD JOHN, Die Dynamik der Systeme starrer Körper in zwei Bänden mit zahlreichen Beispielen. Deutsch von ADF. SCHEPP. Mit Anmerkungen von FEL. KLEIN. 2. Bd. Die höhere Dynamik. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 14.

SARTORY, FRZ., Graphische Tabellen für die statische Berechnung einfacher Hochbaukonstruktionen. Wien, Spielhagen & Schurich. M. 4.

SCHULTZ, E., Vierstellige mathem. Tabellen. 3. Aufl. Ausgabe für Baugewerkschulen. Essen, Baedeker. geb. M. 1.

—— Nebst: Anleitung zum Gebrauche der mathematischen Tabellen in den technischen Kalendern. An 25 Beispielen aus der Praxis erläutert. 3. Aufl. Ebenda. geb. M. 1. 20.

WAGNER, KARL, Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung. Studie. Jena, Fischer. M. 3. 60.

WELLISCH, SIEGM., Das Alter der Welt. Auf mechanisch-astronomischer Grundlage berechnet. Wien, Hartleben. M. 2.

Physik und Meteorologie.

DREHER, EUG., und JORDAN, K. F., Untersuchungen über die Theorie des Magnetismus, den Erdmagnetismus und das Nordlicht. Berlin, Springer. M. —. 60.

KLINCKERT, WILH., Das Licht, sein Ursprung und seine Funktion als Wärme, Elektrizität, Magnetismus, Schwere und Gravitation. Leipzig, Friedrich. M. 2.

STURMHÖFEL, A., Akustik des Baumeisters oder: Der Schall im begrenzten Raume. 2. Aufl. Dresden, Kühtmann. geb. M. 4.

WALTER, ALOIS, Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2. 80.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1897.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. Dezember.

A.

Abbildung.

445. Représentation géométrique de la fonction arctg z. Maillard. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 368.
446. Sur certains problèmes de représentation conforme. H. A. Schwarz. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 200.
447. Sur une généralisation du problème de la représentation conforme aux variétés à trois dimensions. Em. Cotton. Compt. Rend. CXXV, 225.
448. Biegungen und konjugierte Systeme. P. Stäckel. Mathem. Annal. IL, 255. [Vergl. Bd. XLI Nr. 273.]

Absolute Geometrie.

449. Sur la réduction des vecteurs et les propriétés métriques. J. Andrade. Compt. Rend. CXXV, 394.

Vergl. Geschichte der Mathematik 540.

Analytische Geometrie der Ebene.

450. Quartique trinodale comme lieu des points de rencontre de certaines tangentes menées à une série de coniques de deux sommets d'un triangle. A. Droz-Farny. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 145.
451. Quartique lieu des milieux des cordes d'un cercle ayant une projection donnée sur un diamètre fixe. A. Mannheim. N. ann. math Sér. 3, XVI, 187. — M. d'Ocagne ibid. 237.

Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kegelschnitte. Kreis. Parabel.

Analytische Geometrie des Raumes.

452. Neue Eigenschaften des Strahlenkomplexes zweiten Grades. Th. Reye. Mathem. Annal. IL, 585.
453. Sur le déplacement le plus général d'une droite dont tous les points décrivent des trajectoires sphériques. E. Duporcq. Compt. Rend. CXXV, 762.
454. Déplacement d'un tétraèdre trirectangle au sommet. Richard. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 476.
455. Quelques théorèmes de géométrie. G. Gallucci. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 13.
456. Sur deux sphères de même rayon tangentes entre elles et touchant chacune un de deux plans donnés. A. Thévenet. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 94.
457. Sur la droite de rencontre des plans polaires d'un même point par rapport à un ellipsoide et une sphère concentrique. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 31.
458. Théorèmes de Pascal et de Brianchon. F. Farjon. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 78. — F. Schur ibid. 238.

Vergl. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

459. Sur les cas du problème des trois corps (et des n corps) où deux des corps se choquent au bout d'un temps fini. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXV, 1078.

460. Sur les périodes des intégrales doubles et le développement de la fonction perturbatrice. H. Poincaré. Journ. Mathém. Sér. 5, III, 203.
461. Détermination des coordonnées absolues des étoiles, ainsi que de la latitude, à l'aide des instruments méridiens. Méthode générale pour la solution de ces divers problèmes. Loewy. Compt. Rend. CXXV, 1062.
462. Méthode spéciale pour la détermination absolue des déclinaisons et de la latitude. Loewy. Compt. Rend. CXXV, 1142.

B.

Bestimmte Integrale.

463. Extension du théorème de Cauchy. L. Ravut. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 365.
464. Sur l'approximation des fonctions de grands nombres. M. Hamy. Compt. Rend. CXXV, 926.
465. Nouvelle démonstration du théorème de Stokes. R. Blondlot. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 501.
466. Sur l'intégrale $\int \frac{e^{2aiz} - e^{2biz}}{z^2} dz$ prise le long du contour formé de 2 demi-circonférences de rayons R et r, ayant l'origine pour centre commun et reliées par des portions de l'axe. V. Jamet. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 8.
467. Exercises de licence. Bourlet. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 236.
468. Sur les intégrales doubles de seconde aspèce dans la théorie des surfaces algébriques. Em. Picard. Compt. Rend. CXXV, 909.

Vergl. Astronomie 460.

C.

Combinatorik.

469. Über Tripelsysteme. L. Heffter. Mathem. Annal. IL, 101.
470. Théorie des régions. E. Cahen. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 533.

Cubatur.

471. Formule pour le volume d'un tétraèdre. Dulimbert. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 381.

Cylinderfunktionen.

472. Beweis einer Formel des Herrn Sonine. E. Gubler Mathem. Annal. IL, 583.
473. Sur les fonctions Besséliennes $O^n(x)$ et $S^n(x)$. L. Crelier. Compt. Rend. CXXV, 421, 860.

D.

Determinanten.

474. Valeur d'un certain déterminant. V. Retali. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 191.
475. Sur un déterminant remarquable. C. Bourlet. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 369.
476. Sur un certain Jacobien. Autonne. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 376.

Differentialgleichungen.

477. Zur Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Alf. Guldberg. Crelle CXVIII, 158.
478. Mémoire sur les équations différentielles. Duport. Journ. Mathém, Sér. 5, III, 17.
479. Neuer Beweis der Existenz eines Integrals einer linearen homogenen Differentialgleichung. M. Hamburger. Crelle CXVIII, 351. — L. Fuchs ebenda 354.
480. Zur Gruppentheorie der homogenen linearen Differentialgleichungen. Em. Beke. Mathem. Annal. IL, 573.
481. Sur les équations différentielles linéaires appartenant à une même classe de Riemann. F. Marotte. Compt. Rend. CXXV, 84.
482. Sur l'existence des intégrales dans certains systèmes différentiels. Riquier. Compt. Rend. CXXV, 933.
483. Sur l'application de la méthode des fonctions majorantes à certains systèmes différentiels. Riquier. Compt. Rend. CXXV, 1018.
484. Sur les transformations infinitésimales des équations différentielles. N. Saltykow. Journ. Mathém. Sér. 5, III, 429.

485. Sur une double généralisation des équations de Lie. E. Vessiot. Compt. Rend. CXXV, 1019.
486. Über das Verhalten der Integrale von Differentialgleichungen bei der Annäherung der Veränderlichen an eine Unbestimmtheitsstelle. J. Horn. Crelle CXVIII, 257.
487. Sur la méthode des approximations successives de M. Picard. S. Zaremba. Journ. Mathém. Sér. 5, III, 311.
488. Einige Sätze über die asymptotische Darstellung von Integralen linearer Differentialgleichungen. Ad. Kneser. Mathem. Annal. IL, 383.
489. Verwendung asymptotischer Darstellungen zur Untersuchung der Integrale einer speziellen linearen Differentialgleichung. J. Horn. Mathem. Annal. IL, 453.
490. Über die Integration der Hamiltonschen Differentialgleichung mittels Separation der Variabeln. P. Stäckel. Mathem. Annal. IL, 145.
491. Grundzüge einer Integrationstheorie der Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in zwei unabhängigen und beliebig vielen abhängigen Veränderlichen. E. v. Weber. Crelle CXVIII, 123.
492. Theorie der Involutionssysteme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in beliebig vielen abhängigen und unabhängigen Veränderlichen. E. v. Weber Mathem. Annal. IL, 543.
493. Sur la détermination des intégrales d'une équation aux dérivées partielles par certaines conditions initiales. E. Goursat. Compt. Rend. CXXV, 640.
494. Sur l'intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à plusieurs fonctions inconnues. J. Beudon. Compt. Rend. CXXV, 156.
495. Etude sur les intégrales d'un système des équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues. N. Saltykow. Journ. Mathém. Sér. 5, III, 423.
496. Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. N. J. Sonin. Mathem. Annal. IL, 417.
497. Sur une forme analytique des intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. J. Le Roux. Compt. Rend. CXXV, 1015.

Vergl. Mechanik. Variationsrechnung. Wärmelehre.

Differentialquotient.

498. Sur des congruences différentielles linéaires. Alf. Guldberg. Compt. Rend. CXXV, 489.

Dreiecksgeometrie.

499. Sur 4 droites se coupant au centre du cercle circonscrit à un triangle donné. F. Farjon. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 190. — E. Duporcq ibid. 191.

Vergl. Ellipse 503.

E.

Elektrizität.

500. Über das Gleichungssystem einer Kirchhoffschen galvanischen Stromverzweigung. W. Ahrens. Mathem. Annal. IL, 311.
501. Le problème de la distribution de l'electricité et le problème de C. Neumann. W. Stekloff. Compt. Rend. CXXV, 1026.

Ellipse.

502. Sur la déviation de l'ellipse. A. Mannheim. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 249.
503. Ellipse lieu du centre du cercle des neuf points des triangles dont deux côtés sont fixes et le troisième de longueur constante. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 90.
504. Produit constant des aires d'un triangle et d'un rectangle se rapportant à une ellipse. A. Droz-Farny. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 145.

Elliptische Transcendenten.

505. Le théorème d'addition de la fonction $p(u)$. P. Stäckel. N. ann. math Sér. 3, XVI, 75. [Vergl. Bd. XLII Nr. 521.]

506. Sur les périodes des intégrales doubles. H. Poincaré. Compt. Rend. CXXV, 995.
507. Sur les périodes des intégrales doubles de fonctions algébriques. Em. Picard. Compt. Rend. CXXV, 1068.

Vergl. Astronomie 460. Geschichte der Mathematik 541. Thetafunktionen.

F.

Formen.

508. Zur Theorie der linearen Substitutionen. Alf. Loewy. Mathem. Annal. IL, 448. [Vergl. Bd. XLII Nr. 529.]
509. Sur la réduction des formes quadratiques binaires. A. Hurwitz. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 491.
510. Le résultant de trois formes ternaires quadratiques. P. Gordan Journ. Mathém. Sér. 5, III, 195.

Funktionen.

511. Beiträge zur Theorie der stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen. T. Brodén. Crelle CXVIII, 1.
512. Sur la théorie générale des fonctions de variables réelles. R. Baire. Compt. Rend. CXXV, 691.
513. Sur la théorie des fonctions entières. E. Schou. Compt. Rend. CXXV, 763.
514. Über den Zusammenhang zwischen der Dedekind-Weberschen Normalbasis und dem Henselschen absoluten Fundamentalsystem. Ludw. Baur. Mathem. Annal. IL, 73.
515. Sur le calcul fonctionnel distributif. S. Pincherle. Mathem. Annal. IL, 325.
516. Sur la convergence des substitutions uniformes. E. M. Lémeray. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 306.
517. Propriétés fondamentales des fonctions circulaires définies sous forme d'un produit. A. Pagès. N. ann math. Sér. 3, XVI, 341.
518. Sur une formule de la théorie générale des fonctions de plusieurs variables et de l'intégration des différentielles totales. E. Jaggi. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 297.
519. Sur un nouvel algorithme. Lémeray. Compt. Rend. CXXV, 524.

Vergl. Abbildung. Bestimmte Integrale. Cylinderfunktionen. Determinanten. Differentialgleichungen. Differentialquotient. Elliptische Transcendenten. Formen. Gleichungen. Kettenbrüche. Mannigfaltigkeiten. Potential. Reihen. Substitutionen. Thetafunktionen. Transformationsgruppen. Unbestimmte Formen. Zahlentheorie.

G.

Geometrie (descriptive).

520. Sur le biais passé ganche. A. Boulanger. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 171.

Geometrie (höhere).

521. Die Plückerschen Zahlen der Abweichungskurven. W. Bouwman. Mathem. Annal. IL, 24.
522. Nouvelle démonstration du théorème fondamental de la géométrie projective. H. G. Zeuthen. Compt. Rend. CXXV, 638, 858.
523. Über einige Anwendungen des Korrespondenzprinzips. K. Th. Vahlen. Crelle CXVIII, 251.
524. Sur la correspondance biforme; extension des polygones de Poncelet. G. Fontené. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 437.
525. Sur la transformation homographique des propriétés métriques des figures planes. G. Brocard. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 293. [Vergl. Bd. XLII Nr. 568.]
526. Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques. C. Guichard Compt. Rend. CXXV, 519.
527. Sur les réseaux et les congruences. Guichard. Compt. Rend. CXXV, 564
528. Sur la déformation des quadriques. C. Guichard. Compt. Rend. CXXV, 596.
529. Sur le problème de M. Bonnet. C. Guichard. Compt. Rend. CXXV, 643.
530. Sur le problème de Ribaucour. C. Guichard. Compt. Rend. CXXV, 1013.

531. Sur les focales planes d'une courbe plane à un ou plusieurs axes de symétrie. P. H. Schoute. Compt. Rend. CXXV, 931.
532. Sur le déplacement d'un triangle variable semblable à un triangle donné. M d'Ocagne. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 474.
533. Sur les déplacements d'une figure invariable. A. de Saint-Germain. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 319.
534. Sur l'hypocycloïde de Steiner. P. Serret. Compt. Rend. CXXV, 404, 423, 445, 459.
535. Sur une courbe du 4. degré engendrée au moyen de deux circonférences. F. Sartiaux. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 232.
536. Lieu des points de deux courbes appartenant à deux faisceaux, l'un d'ordre m, l'autre d'ordre n, où les courbes se coupent sous un angle constant. G. Leinekugel. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 385.
537. Sur l'application de deux covariants à la construction de quelques espèces de courbes. S. Mangeot. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 677.
538. Démonstration géométrique d'une propriété de la cycloide. A. Vicaire. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 430.

Vergl. Absolute Geometrie. Kinematik. Mehrdimensionale Geometrie. Oberflächen.

Geschichte der Mathematik.

539. Études anatomiques de Leonard da Vinci. H. de Lacaze-Duthiers. Compt. Rend. CXXV, 922.
540. Gauss, die beiden Bolyai und die nichteuklidische Geometrie. P. Stäckel und Fr. Engel. Math. Annal. IL, 149.
541. Les recherches de Gauss dans la théorie des fonctions elliptiques. P. Günther. Journ. Mathem. Sér. 5, III, 95.
542. Note sur Francesco Brioschi (22. XII. 1824—13. XII. 1897). Hermite. Compt. Rend. CXXV, 1139.
543. Le gnomon de l'observatoire et les anciennes toises; restitution de la toise de Picard. C. Wolf. Compt. Rend. CXXV, 199.

Vergl. Differentialgleichungen 479. Optik 613.

Gleichungen.

544. Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un' equazione algebrica $f(xyz)=0$ con funzioni di due parametri. Fed. Enriques. Mathem. Annal. IL, 1.
545. Théorèmes sur les équations algébriques. Sondat. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 169.
546 Sur les conditions qui expriment qu'une équation algébrique de degrée m n'a que p racines distinctes ($p<m$). X. Antomari. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 63.
547. Sur une équation réciproque de degré 2 m n'ayant pas de racine commune avec $x^4-1=0$. E. Taratte. N. ann math. Sér. 3, XVI, 482.
548. Sur les racines imaginaires de l'équation $x=a^x$. E. M. Lémeray. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 54.
549. Sur le quotient et le reste émanants de la division du carré de la dérivée d'un polynome du quatrième degré à quatre racines distinctes par ce polynome même. R. Gilbert. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 101.
550. Racines de quelques équations transcendantes. Intégration d'une équation aux différences mêlées. E M. Lémeray. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 540.
551. Sur l'équation aux périodes. X. Stouff. Compt. Rend. CXXV, 859.

H.

Hydrodynamik.

552. Distribution des vitesses à travers les grandes sections, dans les écoulements graduellement variés, et équation du mouvement aux degrés d'approximation supérieurs. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXV, 6.
553. Théorie approchée du passage d'un régime graduellement varié à une régime rapidement varié ou vice versa J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXV, 69.

554. Établissement du régime uniforme dans un tuyau à section circulaire. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXV, 203.
555. Établissement du régime uniforme dans un tuyau à section rectangulaire large. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXV, 440.
556. Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles. P. Duhem. Journ. Mathem. Sér. 5, III, 151.
557. Sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant à la surface d'un liquide compressible. P. Duhem. Journ. Mathem. Sér. 5, III, 389.
558. Sur les équations de l'Hydrodynamique et la théorie des tourbillons. P. Appell. Journ. Mathem. Sér. 5, III, 5.

Hyperbel.

559. Sur les secteurs d'aire constante détachés dans une série d'hyberboles equilatères homothétiques par un rayon partant de leur centre commun. Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 49.

K.

Kegelschnitte.

560. A construction by the ruler of a point covariant with five given points. F. Morley. Mathem. Annal. IL, 596.
561. Sur les coniques qui ont avec une courbe donnée en un de ses points un contact d'ordre supérieur. M. d'Ocagne. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 252.
562. Lieu des extrémités du rayon de courbure d'une epicycloïde qu'on déroule sur la tangente au sommet. Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 48.
563. Droite passant par le centre de courbure d'un point d'une conique. V. Retali. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 382.
564. Sur deux triangles homologiques inscrit dans la même conique. R. Gilbert. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 189
565. Sur 3 triangles homologiques deux à deux et sur 3 coniques tangentes à leurs côtés. A. Droz-Farny. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 185.
566. Trouver le lieu du foyer mobile d'une conique d'excentricité donnée dont l'autre foyer est fixe et dont la directrice correspondant à ce foyer enveloppe une courbe donnée. G. Dulimbert. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 336.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 458. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Parabel.

Kettenbrüche.

567. Sur une représentation géométrique du développement en fraction continue ordinaire. Husquin de Rhéville. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 61. [Vergl. Bd. XLII, Nr. 616.]

Kinematik.

568. Théorèmes de cinématique tirés de la géométrie cinématique de Mr. Mannheim. Canon. N. ann. math Sér. 3, XVI, 147.
569. Sur le déplacement d'un plan dont tous les points décrivent des lignes sphériques. R. Bricard. Compt. Rend. CXXV, 1024. [Vergl. Bd. XLII Nr. 617.]
570. Sur la théorie de l'octaèdre articulé. R. Bricard. Journ. Mathém. Sér. 5, III, 113. — A. Mannheim ibid. 149.
571. Le lieu des pôles des spirales logarithmiques osculatrices aux diverses sections ayant même tangente en un point d'une surface est un cercle. A. Mannheim. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 383.

Kreis.

572. Quadrature approximative du cercle. H. Guillot. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 237. — Wlad. Habbé ibid. 329.
573. Sur les quadrilatères inscriptibles et non inscriptibles. E. Duporcq. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 51.
574. Rayon d'une circonférence passant par 3 points donnés en coordonnées trilinéaires. H. Lez. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 143.

575. Circonférences passant par 6 points donnés. Dulimbert. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 193. — E. Lemoine ibid. 238.
Vergl. Dreiecksgeometrie. Transformationsgruppen 635.

M.

Magnetismus.

576. A theory of magnetic action upon light. A. B. Basset. Mathem. Annal. IL, 247.

Mannigfaltigkeiten.

577. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. G. Cantor. Mathem. Annal. IL, 207.

Mathematischer Unterricht.

578. Sur l'arithmétisation des mathématiques. F. Klein. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 114.
579. Le nouveau programme d'admission à l'École Polytechnique. Laisant et Antomari. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 40.
580. Les certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Laisant et Antomari. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 487.

Mechanik.

581. Über die Prinzipien der Mechanik. L. Königsberger. Crelle CXVIII, 275.
582. Sur les intégrales quadratiques de la dynamique. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXV, 156. [Vergl. Nr. 259.]
583. Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslagen. Ad. Kneser. Crelle CXVIII, 186. [Vergl. Bd. XLII Nr. 252.]
584. Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas où la fonction de forces n'est pas un maximum. A. Liapounoff. Journ Mathém. Sér. 5, III, 80.
585. Sur les positions d'équilibre instable. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXV, 1021.
586. Sur l'équilibre indifférent d'une chaine pesante sur une courbe. Karagiannidès. N ann. math. Sér. 3, XVI, 374.
587. Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique. Hadamard. Journ. Mathém. Sér. 5, III, 331.
588. Sur les intégrales communes à plusieurs problèmes sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible. N. Saltykow. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 245.
589. Sur la stabilité d'une toupie qui dort. F. Klein. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 323.
590. Sur le tracé de l'anse de panier. A. Mannheim. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 404. [Vergl. Bd. XLII, Nr. 266.]
591. Sur le tracé pratique des engrenages. L. Lecornu. Compt. Rend. CXXV, 162.
592. Sur l'équilibre de la vis. C. Bourlet. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 426.
593. Sur le joint de Cardan. Th. Caronnet. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 472.
Vergl. Astronomie. Elektrizität. Hydrodynamik. Magnetismus. Optik. Potential. Wärmelehre.

Mehrdimensionale Geometrie.

594. Theorie der linearen Strahlenkomplexe im Raume von r Dimensionen. S. Kantor Crelle CXVIII, 74.
595. Über den Zusammenhang der Krümmungstheorie der Kurven mit der Mechanik starrer Systeme des n-dimensionalen Raumes. G. Landsberg. Crelle CXVIII, 123.
596. Sur les réseaux O associés. C. Guichard. Compt. Rend. CXXV, 929.
597. Sur les systèmes complètement orthogonaux dans l'espace à n dimensions et sur la réduction des sytèmes différentiels les plus généraux. J. Drach. Compt Rend. CXXV, 598.
598. Sur les systèmes complètement orthogonaux dans un espace quelquonque G. Ricci. Compt. Rend. CXXV, 810.

O.

Oberflächen.

599. Rapport sur un mémoire de M. Hadamard intitulé „Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposées". H. Poincaré. Compt. Rend. CXXV, 589.
600. Des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface d'ordre quelconque soit de revolution. S. Mangeot. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 408.
601. Sur un réseau conjugué particulier de certaines surfaces dérivées des surfaces du second ordre. S. Mangeot. Compt. Rend. CXXV, 1083.
602. Sur les surfaces algébriques qui admettent comme ligne asymptotique une cubique gauche. Ch. Bioche. Compt. Rend. CXXV, 15.
603. Sur les surfaces qui ont pour génératrices les cordes d'une cubique gauche. Ch. Bioche. N. ann. math Sér. 3, XVI, 168.
604. Quelques propriétés des surfaces moulures. Gem. Pirondini. Journ. Mathém. Sér. 5, III, 405.
605. Sur les trajectoires isogonales des génératrices d'une surface développable. Gem. Pirondini. Crelle CXVIII, 61.
606. Sur les surfaces isothermiques. A. Pellet. Compt. Rend. CXXV, 291.
607. Sur les surfaces de Weingarten. A. Pellet. Compt. Rend. CXXV, 601.
608. Sur les surfaces applicables sur une surface de révolution. A. Pellet. Compt. Rend. CXXV, 1159.
609. Sur les surfaces rapportées à leurs lignes de longueur nulle. Eug. Cosserat. Compt Rend. CXXV, 159.
610. Sur la symétrie dans les surfaces algébriques. Dumont. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 463.
611. Sur les lignes géodésiques de certaines surfaces. Em. Waelsch. Compt. Rend. CXXV, 521.

Vergl. Abbildung. Analytische Geometrie des Raumes 453. Bestimmte Integrale 468. Geometrie (descriptive). Geometrie (höhere).

Oberflächen zweiter Ordnung.

612. Quadriques tangentes à tous les plans tangents communs à une sphère et un ellipsoïde donné. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 524.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 457.

Optik.

613. Identité de la strophoide avec la focale à noeud; son application à l'optique géometrique. G. Loria. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 262.
614. Étude générale des lentilles épaisses au moyen de l'homographie. And. Vicaire. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 5.

P.

Parabel.

615. Parabole lieu du centre du cercle circonscrit à un certain triangle. H. Brocard. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 334.
616. Enveloppe des axes des paraboles ayant en un même point d'une courbe plane donnée un contact du second ordre avec elle. Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 384.
617. Produit des rayons de courbure aux pieds des normales abaissées d'un point à une parabole. A. Droz-Farny. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 235.

Planimetrie.

618. Propriété du triangle. H. Lez. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 98.

Vergl. Dreiecksgeometrie.

Potential.

619. Sur le potentiel de la double couche. Liapounoff. Compt. Rend. CXXV, 694.
620. Sur certaines questions se rattachant au problème de Dirichlet. A. Liapounoff. Compt. Rend. CXXV, 808.
621. Sur la transmission d'énergie à distance. Application à la polarisation rotatoire. A. Broca. Compt. Rend. CXXV, 765.

R.

Reihen.

622. Sur les séries de Taylor. Eug. Fabry. Compt. Rend. CXXV, 1086. [Vergl. Nr. 352.]
623. Développement en séries trigonométriques des polynomes de M. Léauté. P. Appell. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 265.

Vergl. Astronomie 460. Thetafunktionen 631.

S.

Substitutionen.

624. Über die Zahl der verschiedenen Werte, die eine Funktion gegebener Buchstaben durch Vertauschung derselben erlangen kann. Alf. Bochert. Mathem. Annal. IL, 113. [Vergl. Bd. XXXVIII Nr. 245.]
625. Über die Klasse der transitiven Substitutionengruppen. Alf. Bochert. Mathem. Annal. IL, 133. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 246.]
626. Sur une série de groupes primitifs holoédriquement isomorphes à des groupes plusieurs fois transitifs. Ed. Maillet. Journ. Mathém. Sér. 5, III, 277.
627. Applications de la théorie des substitutions linéaires à l'étude des groupes. H. Laurent. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 149. [Vergl. Bd. XLII Nr. 702.]
628. Étude sur les substitutions du second degré. H. Laurent. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 389.
629. Über die Einfachheit der alternierenden Gruppe. Em. Beke. Mathem. Annal. IL, 581.
630. Anwendungen des Zusammenhanges in Reihen auf die Theorie der Substitutionengruppen. P. Hoyer. Mathem. Annal. IL, 39.

Vergl. Formen 508.

T.

Thetafunktionen.

631. Über die Konvergenz der Thetareihen. A. Krazer. Mathem. Annal. IL, 400.
632. Systèmes orthogonaux pour les dérivées des fonctions thêta de deux arguments. E. Jahnke. Compt. Rend. CXXV, 486.
633. Über einen Zusammenhang zwischen den Elementen orthogonaler Neuner- und Sechzehnersysteme. E. Jahnke. Crelle CXVIII, 224.

Transformationsgruppen.

634. Sur la théorie des groupes infinis de transformation et l'intégration des équations aux dérivées partielles. J. Beudon. Compt. Rend. CXXV, 811.
635. Das Apollonische Problem. E. Study. Mathem. Annal. IL, 497.

U.

Unbestimmte Formen.

636. Trouver les limites de la fraction $\frac{\varepsilon^{ax} - \varepsilon^{bx}}{a^{\varepsilon x} - b^{\varepsilon x}}$ pour $x = 0$, pour $x = \infty$, pour $a = b$. G. Tzitzeica. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 339.
637. Sur les symboles $\frac{0}{0}$ à plusieurs variables indépendantes. L. Autonne. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 420.

V.

Variationsrechnung.

638. Über eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung. Arth. Hirsch. Mathem. Annal. IL, 49.

W.

Wärmelehre.

639. Sur l'intégration des équations de la chaleur. Le Roy. Compt. Rend. CXXV, 756.
640. Rapport sur un mémoire de M. Le Roy intitulé „Sur l'intégration des équations de la chaleur". H. Poincaré. Compt. Rend. CXXV, 847.
641. Compressibilité des gaz à diverses températures et au voisinage de la pression atmosphérique. A. Leduc. Compt. Rend. CXXV, 646.
642. De la variation de l'énergie dans les transformations isothermes. De l'énergie électrique. H. Pellat. Compt. Rend. CXXV, 699.

Z.

Zahlentheorie.

643. Über Zahlengruppen in algebraischen Körpern. II. Abhdlg. H. Weber. Mathem. Annal. IL, 88. [Vergl. Bd. XLII Nr. 721.]
644. Über die Fundamentalteiler eines Gattungsbereiches in Bezug auf zwei verschiedene Rationalitätsbereiche. K. Hensel. Crelle CXVIII, 173.
645. Über die Zurückführung der Divisorensysteme auf eine reduzierte Form. K. Hensel. Crelle CXVIII, 234.
646. Eine arithmetische Formel. Eug. Netto. Mathem. Annal. IL, 148.
647. Sur le caractère quadratique du nombre 3 par rapport à un nombre premier quelconque. R. Bricard. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 546.
648. Si p est un nombre premier qui ne divise pas x et r un nombre entier quelconque, l'expression $x^{p^r-p^{r-1}}-1$ est divisible par p. Émine. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 192.
649. Si m et n sont deux nombres premiers $m^{n-1}+n^{m-1}-1$ est divisible par mn. G. Tzitzeica. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 192.

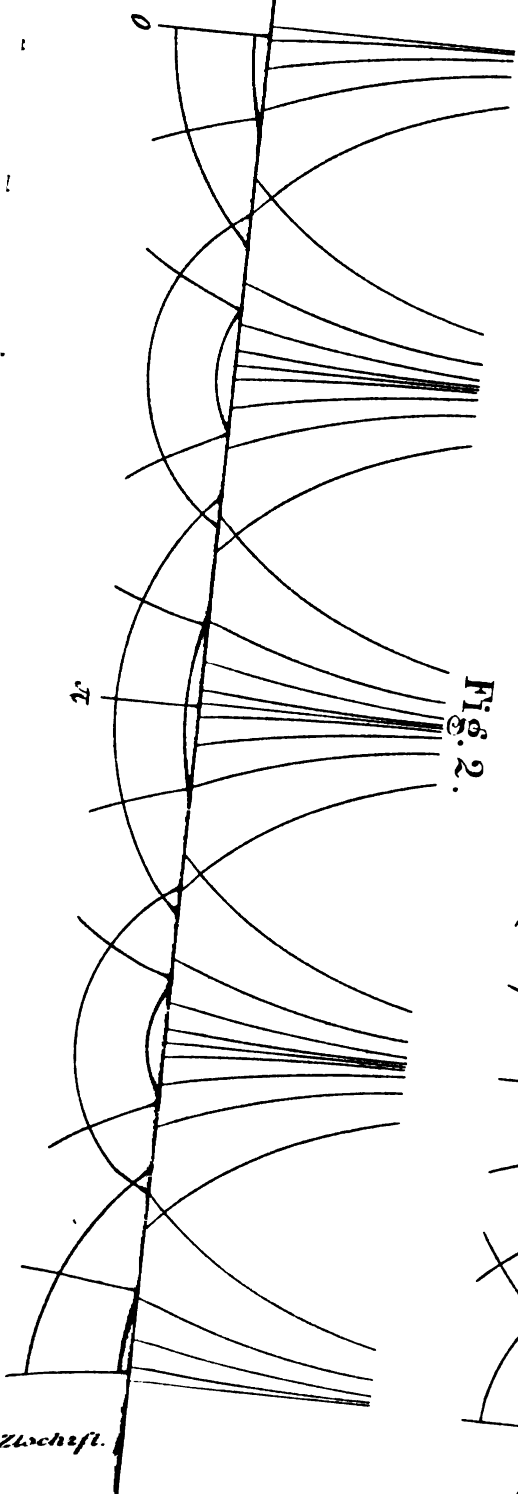


Fig. 2.

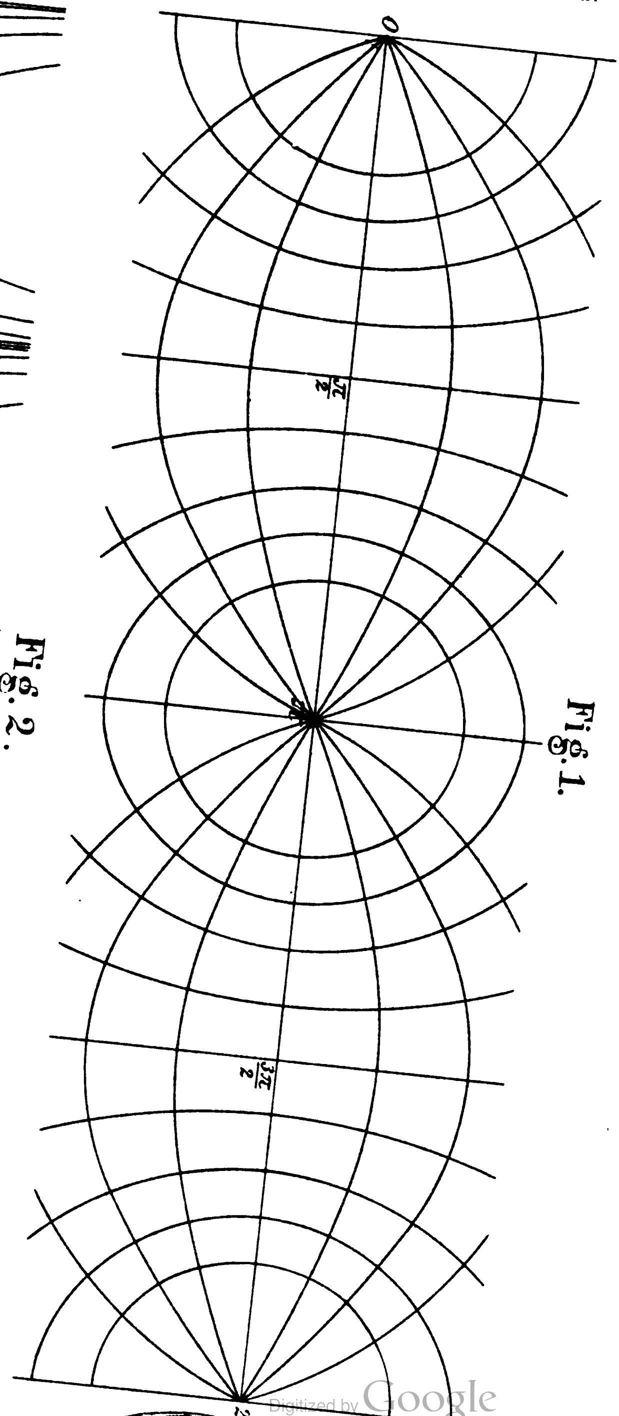


Fig. 1.

Verzeichnis von Abhandlungen

aus der

angewandten Mathematik

die im Jahre 1897 in technischen Zeitschriften

erschienen sind.

Zusammengestellt von **R. Mehmke.**

Beilage

zur Zeitschrift für Mathematik und Physik

43. Jahrgang 1898 4. u. 5. Heft.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1898.

Abkürzungen für die Titel der ausgezogenen Zeitschriften.

A. B. = (Wiener) Allgemeine Bauzeitung, 62. Jahrgang.
A. M. = Annales des Mines, 9me série, t. 11 et 12.
A. P. Ch. = Annales des Ponts et Chaussées, 7me série, 7me année, Ier, IIme, IIIme et IVme trimestre.
B. = The Builder, vol. 72.
C. B. = Centralblatt der Bauverwaltung, 17. Jahrgang.
D. B. = Deutsche Bauzeitung, 31. Jahrgang.
E. = The Engineer, vol. 84.
Eg. = Engineering, vol. 43 and vol. 44.
N. A. C. = Nouvelles Annales de la Construction, 5e série, t. 4 (43e année).
P. J. = (Dinglers) Polytechnisches Journal, Bde. 303, 304, 305 und 306.
Schw. B. = Schweizerische Bauzeitung, Bde. 29 und 30.
Z. A. I. = Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, Bd. 43 (neue Folge Bd. 2), Heft-Ausgabe.
Z. B. = Zeitschrift für Bauwesen, Jahrgang 47.
Z. I. = Zeitschrift für Instrumentenkunde, 17. Jahrgang.
Z. Ö. I. A. V. = Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins, 49. Jahrgang.
Z. V. = Zeitschrift für Vermessungswesen, Bd. 26.
Z. V. D. I. = Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, Bd. 41.
V. V. G. = Verhandlungen des Vereins für Gewerbfleiss, Jahrgang 76.

Abbildungen.

W. Jordan, Zur Theorie der konformen Projektionen, Z. V., S. 145—148.

A. Klingatsch, Zur ebenen rechtwinkeligen Abbildung der Soldnerschen Koordinaten, Z. V., S. 431—436.

Akustik.

A. Sturmhoefel, Centralbau oder Langhaus? Eine Erörterung der Schallverhältnisse in Kirchen, Z. B., S. 330—346.

Ausflussmenge, s. Hydrodynamik.

Ausgleichungsrechnung, Fehlertheorie.

Ad. Blümcke, Zur Jordanschen Theorie des Maximalfehlers, Z. V., S. 51—54, 276—281, 561—562.

Puller, Polygonometrische Berechnungen mit Nebenbedingungen, Z. V., S. 208—213.

C. Runge, Zur Methode der kleinsten Quadrate, Z. V., S. 454—456.

Paul Uhlich, Stations-Ausgleichung von nicht vollkommen symmetrischen Beobachtungssätzen nach der Besselschen Methode, Z. V., S. 465—480.

Balken, s. Elastizitäts- und Festigkeitslehre.

Dampfmaschinen, s. Reibung, Tafeln (graphische), Wärmetheorie.

Blockwerke.

Martin Boda, Die Stromlauf-Formeln und ihre Anwendung zur Schaltung Siemensscher Blockwerke, Z. Ö. I. A. V., S. 620—624, 634—636, 647—652, 664 bis666.

Brücken, s. Elastizitäts- und Festigkeitslehre.

Dampfcylinder, s. Wärmetheorie.

Dampfmaschinen, s. Dynamik, Reibung, Tafeln (graphische), Wärmetheorie.

Druckverteilung, s. Elastizitäts- und Festigkeitslehre.

Dynamik.

K. Grögler und A. Ulbrich, Das Anlaufen der Fördermaschinen aus jeder Kurbelstellung, Z. V. D. I. S. 974—975.

Richard Knoller, Die Massenwirkungen der Dampfmaschinen und ihre Balanzierung, Z. Ö. I. A. V., S. 277—281.

H. Lorenz, Die Massenwirkungen am Kurbelgetriebe und ihre Ausgleichung bei mehrkurbligen Maschinen. Z. V. D. I., S. 998—1003, 1026—1031 (Bemerkung dazu von R. Knoller und Erwiderung von H. Lorenz, S. 1371).

Moriz Kohn, Ermittelung des Ungleichförmigkeitsgrades von Dampfmaschinen, Z. Ö. I. A. V., S. 161—163; s. auch Reibung.

Einflussfläche, Einflusslinien, s. Elastizitäts- und Festigkeitslehre, Statik.

Elastizitäts- und Festigkeitslehre.

—n., Der Begriff der Elastizität, C B., S. 68. — A. Föppl und Fr. Engesser, Zum Begriffe der Elastizität, ebenda S. 102—103. — Kirsch, Über die Bestimmung der Elastizität fester Körper, ebenda S. 170—171. — Fr. Engesser, Zum Begriffe der Elastizität, ebenda S. 204.

C. Bach, Untersuchungen von Granit in Bezug auf Zug-, Druck-, Biegungs- und Schubfestigkeit, sowie in Hinsicht auf Zug-, Druck- und Biegungselastizität. Allgemeines Gesetz der elastischen Dehnungen, Z. V. D. I., S. 241—252.

A. Föppl, Die Zugfestigkeit des Cements, C. B., S. 6—8. (Bemerkung dazu von K. Dümmler, S. 28, Entgegnung von A. Föppl, S. 43.)

W. Carling, Zur Berechnung der Betonbalken, Z.Ö.I.A.V., S. 163—164. (Nachtrag S. 165—166; Erwiderung von A. Föppl, S. 166; Bemerkung von A. Hamisch, S. 191.)
Fr. v. Emperger, Zur Theorie der verstärkten Betonplatte, Z.Ö.I.A.V., S. 351 bis 355, 364—367, 402.
R. Latowsky, Die Biegungselastizität bei Körpern von ungleicher Festigkeit, Z.V.D.I., S. 941—943.
Bruno Schulz, Beitrag zur Biegungsfestigkeit, C.B., S. 264—265 (Bemerkung dazu von H. Reissner, ebenda S. 516; Entgegnung von Bruno Schulz, ebenda S. 528).
M. R. v. Thullie, Über die Berechnung der Monierplatten, Z.Ö.I.A.V., S. 193—197.
R. F. Mayer, Über die Bedingungen einer gleichförmigen Druckverteilung in den Fundamenten, Z.Ö.I.A.V., S. 116—118.
Josef Ant. Spitzer, Druckverteilung in gebrochenen Fundamentflächen, Z.Ö. I.A.V., S. 96—97 (Bemerkungen dazu von Melan, S. 129, 187; Entgegnungen von Spitzer, S. 152—153, 187).
M. Grübler, Der Spannungszustand in Schleifsteinen und Schmirgelscheiben, Z.V.D.I., S. 860—864.
Hofmann, Die Spannungen in auf Biegung beanspruchten Stein- oder Betonplatten, D.B., S. 638—639.
H., Spannungsverteilung im Mauerwerk, D.B., S. 438.
G. Lang, Spannungsverteilung im Mauerwerk, sowie bei anderen Baustoffen mit wechselndem Elastizitätsmaß, D.B., S. 58—59.
Joh. Hermanek, Einfluss von Temperaturschwankungen auf Beton-Eisenkonstruktionen, Z.Ö.I.A.V., S. 694—695.
Md. Kinkel, Einflusslinien des gelenklosen Bogens, Schw.B., Bd. 30, S. 142—143, 151—153, 163—165.
Mehrtens, Summen-Einflusslinien und A-Polygone, C.B., S. 178—179.
Franz Podhajský, Beitrag zur Lehre von den Belastungs-Äquivalenzen, Z.Ö.I. A.V., S. 377—381, 393—397.
Fritz v. Emperger, Die Knickfestigkeit in Theorie, Versuch und Praxis, Z.Ö.I. A.V., S. 661—664, 677—682, 695—698 (Bemerkungen dazu von L. v. Tetmajer, A. Ostenfeld, Rudolf Bredt, Prof. Melan, A. J. Du Bois, Mansfield, Merriman, R.F. Mayer, Prof. Brik, S. 708—717, 722—726; Erwiderung von F. v. Emperger, S. 726—730).
—Z.—, Die Eulersche Knickformel, C.B., S. 440.
C. Bach, Untersuchungen über die Formänderungen und die Anstrengung flacher Böden, Z.V.D.I., S. 1157—1163, 1191—1197, 1218—1226.
A. Föppl, Versuche über die Elastizität des Erdbodens, C.B., S. 276—278.
Dupuy et Cuënot, Barêmes destinés à faciliter le calculs des ponts métalliques à une ou plusieurs travées, 2° partie, poutres continues, A.P.Ch., III, p. 91—270.
Fr. Engesser, Über die Angriffe eiserner Balkenbrücken auf Pfeiler und Widerlager, C.B., S. 341—345.
—— Über Gitterträger, Schw.B., Bd. 29, S. 24.
L. Geusen, Beitrag zur Berechnung des Zweigelenkbogens unter Einwirkung wagerechter und schräger Kräfte, Z.Ö.I.A.V., S. 557—561.
A. Meves, Beitrag zur Frage der Querschnittsermittelung kontinuierlicher Blechbalken, Z.V.D.I., S. 166—169.
G. Rogie, Note sur la recherche des efforts maxima développés en un point dans une poutre horizontale à une travée par le passage d'un train, A.P.Ch., II, p. 313—333.
A. Zschetzsche, Berechnung von Bogenbrücken bei Wirkung seitlicher Kräfte, Z.A.I., S. 242—291.
Ramisch, Ermittelung der Spannkräfte in den Wandgliedern eines ebenen Fachwerkbalkens, C.B., S. 488, 511.
Robert Land, Die Einflussfläche der Spannkraft eines Zwischenstabes für ein einfaches Fachwerk, C.B., S. 466—468, 490.
M. Westphal, Berechnung der Festigkeit loser und fester Flansche, Z.V.D.I., S. 1036—1042.
H., Zur Konstruktion mit Erde hinterfüllter, symmetrischer Brückengewölbe, D.B., S. 26—28.

H., Das Hohlgewölbe im Brückenbau, D.B., S. 210—211.
Joh. Hermanek, Einfluss von Temperaturschwankungen auf Gewölbe, Z.Ö.I.A.V., S. 419—427.
Joh. Hermanek, Einfluss geneigter Niveletten auf symmetrische Gewölbe, Z.Ö. I.A.V., S. 565—567.
Tourtay, Note sur le calcul de la poussée des voûtes, A.P.Ch., II, S. 334—341.
M. Tolle, Die steife Kettenlinie, Z.V.D.I., S. 855—860.
Luigi Vianello, Die Doppelkonsole, Z.V.D.I., S. 1275—1279.
Pelletreau, Mémoire sur les profils des barrages en maçonnerie, A.P.Ch., I, p. 90—192.
Puller, Zur Querschnittberechnung trapezförmiger Stützmauern, C.B., S. 182—183.
S. auch Maßstäbe, Momente, Statik.

Erddruck.

H. Engels, Zur Frage der Richtung des Erddrucks auf Stützmauern, C.B., S. 144—146.
Adolf Francke, Der Erddruck der Stützwände, Z.A.I., S. 338—351.
Bruno Schulz, Beitrag zur Theorie des Erddrucks, Z.A.I., S. 626—643.

Erdgestalt.

J. Lüroth, Über die Bestimmung der Erdgestalt durch Verbindung von astronomischen und geodätischen Messungen, Z.V., S. 607—614.
Fachwerk, s. Statik.
Fehler, s. Ausgleichungsrechnung.
Festigkeitslehre, s. Elastizitäts- und Festigkeitslehre.
Fördermaschinen, s. Dynamik.

Geodäsie.

L. Krüger, Zur Theorie rechtwinkliger geodätischer Koordinaten, Z.V., S. 441—453.
Albert Schreiber, Zur Transformation Soldnerscher Koordinaten, Z.V., S. 321-327.
S. auch Abbildungen, Erdgestalt.

Geschichte der Mathematik, Biographien.

E. Hammer, Altbabylonischer Felderplan, Z.V., S. 681—684.
W. Jordan, Bohnenberger (mit Bild), Z.V., S. 417—431.
—— Die Leibnizsche Rechenmaschine, Z.V., S. 289—315.
Johann Christian Nehls † (mit Bild), C.B., S. 411.
Gewölbe, s. Elastizitäts- und Festigkeitslehre.

Gezeiten.

Bubendey, Der Einfluss des Windes und des Luftdruckes auf die Gezeiten, C.B., S. 441—442.

Hebedaumen.

—e. Form der Hebedaumen, P.J., Bd. 303, S. 202—205.

Hydrodynamik, Hydraulik, Hydrographie.

H. Bazin, Étude d'une nouvelle formule pour calculer le débit des canaux découverts, A.P.Ch., IV, p. 20—70.
E. Melli, Bestimmung der Wassergeschwindigkeit in Druckleitungen, Sch.B., Bd. 30, S. 134—135.
Fritz Löwenstein, Wasserleitung mit konstantem Druckverluste, Z.Ö.I.A.V., S. 485 (Erwiderung auf einen Aufsatz von Rob. Bobretzky, S. 436—437).
R. Jasmund, Die Veränderung der Geschwindigkeiten im Querschnitte eines Stromes, Z.B., S. 303—328, 465—472, 585—610.
H., Einiges über die Bemessung der Lichtweite von Flussbrücken, D.B., S. 599.
Fr. Jebens, Die Schwankungen des Wasserspiegels in bewegten Schleusenträgen, D.B., S. 165.
E. Heubach, Das Gesetz des Schiffswiderstandes, D.B., S. 467—470, 479—482, 504.
W. Riehn, Bemerkungen zu der Berechnung des Schiffswiderstandes, Z.Ö.I.A.V., S. 232—233 (Antwort von Th. Maryniak, S. 384—385, Entgegnung von W. Riehn, S. 464).

E. Heubach, Ein Beitrag zur Wasserstandsvorhersage, D.B., S. 370—374, 440.

S. auch Schiffsbau, Tafeln (graphische).

Kettenlinie, s. Elastizitäts- und Festigkeitslehre.

Koordinaten, s. Abbildungen, Geodäsie.

Krempeln, s. Technologie.

Kurbelgetriebe, s. Dynamik.

Kurven.

G. Féderscher, Einführung von Parallelgeleisen in eine bestehende Kurve, Schw.B., Bd. 29, S. 93—94.

S. auch Zeicheninstrumente.

Logarithmen, s. Tafeln (graphische und numerische).

Lokomotiven, s. Stabilität, Wärmetheorie.

Magnetismus.

G. Klingenberg, Längenänderung und Magnetisierung von Eisen und Stahl, V.V.G., S. 124—155.

Mafsstäbe.

R. Land, Über die Maßstäbe bei der zeichnerischen Lösung technischer Aufgaben, Z.A.I., S. 291—302.

Messinstrumente.

Johs. A. F. Engel, Ein neuer Apparat zur Bestimmung der Unregelmässigkeiten von Drehbewegungen, P.J., Bd. 303, S. 207—212.

H. Fahlenkamp, Druckwechsel-Diagrammapparat für Kurbelzapfen im Betrieb befindlicher Maschinen, V.V.G., S. 66—68.

A. Fliegner, Ein neues Momentenplanimeter, Schw.B., Bd. 29, S. 135—138. (Bemerkungen dazu von J. Amsler-Laffon, S. 146—147; Erwiderung von A. Fliegner, S. 147.)

E. Hammer, Neue Kontrollschienen für gewöhnliche Polarplanimeter, Z.I., S. 115—116; D.B., S. 434—435.

Gus. C. Henning, Tragbarer Arbeitszeichner, Z.V.D.I., S. 1230—1231.

J. Lüroth, Ein Instrument zur Messung von Potentialdifferenzen, Z.V., S. 15—17.

Momente.

L. Geusen, Zur Berechnung von statischen und Trägheitsmomenten von Walzprofilen, Z.V.D.I., S. 972—973.

R. Land, Die Säulenmomente als Darstellung der Flächenmomente zweiter Ordnung und ihre einfache Anwendung in der Mechanik und Festigkeitslehre, Z.V.D.I., S. 1246—1252.

Nietverbindungen, s. Reibung.

Nomographie, s. Tafeln, graphische.

Optik.

R. Steinheil, Über die Berechnung zweilinsiger Objektive, Z.I., S. 338—344.

Planimeter, s. Messinstrumente.

Polygone, regelmässige, s. Zeicheninstrumente.

Potentialtheorie.

Holzmüller, Mechanisch-technische Plaudereien, Z.V.D.I, S. 218—222, 257—260, 706—712, 747—752, 1146—1150.

Projektionen, s. Abbildungen.

Proportionierung.

W. R. Corson, The use of practical geometry in designing buildings, B.I, p. 53—57.

W. Schultz, Der Tempel der Diana Propylaea zu Eleusis. Darlegung der Harmonie seiner Verhältnisse, des in seinen Abmessungen enthaltenen Zahlensystems, der geometrischen Grundlagen seiner Gestaltung und des zum Zwecke der Proportionierung eingeschlagenen Verfahrens, A. B., S. 16—52.

Rechen-Instrumente und -Maschinen.

Arthur Burkhardt, Die Leibnizsche Rechenmaschine, Z.V., S. 392—398.

Sliderule for investors, Eg, vol. 43, p. 175.

B. Sresnewsky, Der barometrische Rechenstab (hypsometrisches Lineal), Z.I., S. 335—338, — s. auch Geschichte der Mathematik.

Rechnen, numerisches.

Robert Land, Über den Gebrauch der Rechentafel von Dr. H. Zimmermann, C.B., S. 297—298, — s. auch Trigonometrie.

Regulatoren.

Herm. Hartung, M. Tolle, Richard Knoller, Beiträge zur Beurteilung der Centrifugalpendelregulatoren, Z.V.D.I., S. 238—239, 414—416.

Reibung.

Hermann Brauner, Ein Beitrag zur Beurteilung der zusätzlichen Reibung bei Dampfmaschinen, Z.V.D.I., S. 1340—1343.

—— Untersuchungen über den Reibungswiderstand von Nietverbindungen, Z.V.D.I., S. 739—747, 768—774.

Schaltung, s. Blockwerke.

Schieberdiagramm.

F. A. Brix, Das bizentrische polare Excenterschieberdiagramm, Z.V.D.I., S. 431—434.

Schiffsbau.

J. Kleen, Konstruktion von Schiffsschrauben, Z.V.D.I., S. 590—591.

Sir Edward J. Reed, Advances made in the mathematical theory of Naval Architecture, E., p. 67—68, 80—81, 119, — s. auch Hydrodynamik, Stabilität.

Schneckengetriebe.

R. Stribeck, Versuche mit Schneckengetrieben zur Erlangung der Unterlagen für ihre Berechnung und zur Klarstellung ihres Verhaltens im Betriebe. Zahnform und Eingriffverhältnisse der Getriebe, Z.V.D.I., S. 936—941, 968—972.

Schwingungen.

W. Ritter, Die Schwingungen des neuen Kirchturms in Enge, Schw.B., Bd. 29, S. 42—44, 48—52.

Spannungen, s. Elastizitäts- und Festigkeitslehre, Statik.

Stabilität.

H., Zur Standsicherheits-Untersuchung gewölbter Brücken, D.B., S. 403—404.

Maurice Lévy, Sur les diverses manières d'appliquer la règle du trapèze au calcul de la stabilité des barrages en maçonneries, A.P.Ch., IV, p. 5—19.

J. Nadal, Théorie de la stabilité des locomotives, A.P.Ch., III, p. 271—311.

A. Schromm, Über verschiedene Methoden der Stabilitätsbestimmung von Schiffen, Z.Ö.I.A.V., S. 509—514, 519—525, 534—538.

Statik (insbes. graphische).

Emil Bittner, Einflusslinien für die Spannungen der Gitterstäbe beim Parabelträger, Z.Ö.I.A.V., S. 449—450.

F. Bohny, Die inneren Stabkräfte eines belasteten Fachwerkringes, graphisch ermittelt, Schw.B., Bd. 29, S. 142—145.

Hisely, Méthode pour l'analyse des lignes d'influence expérimentales, A.P.Ch., IV, p. 207—213.

A. Hübner, Bemerkungen über räumliches Fachwerk, Z.V.D.I., S. 477—482. (Bemerkungen dazu von R. Kohfahl und Erwiderung von A. Hübner, S. 632—635.)

Ramisch, Entwurf des Seilecks von einem System in einer Ebene wirksamer Kräfte, welches durch drei gegebene Punkte der Ebene geht, C.B., S. 491.

F. Rosskothen, Beitrag zur synthetischen Untersuchung der Normal-Spannungen in geraden Stäben, D.B., S. 443—448.

Steigung.

Bonhomme, Détermination de la déclivité maximum à adopter pour franchir les grandes hauteurs, A.P.Ch., II, p. 369—376.

Stromlauf, s. Blockwerke.

Stützmauern, s. Elastizitäts- und Festigkeitslehre, Erddruck.

Tafeln, graphische.

G. Dariès, Application de la Nomographie au calcul des conduites d'eau d'après la formule de M. Maurice Lévy, N.A.C., p. 113—118, Pl. 33.

Rateau, Abaque des consommations théoriques d'une machine à vapeur et nouvelle loi relative à la vapeur d'eau, A.M., t. 11, p. 242—249.

Anton Tichy, Graphische Logarithmentafeln, Z.Ö.I.A.V., S. 289—290.

Tafeln, numerische.

H. Sossna, Tafelberichtigungen (Fehler in Schuberts 5stelliger Logarithmentafel), Z.V., S. 405—406.

Technologie, mechanische.

Hermann Fischer, Die Grösse der Widerstände gegen das Abheben von Metallspänen, Z.V.D.I., S. 504—508.

Alfred Haussner, Die Theorie des Krempelns, P.J., Bd. 305, S. 58—63, 84—86, 105—109, 132—135, 159—161, 181—184.

Tractoriograph, s. Zeicheninstrumente.

Träger, s. Elastizitäts- und Festigkeitslehre, Statik.

Transcendente Zahlen, s. Zeicheninstrumente.

Trigonometrie und Polygonometrie.

Puller, Allgemeine analytische Lösung für die Aufgaben der trigonometrischen Punktbestimmung, Z.V., S. 335—342.

H. Sossna, Auflösung der Aufgabe der beiden Punktgruppen mittelst Maschine und numerisch-trigonometrischer Tafel, Z.V., S. 649—661; s. auch Ausgleichungsrechnung.

Ungleichförmigkeitsgrad, s. Dynamik.

Wärmetheorie.

Ugo Ancona, Das Wärmediagramm der gesättigten Dämpfe und seine Anwendung auf Heiss- und Kaltdampfmaschinen, Z.V.D.I., S. 447—451, 549—556.

A. Fliegner, Der Übergang der Wärme zwischen dem Dampf und den Wandungen der Dampfcylinder, Schw.B., Bd. 29, S. 56—59, 65—68, 74—77, 96.

J. Hartmann, Über einen Satz der Thermometrie, Z.I, S. 14—20.

Fritz Krauss, Der Diesel-Motor und der Carnotsche Kreisprozess, Z.V.D.I., S. 1239.

Leitzmann, Berechnung der Verbundlokomotiven und ihres Dampfverbrauches, Z.V.D.I., S. 1355—1359, 1392—1396.

H. Lorenz, Kälteerzeugung, Z.V.D.I., S. 47—51, 70—74.

E. Meyer, Die Beurteilung der Kreisprozesse von Wärmekraftmaschinen mit besonderer Berücksichtigung des Diesel-Motors, Z.V.D.I., S. 1108—1114.

R. Mollier, Über Wärmedurchgang und die darauf bezüglichen Versuchsergebnisse, Z.V.D.I., S. 153—162, 197—202

J. Nadal, Théorie mathématique de la machine à vapeur. Action des parois. A.M, p. 297—349.

A. Seemann, Über Heissdampfmaschinen, Z.V.D.I., S. 1402—1410, 1433—1439, 1464—1467.

Siegert, Neuere Berechnungsweisen von Dampfkesselteilen und Untersuchungsverfahren für Dampfmaschinen, Z.V.D.I., S. 23—26.

A. Wöhler, Die Wirksamkeit der Heizrohre in Lokomotivkesseln, Z.V.D.I., S. 1073—1080.

Wassergeschwindigkeit, Wasserstand, s. Hydrodynamik.

Wurzeln (Quadrat- und Kubik-), s. Rechnen, numerisches

Zeicheninstrumente.

Ljubomir Kleritj, Tractoriograph und Konstruktion der transcendenten Zahlen „π" und „e", sowie Konstruktion der n-seitigen, dem Kreise eingeschriebenen regelmässigen Polygone, P.J., Bd. 305, S. 234—237, 260—263.

G. Rebiček, Über einen Eikurvenzeichner, Z.J., S. 289—292.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.